❧ Avec

$$A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{et} \quad B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

on obtient

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right)^2$$

(définition de la norme euclidienne canonique).

❧ Quels que soient les indices i et j, on déduit de l'inégalité de Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2 \right).$$

Les indices de sommation étant des variables muettes (ou locales, si on veut), on peut réécrire cette majoration sous la forme suivante (qui va tout simplifier : il s'agit donc d'une méthode à retenir).

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2 \right)$$

Toutes ces inégalités allant dans le même sens, on peut les sommer :

$$\|AB\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2 \right).$$

Comme les indices i et j ne se mélangent pas dans les facteurs du produit, la somme double au second membre peut être factorisée :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right)}_{\text{indépendant de } j} \left(\sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2 \right) \right]
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2 \right)}_{\text{indépendant de } i} \right] \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,j}^2 \right).
\end{aligned}$$

On en conclut finalement que

$$\|AB\|^2 \leqslant \|A\|^2 \, \|B\|^2$$

et donc que

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|$$

(puisque les trois quantités de cette dernière expression sont toutes *positives*).

✍ ***Variante***

On peut alléger les notations en travaillant sur les lignes de A et les colonnes de B au lieu de calculer sur les coefficients de ces deux matrices.

On notera $(\cdot|\cdot)$, le produit scalaire canonique sur l'espace $\mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ des matrices lignes et $\langle \cdot|\cdot \rangle$, le produit scalaire canonique sur l'espace $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes.

Si $L = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $C = (y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors

$$L.C = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (L \,|\, C^\top) = \langle L^\top \,|\, C \rangle.$$

L'inégalité de Schwarz peut donc se formuler de deux manières :

$$\begin{aligned}(L.C)^2 &\leqslant (\,L\,|\,L\,).(\,C^\top\,|\,C^\top\,)\\ &\leqslant \langle\,L^\top\,|\,L^\top\,\rangle.\langle\,C\,|\,C\,\rangle\end{aligned}$$

et on en déduit enfin que

$$\forall\, L \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{R}),\ \forall\, C \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\quad (L.C)^2 \leqslant (\,L\,|\,L\,).\langle\,C\,|\,C\,\rangle. \tag{$\star$}$$

❧ *On note* $A = (A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$*, où* A_i *est la* i*-ème ligne de la matrice* A*, et* $B = (B_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$*, où* B_j *est la* j*-ème colonne de la matrice* B*.*

Par définition du produit scalaire canonique sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$*,*

$$\begin{aligned}\|A\|^2 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n A_i.A_i^\top = \sum_{i=1}^n (\,A_i\,|\,A_i\,),\\ \|B\|^2 &= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_{i,j}^2 = \sum_{j=1}^n B_j^\top.B_j = \sum_{j=1}^n \langle\,B_j\,|\,B_j\,\rangle.\end{aligned}$$

Par définition du produit matriciel,

$$AB = (A_i.B_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

et par conséquent,

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (A_iB_j)^2.$$

Or, d'après l'inégalité de Schwarz ($\star$),

$$\forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant n,\quad (A_iB_j)^2 \leqslant (\,A_i\,|\,A_i\,).\langle\,B_j\,|\,B_j\,\rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &\leqslant \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (\,A_i\,|\,A_i\,).\langle\,B_j\,|\,B_j\,\rangle\\ &\leqslant \left[\sum_{i=1}^n (\,A_i\,|\,A_i\,)\right]\left[\sum_{j=1}^n \langle\,B_j\,|\,B_j\,\rangle\right]\\ &\leqslant \|A\|^2.\|B\|^2.\end{aligned}$$

Comme $\|A\|$*,* $\|B\|$ *et* $\|AB\|$ *sont des réels positifs, on en déduit que la norme euclidienne canonique sur* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *est une norme sous-multiplicative :*

$$\forall\, A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\quad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|.$$