
Convexité [11.3]

Il s'agit d'étendre la définition [11.1] des fonctions convexes au cas des combinaisons convexes de n points de I . Nous allons donc nous inspirer de la démonstration du [7.1] et procéder par récurrence sur n .

• Nous considérons une fonction convexe

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

• Pour $n = 2$, on pose $t = \lambda_2$, qui est positif par hypothèse. Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, on en déduit que $\lambda_1 = 1 - t \geq 0$ et donc que $t \in [0, 1]$.

La propriété à établir peut donc s'écrire

$$\forall x_1, x_2 \in I, \\ f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

ce qui est vrai par hypothèse de convexité de f .

• Notre **Hypothèse de Récurrence** est la suivante : on suppose qu'il existe un entier $n \geq 2$ tel que, quelles que soient les abscisses $x_1, \dots, x_n$ sur I , quels que soient les poids positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifiant

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1,$$

on ait

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

• Considérons maintenant des abscisses $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ sur I et des poids positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ tels que

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1.$$

► Premier cas : si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ et comme tous les λ_k sont positifs, on en déduit que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

La propriété à établir se réduit alors à

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_{n+1}),$$

ce qui est évident.

► Deuxième cas : si $0 \leq \lambda_{n+1} < 1$, alors

$$0 < \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1} \leq 1$$

et (c'est une forme de l'associativité du barycentre)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k = (1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k \right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}.$$

► Les coefficients $\lambda_k / (1 - \lambda_{n+1})$ sont tous positifs (le numérateur est positif, le dénominateur est strictement positif) et leur somme est égale à 1 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^n \lambda_k = \frac{1 - \lambda_{n+1}}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

► Comme tous les x_k appartiennent à l'intervalle I et que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des parties **convexes** [8.1], la combinaison convexe

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k$$

appartient à I et, par convexité de f sur I ,

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leq (1 - \lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

REMARQUE.— La fonction f est convexe sur I , il faut justifier qu'on travaille avec des éléments de I pour appliquer la propriété de convexité !

▷ Par **HR**,

$$f\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k)$$

et comme $(1 - \lambda_{n+1}) \geq 0$, on en déduit enfin que

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &\leq (1 - \lambda_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_k)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k). \end{aligned}$$

► Nous avons ainsi démontré (par récurrence) la propriété [11.3] pour tout entier $n \geq 2$.

♣ Si $n = 1$, alors $\lambda_1 = 1$ et l'inégalité se réduit alors à

$$\forall x_1 \in I, \quad f(x_1) \leq f(x_1).$$

C'est assez étrange, à peu près sans intérêt, mais tout à fait juste et la propriété [11.3] est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

REMARQUE.— Dans la démonstration du [7.1], j'ai distingué le cas $\lambda_{n+1} = 0$. Ce n'était pas une erreur, mais c'était tout à fait *inutile*. C'est pour cela que ce cas particulier est absent de la discussion précédente.

Apprendre par cœur, c'est bien. Apprendre par cœur après avoir étudié le cours d'un œil critique, c'est mieux (et plus facile).