## Convexité [52.2]

► Quel que soit le point $G$,

$$\mathbf{MA} + 2 \cdot \mathbf{MB} = 3 \cdot \mathbf{MG} + (\mathbf{GA} + 2 \cdot \mathbf{GB})$$

et en particulier si $G_1$ est le barycentre du système pondéré

$$\big((A, 1), (B, 2)\big)$$

(le poids total est égal à 3, donc non nul), alors

$$\mathbf{MA} + 2 \cdot \mathbf{MB} = 3 \cdot \mathbf{MG_1}.$$

De même, quel que soit le point $G$,

$$3 \cdot \mathbf{MB} + \mathbf{MC} = 4 \cdot \mathbf{MG} + (3 \cdot \mathbf{GB} + \mathbf{GC})$$

et en particulier si $G_2$ est le barycentre du système pondéré

$$\big((B, 3), (C, 1)\big)$$

(le poids total étant égal à 4), alors

$$3 \cdot \mathbf{MB} + \mathbf{MC} = 4 \cdot \mathbf{MG_2}.$$

► On en déduit donc que l'équation

$$\|\mathbf{MA} + 2\mathbf{MB}\| = \|3\mathbf{MB} + \mathbf{MC}\|$$

équivaut à

$$3\|\mathbf{MG_1}\| = 4\|\mathbf{MG_2}\|.$$

Comme les deux membres sont des réels **positifs**, cette équation équivaut à

$$9\|\mathbf{MG_1}\|^2 - 16\|\mathbf{MG_2}\|^2 = 0.$$

► La conclusion du **[49.2]** n'est pas un résultat au programme, donc on ne peut pas se contenter d'*appliquer* ce résultat.

Cependant, ce résultat découle logiquement des calculs suggérés au **[49.1]**, dont nous allons maintenant nous *inspirer*.

Quel que soit le point $H$,

$$\begin{aligned}
9\|\mathbf{MG_1}\|^2 &- 16\|\mathbf{MG_2}\|^2 \\
&= 9\big(\|\mathbf{MH}\|^2 + 2\,\langle\, \mathbf{MH} \,|\, \mathbf{HG_1} \,\rangle + \|\mathbf{HG_1}\|^2\big) \\
&\quad - 16\big(\|\mathbf{MH}\|^2 + 2\,\langle\, \mathbf{MH} \,|\, \mathbf{HG_2} \,\rangle + \|\mathbf{HG_2}\|^2\big) \\
&= -7\|\mathbf{MH}\|^2 + 2\,\langle\, \mathbf{MH} \,|\, 9 \cdot \mathbf{HG_1} - 16 \cdot \mathbf{HG_2} \,\rangle \\
&\quad + 9\|\mathbf{HG_1}\|^2 - 16\|\mathbf{HG_2}\|^2
\end{aligned}$$

et en particulier (cf **[49.1]** !) si $H$ est le barycentre du système pondéré

$$\big((G_1, 9), (G_2, -16)\big)$$

(poids total égal à $-7$, donc non nul...), alors **[1.3]**

$$9 \cdot \mathbf{HG_1} - 16 \cdot \mathbf{HG_2} = 0$$

et donc

$$9\|\mathbf{MG_1}\|^2 - 16\|\mathbf{MG_2}\|^2 = -7\|\mathbf{MH}\|^2 + 9\|\mathbf{HG_1}\|^2 - 16\|\mathbf{HG_2}\|^2.$$

Comme $9 \cdot \mathbf{HG_1} - 16 \cdot \mathbf{HG_2} = 0$ d'après **[1.3]**, alors

$$16\|\mathbf{HG_2}\|^2 = \frac{81}{16}\|\mathbf{HG_1}\|^2$$

et finalement

$$9\|\mathbf{HG_1}\|^2 - 16\|\mathbf{HG_2}\|^2 = \frac{63}{16}\|\mathbf{HG_1}\|^2.$$

L'équation est devenue

$$\|\mathbf{MH}\|^2 = \frac{9}{16}\|\mathbf{HG_1}\|^2$$

c'est-à-dire

$$\|\mathbf{HM}\| = \frac{3}{4}\|\mathbf{HG_1}\|.$$

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des points $M$ dont la distance au point $H$ est égale à $3/4\|\mathbf{HG_1}\|$, c'est donc la sphère de centre $H$ et de rayon $3/4\|\mathbf{HG_1}\|$.