I.A Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \quad \text{avec} \quad f_i(x) = b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j.$$

Il est donc clair que les dérivées partielles de chacune des composantes de f sont définies et continues sur $\mathbb{R}^n$:

$$\forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{i,j}$$

donc f est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et $J_f(x) = A$ en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

I.B.1 L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que composée d'une application linéaire $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et de $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, qui est $\mathscr{C}^1$ par hypothèse.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t \cdot a & \longmapsto & g(t \cdot a) = \varphi(t) \end{array}$$

D'après le théorème de différentiation des fonctions composées,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \mathrm{d}g(t \cdot a)\big(T'(t)\big) = \mathrm{d}g(t \cdot a)(a).$$

On peut également invoquer la règle de la chaîne en notant $x_1(t) = ta_1$, ..., $x_n(t) = ta_n$ les composantes de $T(t)$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(t \cdot a)\frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(t \cdot a)a_j.$$

I.B.2 Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + o(t) = g(0) + t\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(0)a_j + o(t).$$

I.C.1 Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, chacune de ses composantes $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et on peut appliquer ce qui précède à $g = f_i$. On en déduit que

$$f(t_j) = t\frac{\partial f}{\partial x_j}(0) + o(t)$$

pour t voisin de 0.

Par n-linéarité du déterminant,

$$\det\big(f(t_1), \dots, f(t_n)\big) = t^n \det\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + o(1)}_{\varphi_1(t)}, \dots, \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(0) + o(1)}_{\varphi_n(t)}\Big)$$

et par continuité de Φ

$$\det\big(f(t_1), \dots, f(t_n)\big) = t^n\Big[\det\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(0)\Big) + o(1)\Big] = t^n \det\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(0)\Big) + o(t^n).$$

I.C.2 Par n-linéarité et par définition de det,

$$\det(t_1, \dots, t_n) = t^n \det(e_1, \dots, e_n) = t^n$$

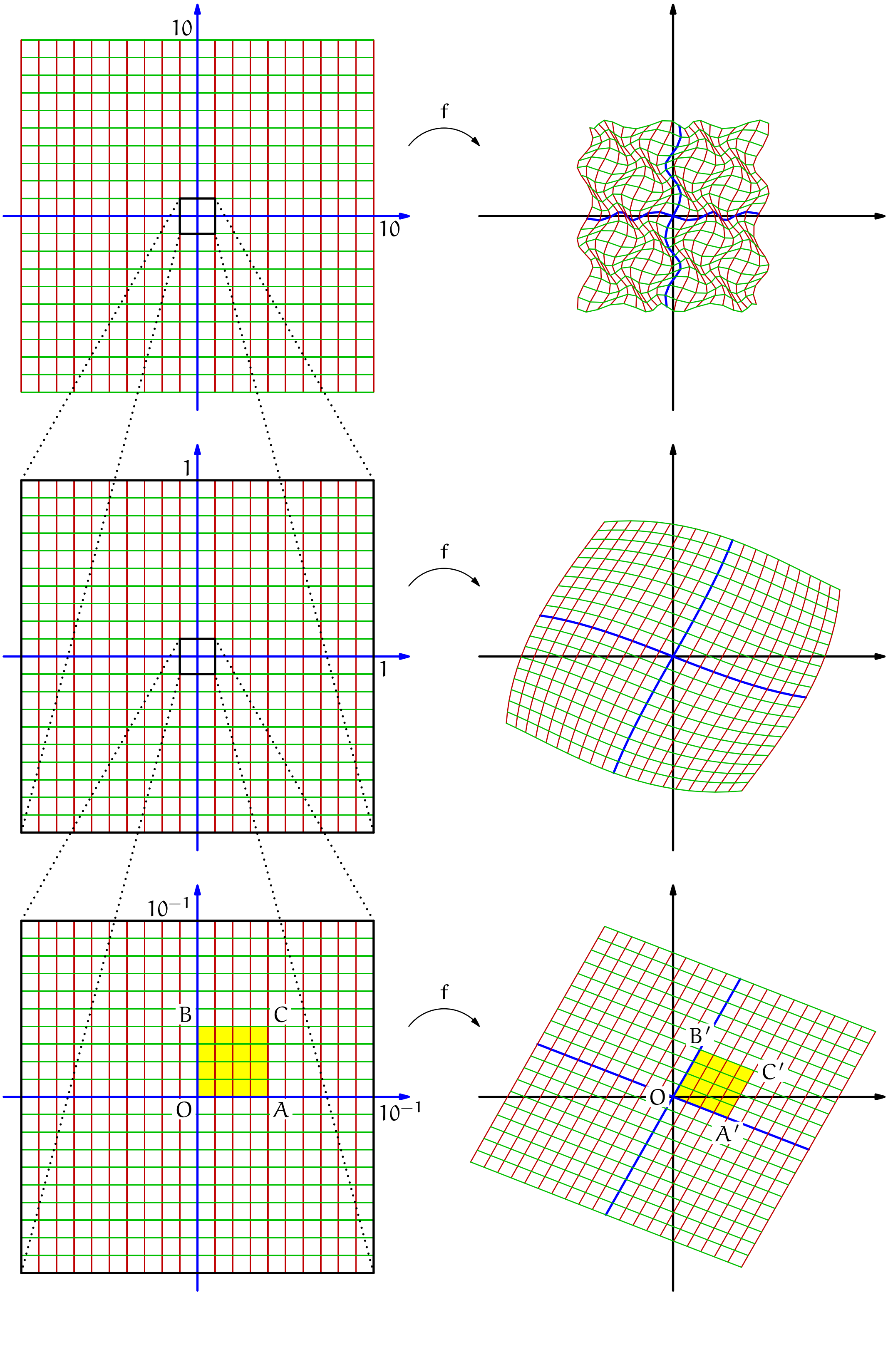
où $(e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On déduit alors de ce qui précède que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\det\big(f(t_1), \dots, f(t_n)\big)}{\det(t_1, \dots, t_n)} = \mathrm{jac}_f(0).$$

I.C.3 Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f(0) = 0$, le développement limité $f(x) = \mathrm{d}f(0)(x) + o(x)$ montre que, au voisinage de l'origine, l'application f est assimilable à son application linéaire tangente.

Si t est assez petit, l'image par f du parallélogramme $OACB$ construit sur les vecteurs t_1 et t_2 (qui est en fait un carré) est donc assez proche du parallélogramme $OA'C'B'$, image de $OACB$ par l'application linéaire tangente $df(0)$, et

$$\frac{\left|\det\big(f(t_1), f(t_2)\big)\right|}{\left|\det(t_1, t_2)\right|} = \frac{\text{aire de } OA'C'B'}{\text{aire de } OACB} \xrightarrow[t \to 0]{} \left|\mathrm{jac}_f(0)\right|.$$



De même, en dimension 3, la valeur absolue de $\det\big(f(t_1), f(t_2), f(t_3)\big)$ est le volume du parallélipipède contruit sur les trois vecteurs $f(t_1) = t \cdot f(e_1)$, $f(t_2)$ et $f(t_3)$ et le jacobien $|\mathrm{jac}_f(0)|$ est la limite quand t tend vers 0 du quotient du volume de ce parallélipipède par le volume du cube construit sur les vecteurs $t \cdot e_1$, $t \cdot e_2$ et $t \cdot e_3$.

II.A Par I.A,

$$\mathrm{div}_f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{tr}\, A.$$

II.B.1 On considère le système différentiel $X' = AX$, qui est linéaire, homogène et *à coefficients constants*, donc la solution qui vérifie la condition initiale $X(0) = a$ est donnée par

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad u_a(t) = \exp(tA)a = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} a = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} a_1 \\ e^{\lambda_2 t} a_2 \end{pmatrix}.$$

II.B.2 Soit $P = \mathfrak{Mat}(a, b)$. Comme $u_a(t) = \exp(tA)a$ et $u_b(t) = \exp(tA)b$, alors

$$\mathfrak{Mat}\big(u_a(t), u_b(t)\big) = \exp(tA)P$$

et par conséquent

$$\det\big(u_a(t), u_b(t)\big) = \det[\exp(tA)] \det P = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \det(a, b\big) = \exp[t\, \mathrm{div}_f(a)] \det\big(u_a(0), u_b(0)\big)$$

d'après II.A et le fait que, par choix des conditions initiales, $u_a(0) = a$ et $u_b(0) = b$.

II.B.3 L'aire $A(t)$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $u_a(t)$ et $u_b(t)$ est égale, on le rappelle, à

$$\big|\det\big(u_a(t), u_b(t)\big)\big| = \exp[t\, \mathrm{div}_f(a)].A(0).$$

Cette aire, considérée comme une fonction de $t \in \mathbb{R}$, est donc
- croissante si $\mathrm{div}_f(a) > 0$;
- constante si $\mathrm{div}_f(a) = 0$;
- décroissante si $\mathrm{div}_f(a) < 0$.

II.C.1 Comme $a_1 > 0$ et $\lambda_1 \neq 0$, alors

$$t = \frac{1}{\lambda_1} \ell n \underbrace{\frac{x_1(t)}{a_1}}_{>0}$$

et par conséquent

$$x_2(t) = a_2 e^{\lambda_2 t} = a_2 \Big(\frac{x_1(t)}{a_1}\Big)^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

La fonction θ_a définie par

$$\forall\, x > 0, \qquad \theta_a(x) = a_2 \Big(\frac{x}{a_1}\Big)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

répond donc à la question posée.

REMARQUE.— Il s'agit d'exprimer l'ordonnée $x_2(t)$ en fonction de l'abscisse $x_1(t)$, donc θ_a est une fonction de la variable d'*espace*.

II.C.2 Les points $(0, 0)$, $u_a(t)$, $u_b(t)$ et $u_a(t) + u_b(t)$ forment un parallélogramme quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Par définition de θ_a et θ_b, les points $u_a(t)$ et $u_b(t)$ appartiennent aux graphes de θ_a et θ_b. Le quatrième sommet de ce parallélogramme appartient au graphe de θ_{a+b} puisque

$$u_{a+b}(t) = e^{tA}(a + b) = e^{tA}a + e^{tA}b = u_a(t) + u_b(t).$$

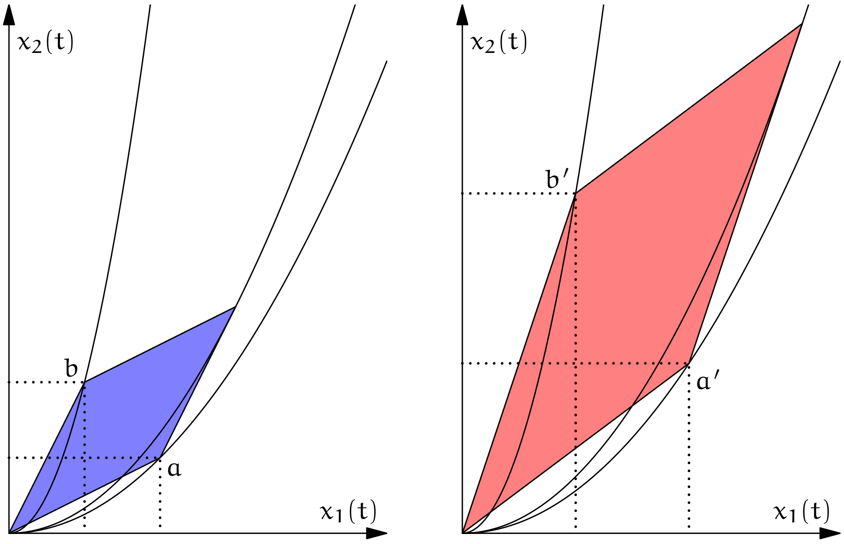
Notons $a = u_a(0) = (a_1, a_2)$, $b = u_b(0) = (b_1, b_2)$, $a' = u_a(t) = (a'_1, a'_2)$ et $b' = u_b(t) = (b'_1, b'_2)$. D'après II.B.1,

$$\frac{a'_1}{a_1} = \frac{b'_1}{b_1} = \exp \lambda_1 t$$

et comme $a_1 = 2b_1$, on en déduit que $a'_1 = 2b'_1$: cette relation permet de situer le point b' sur le graphe de θ_b en fonction du choix (arbitraire) du point a' sur le graphe de θ_a.

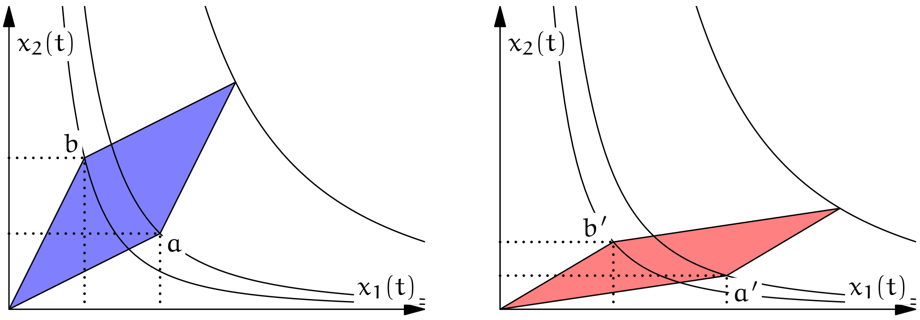
II.C.2.a Dans ce premier cas, on a

$$\forall\, x > 0, \quad \theta_a(x) = \frac{x^2}{4}, \quad \theta_b(x) = 2x^2, \quad \theta_{a+b}(x) = \frac{x^2}{3}.$$



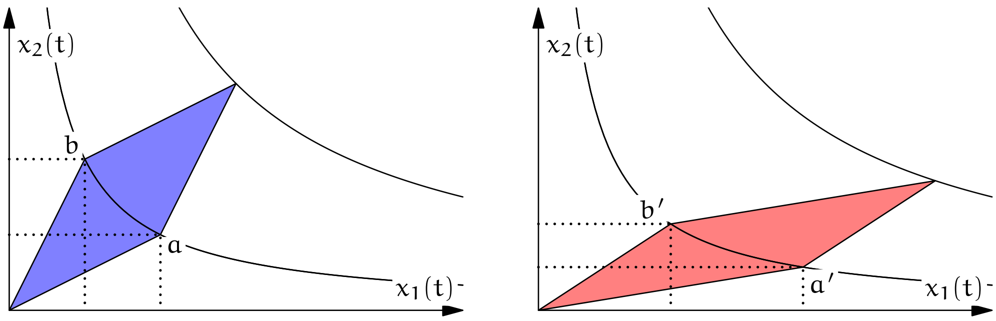
II.C.2.b Dans le deuxième cas, on a

$$\forall\, x > 0, \quad \theta_a(x) = \frac{4}{x^2}, \quad \theta_b(x) = \frac{2}{x^2}, \quad \theta_{a+b}(x) = \frac{27}{x^2}.$$



II.C.2.c Dans le troisième cas, on a

$$\forall\, x > 0, \quad \theta_a(x) = \theta_b(x) = \frac{2}{x}, \quad \theta_{a+b}(x) = \frac{9}{x}.$$



S'il est manifeste que l'aire du parallélogramme est une fonction croissante de t dans le premier cas et décroissante de t dans le second cas, seul le calcul montre que l'aire est constante dans le troisième cas. (L'aire est conserve mais pas l'aspect du parallélogramme : les isométries conservent les aires, mais ce ne sont pas les seules transformations qui les conservent.)

II.D.1 La matrice A est la somme de l'homothétie λI_2 et de la matrice nilpotente μN où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme ces deux matrices commutent,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) = \exp(\lambda t I_2)\exp(\mu t N) = e^{\lambda t}(I_2 + \mu t N) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & \mu t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et par conséquent,

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad u_a(t) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & \mu t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a.$$

Le raisonnement du II.B.2 nous donne alors

$$\det\big(u_a(t), u_b(t)\big) = e^{2\lambda t}\begin{vmatrix} 1 & \mu t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\det(a,b) = e^{2\lambda t}\det\big(u_a(0), u_b(0)\big) = \exp[t\operatorname{div}_f(a)]\det\big(u_a(0), u_b(0)\big)$$

puisque, ici, $2\lambda = \operatorname{tr} A = \operatorname{div}_f(a)$.

II.D.2 Si le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$,

– ou bien A est diagonalisable et donc semblable à la matrice étudiée en II.C,
– ou bien A est trigonalisable avec une valeur propre double et donc semblable à la matrice étudiée au II.D.1

Considérons donc deux matrices semblables A et B : il existe une matrice inversible Q telle que $B = Q^{-1}AQ$ et on sait que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tB) = Q^{-1}\exp(tA)Q \quad \text{c'est-à-dire} \quad \exp(tA) = Q\exp(tB)Q^{-1}.$$

En reprenant le raisonnement et les notations du II.B.2,

$$\det\big(u_a(t), u_b(t)\big) = \det[Q\exp(tB)Q^{-1}]\det P = \det[\exp(tB)]\det P = \exp[\operatorname{tr}(tB)]\det P$$

d'après II.B.2 (cas où B est diagonale) et II.D.2 (cas où B est triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux). Or deux matrices semblables ont même trace et par II.A

$$\operatorname{tr}(tB) = t\operatorname{tr} B = t\operatorname{tr} A = t\operatorname{div}_f(a)$$

donc

$$\det\big(u_a(t), u_b(t)\big) = \exp[t\operatorname{div}_f(a)]\det\big(u_a(0), u_b(0)\big)$$

pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

II.D.3 Si le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, alors A admet deux valeurs propres complexes conjuguées : $\alpha \pm i\beta$. Par conséquent, $J = {}^1\!/_\beta(A - \alpha I_2)$ admet $\pm i$ pour valeurs propres complexes et comme $J \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est égal à $(X-i)(X+i) = X^2+1$ donc $J^2 = -I_2$.

On a ainsi décomposé A en combinaison lin'eaire de matrices qui commutent : $A = \alpha I_2 + \beta J$, donc $\exp(tA) = \exp(t\alpha)\exp(\beta t J)$. Mais $J^2 = -I_2$, donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad J^{4k} = I_2, \quad J^{4k+1} = J, \quad J^{4k+2} = -I_2, \quad J^{4k+3} = -J$$

et par conséquent

$$\exp(\beta t J) = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\beta t)^{2k}}{(2k)!}\Big)I_2 + \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\beta t)^{2k+1}}{(2k+1)!}\Big)J = \cos\beta t\cdot I_2 + \sin\beta t\cdot J.$$

Soient $x \in \mathbb{R}^2$, non nul, et $y = Jx \in \mathbb{R}^2$. Alors $Jy = J^2x = -x$ et comme $i \notin \mathbb{R}$, alors x et y ne sont pas proportionnels. Dans cette base de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à J est donc égale à

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc J est semblable à J_0, donc $\exp(tA)$ est semblable à

$$\exp(t\alpha)\big(\cos\beta t\cdot I_2 + \sin\beta t\cdot J_0\big) = e^{t\alpha}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$$

et comme deux matrices semblables ont même déterminant,

$$\det[\exp(tA)] = \exp(2t\alpha) = \exp(t\operatorname{tr} A).$$

On retrouve ainsi une fois encore la propriété

$$\det\big(u_a(t), u_b(t)\big) = \exp[t \operatorname{div}_f(a)] \det\big(u_a(0), u_b(0)\big)$$

qui est ainsi démontrée pour *toute* matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

III.A Comme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathscr{C}^2$, chacune de ses composantes $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et d'après le théorème de Schwarz,

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n,\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

III.B.1 L'antisymétrie de la matrice jacobienne $J_f(x)$ se traduit par le fait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, 1 \leqslant i, k \leqslant n, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x).$$

Dérivons cette identité par rapport à la variable x_j :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, 1 \leqslant i, j, k \leqslant n, \quad \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}(x) = -\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

c'est-à-dire $f_{j,i,k}(x) = -f_{j,k,i}(x)$ en reprenant les notations de l'énoncé : c'est la relation attendue à une permutation des indices près.

III.B.2 Appliquons alternativement III.A (les indices permutés sont en rouge) et III.B.1 (les indices permutés et le changement de signe sont en bleu) autant de fois que nécessaire :

$$f_{i,j,k} = f_{j,i,k} = -f_{j,k,i} = -f_{k,j,i} = +f_{k,i,j} = f_{i,k,j} = -f_{i,j,k}$$

ce qui prouve bien que $f_{i,j,k} = 0$ quels que soient les indices $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$.

III.B.3 Soient $1 \leqslant j, k \leqslant n$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, la fonction $f_{j,k}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et d'après ce qui précède, l'application linéaire tangente à $f_{j,k}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction $f_{j,k}$ est donc constante.

Il existe donc une matrice $A = (a_{j,k})_{1 \leqslant j,k \leqslant n}$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant j, k \leqslant n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad a_{j,k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x).$$

On reconnaît la matrice jacobienne de f, ce qui prouve que la matrice A est antisymétrique.

Enfin, la fonction $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f_0(x) = f(x) - Ax$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ (en tant que différence de deux applications de classe $\mathscr{C}^1$) et, par définition de A, la matrice jacobienne de f_0 est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f_0 est donc constante : il existe un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = Ax + b.$$

III.B.4 D'après l'étude qui précède, si la matrice jacobienne de $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est antisymétrique en chaque point de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une matrice antisymétrique A et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad f(x) = Ax + b.$$

Réciproquement, d'après I.A, quels que soient la matrice antisymétrique A et le vecteur $b \in \mathbb{R}^n$, l'application f définie par $f(x) = Ax + b$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et en chaque point de $\mathbb{R}^n$, sa matrice jacobienne, égale à A, est antisymétrique.

III.C Il s'agit de démontrer ici un cas particulier d'un théorème attribué à Poincaré, qu'on peut formuler de la manière suivante en dimension 3 :

Un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$ dérive d'un potentiel g si, et seulement si, son rotationnel est identiquement nul.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^3,\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant 3, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0$$

❧ Supposons que f soit le gradient d'un potentiel : il existe une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, 1 \leqslant i \leqslant n, \qquad f_i(x) = \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

Comme g est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut appliquer le théorème de Schwarz

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

et en déduire que la jacobienne de f est symétrique en tout point de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, 1 \leqslant i, j \leqslant n, \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

❧ Avant de démontrer la réciproque, voyons comment trouver l'expression du seul potentiel dont peut dériver f. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g(0) = 0$ (un potentiel est défini à une constante additive près), alors la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = g(t \cdot x) = g(tx_1, \dots, tx_n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{d(tx_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial g}{\partial x_i}(t \cdot x)$$

(dérivation d'une fonction composée), donc

$$g(x) = g(1 \cdot x) - g(0 \cdot x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(t \cdot x)\, dt.$$

❧ Soient $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, l'application définie par

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad H(x) = \int_0^1 h(tx_1, \dots, tx_n)\, dt.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application $[t \mapsto h(tx_1, \dots, tx_n)]$ est continue sur le segment $[0, 1]$ et donc intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $[x \mapsto h(t \cdot x)]$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et sa dérivée partielle par rapport à x_j a pour expression :

$$t\, \frac{\partial h}{\partial x_j}(t \cdot x)$$

(dérivation d'une fonction composée).

Soit $r > 0$. La boule fermée B_r de rayon r centrée à l'origine est une partie compacte (fermée et bornée) de $\mathbb{R}^n$. Par continuité, la fonction h reste bornée sur B_r et comme $t \cdot x \in B_r$ pour tout $x \in B_r$ et tout $t \in [0, 1]$, on en déduit que

$$\exists\, M_r > 0,\ \forall\, t \in [0, 1],\ \forall\, x \in B_r, \qquad \big|h(t \cdot x)\big| \leqslant M_r$$

ce qui montre que l'hypothèse de domination est vérifiée sur B_r.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur B_r pour tout $r > 0$: la conclusion du théorème est donc vraie sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \frac{\partial H}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 t\, \frac{\partial h}{\partial x_j}(t \cdot x)\, dt.$$

❧ Passons enfin à la démonstration de la réciproque et considérons une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont la matrice jacobienne est symétrique en chaque point de $\mathbb{R}^n$. Définissons une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en posant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx_1, \dots, tx_n)\, dt.$$

En appliquant ce qui précède à $h = f_i$, on constate que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\begin{aligned}\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 f_j(t\cdot x)\,dt + \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 t\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t\cdot x)\,dt \\ &= \int_0^1 f_j(t\cdot x)\,dt + \int_0^1 t\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t\cdot x)\,dt \\ &= \int_0^1 f_j(t\cdot x)\,dt + \int_0^1 t\cdot\frac{d\big[f_j(t\cdot x)\big]}{dt}\,dt\end{aligned}$$

(calculs faits plus haut pour justifier l'expression de g). En intégrant par parties, il reste

$$\begin{aligned}\forall\, 1 \leqslant j \leqslant n, \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 f_j(t\cdot x)\,dt + \big[t\cdot f_j(t\cdot x)\big]_0^1 - \int_0^1 1\cdot f_j(t\cdot x)\,dt \\ &= 1\cdot f_j(1\cdot x) - 0\cdot f_j(0\cdot x) = f_j(x)\end{aligned}$$

puisque $f_j(0) = 0$.

Cela prouve en particulier que les dérivées partielles de g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et donc que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$: le résultat est démontré.