Retrouver les développements asymptotiques suivants, où n tend vers $+\infty$.

$$n\sqrt{\frac{n-1}{3\,n+1}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}n - \frac{2}{9}\sqrt{3} + \mathcal{O}(1/n^2)$$

$$\frac{n}{(n-2)(n^2+1)} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \frac{3}{n^4} + \mathcal{O}(1/n^5)$$

$$\frac{1}{(n-1)(n+2)(2\,n-3)} = \frac{1}{2\,n^3} + \frac{1}{4\,n^4} + \mathcal{O}(1/n^5)$$

$$\sqrt{\frac{n}{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\,n^{\left(\frac{5}{2}\right)}} + \mathcal{O}(1/n^4)$$

$$\sqrt{\frac{n^2-n+1}{n^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\,n^{\left(\frac{3}{2}\right)}} + \mathcal{O}(1/n^{\frac{5}{2}})$$

$$-\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{3}{8\,n^{\left(\frac{3}{2}\right)}} + \mathcal{O}(1/n^{\frac{5}{2}})$$

$$\ell\mathrm{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+1} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^3} + \mathcal{O}(1/n^5)$$

$$\left(\frac{1}{n}+1\right)^n = e - \frac{e}{2\,n} + \frac{11\,e}{24\,n^2} + \mathcal{O}(1/n^3)$$

$$\left(2\,n - \frac{1}{n} + 1\right)e^{\frac{1}{n}} = 2n + 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{6\,n^2} + \mathcal{O}(1/n^3)$$

$$\ell\mathrm{n}\left(n^2 - \frac{1}{n}\right) = 2\,\ell\mathrm{n}\,n - \frac{1}{n^3} + \mathcal{O}(1/n^5)$$

$$\frac{1}{n\,\ell\mathrm{n}\,n} + \ell\mathrm{n}\,\frac{\ell\mathrm{n}(n-1)}{\ell\mathrm{n}\,n} \sim \frac{-1}{2n^2\,\ell\mathrm{n}\,n}$$

Retrouver les développements asymptotiques suivants, où n tend vers $+\infty$. En déduire que les séries $\sum u_n$ sont absolument convergentes et donner un ordre de grandeur du reste d'ordre n.

$$u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3} + o(1/n^3)$$

$$u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2} + o(1/n^2)$$

$$u_n = \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3} + o(1/n^3)$$

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n^2} + o(1/n^2)$$

$$u_n = -\frac{1}{n-1} + \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\frac{2}{n^2} + o(1/n^2)$$

Retrouver les développements asymptotiques suivants, où n tend vers $+\infty$. En déduire que les séries $\sum(-1)^n u_n$ sont semi-convergentes et donner un ordre de grandeur des sommes partielles de $\sum u_n$.

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^3} + o(1/n^3)$$

$$u_n = \sqrt{-\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)+1} = \frac{\sqrt{2}}{2\,n} - \frac{\sqrt{2}}{2\,n^2} + o(1/n^2)$$

$$u_n = \ell\mathrm{n}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+3\,n+2}\right) = -\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + o(1/n^2)$$

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8\,n^{\left(\frac{3}{2}\right)}} + o(1/n^2)$$

$$u_n = \ell\mathrm{n}\,(n+1)^2 - \ell\mathrm{n}\,(n)^2 = \frac{2\,\ell\mathrm{n}\,(n)}{n} - \frac{\ell\mathrm{n}\,(n) - 1}{n^2} + o(1/n^2)$$

$$u_n = -n + \sqrt{n^2 + \frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{2\,n^2} + o(1/n^2)$$