Normes [39.2 & 39.3]

[39.2] L'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est contenu dans l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\Omega, F)$ (de dimension infinie).

Soient f et g dans $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ et $t \in [0, 1]$. On pose

$$h = (1-t)f + tg$$

au sens où

$$\forall\, x \in \Omega, \quad h(x) = (1-t)f(x) + tg(x).$$

Quels que soient x et y dans Ω,

$$\begin{aligned}
\big\|h(x) - h(y)\big\| &= \big\|(1-t)[f(x) - f(y)] + t[g(x) - g(y)]\big\| \\
&\leqslant \big\|(1-t)[f(x) - f(y)]\big\| + \big\|t[g(x) - g(y)]\big\| \\
&\hspace{12em} \text{(inég. triang.)} \\
&\leqslant \underbrace{(1-t)}_{\geqslant 0}\big\|f(x) - f(y)\big\| + \underbrace{t}_{\geqslant 0}\big\|g(x) - g(y)\big\| \\
&\hspace{12em} \text{(homog.)} \\
&\leqslant (1-t)k\|x - y\| + tk\|x - y\| = k\|x - y\|
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que la combinaison convexe h est bien une application k-lipschitzienne de Ω dans F.

Pour tout $k > 0$, l'ensemble $\mathcal{L}_k(\Omega, F)$ est donc convexe (car stable par combinaison convexe).

[39.3] Soient $0 \leqslant k \leqslant k'$. Considérons une application k-lipschitzienne f. Cela signifie que

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k\|x - y\|.$$

Or $\|x - y\| \geqslant 0$, donc

$$k\|x - y\| \leqslant k'\|x - y\|$$

et par conséquent

$$\forall\, x, y \in \Omega, \quad \big\|f(x) - f(y)\big\| \leqslant k'\|x - y\|.$$

Cela signifie que l'application f est aussi k'-lipschitzienne.

On a donc démontré que toute application k-lipschitzienne est aussi k'-lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\mathcal{L}_k(\Omega, F) \subset \mathcal{L}_{k'}(\Omega, F).$$