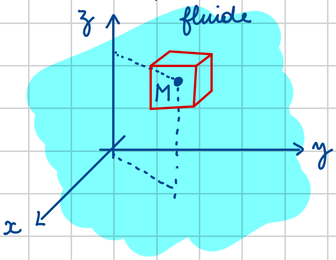
Comment s'exprime la force volumique de pression ?

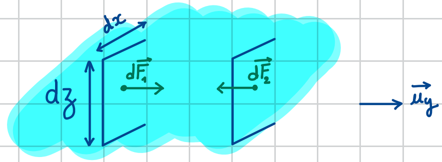
1. le problème



- soit le volume mésoscopique $d\tau = dx\,dy\,dz$ autour du point M
- coordonnées du point M : (x, y, z)
- chaque surface est soumise à une force de pression.

2. le calcul

On considère deux surfaces en regard



Surface en $y - \frac{dy}{2}$: dS_1 $\quad y + \frac{dy}{2}$: dS_2

$\vec{dF_1}$: force élémentaire de pression du fluide sur la surface élémentaire dS_1

$$\vec{dF_1} = p\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) dx\,dz\,\vec{u_y}$$

même raisonnement : $\vec{dF_2} = -p\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) dx\,dz\,\vec{u_y}$

la résultante $\vec{dF_y} = \vec{dF_1} + \vec{dF_2} = p\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) dx\,dz\,\vec{u_y} - p\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) dx\,dz\,\vec{u_y}$

on réalise un DL et il reste $\vec{dF_y} = -\frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,\vec{u_y}$

on fait de même sur les 4 autres faces et on obtient :
la résultante des forces de pression s'exerçant sur le point M s'écrit :

$$\vec{dF} = \vec{dF_x} + \vec{dF_y} + \vec{dF_z} = -\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{u_z}\right)}_{\vec{\text{grad}}\,p}\underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau}$$

$$\vec{dF} = -\vec{\text{grad}}\,p \cdot d\tau$$

3. la conclusion :

On peut écrire la résultante des forces de pression en M comme une force volumique $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \frac{\vec{dF}}{d\tau} = \text{force volumique des forces de pression} = -\vec{\text{grad}}\,p$$

p au point M

$$\boxed{\vec{f} = -\vec{\text{grad}}\,p}$$