Colle de la semaine du 11/12

Le programme porte sur l'intégration des suites et séries de fonctions, les intégrales à paramètres et les groupes :

Intégration des suites et séries de fonctions, intégrales à paramètres :

— Théorème de convergence dominée.
— Théorème d'intégration terme à terme ; appliquer le thm. d'intégration terme à terme n'est pas la même chose que d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.
— Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
— Théorème de continuité des intégrales à paramètres.
— Théorème de convergence dominée avec paramètre continu.
— Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres puis extension à la classe $\mathcal{C}^k$.
— Etude de la fonction Γ (hors programme).

Groupes :

— Définitions groupes, sous-groupes, les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
— Classe d'équivalence à gauche, à droite selon un sous-groupe, théorème de Lagrange, groupe quotient dans le cas de groupes abéliens (tous ces points sont hors programmes).
— Groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— Morphismes de groupes, propriétés des morphismes de groupes.
— Sous-groupe engendré par une partie, groupe monogène, groupe cyclique.
— Ordre d'un élément, théorème faible de Lagrange : l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe.
— Groupe produit.
— Groupe symétrique : rappels de MPSI

<u>Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :</u>

- Énoncer correctement l'un des thm. du programme.
- Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Donner en le justifiant le tableau de variation de la fonction Γ.
- Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
- Si f est un morphisme de groupes, $f(e) = e^{'}$ et $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
- Pour $a \in G$ d'ordre fini p (où G un groupe), $< a >= \{e, a, a^2, ..., a^{p-1}\}$ et $a^q = e \Leftrightarrow p|q$.
- Théorème faible de Lagrange (dem. dans le cas d'un groupe abélien).
- Si $ab = ba$ avec $\omega(a) \wedge \omega(b) = 1$ alors $\omega(ab) = \omega(a)\omega(b)$.
- Si G est cyclique de cardinal $n \geq 2$, et $G =< a >$. Alors pour $k \in \mathbb{Z}$, a^k est générateur de G si et seulement si $k \wedge p = 1$. (avec Bezout)
- La signature d'une transposition vaut -1.

<u>Approfondissements :</u>

- Théorème de Lagrange
- Théorème d'isomorphisme : Si $f : G \to G^{'}$ est un morphisme de groupe avec G abélien, $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $G/\mathrm{Ker}(f)$.
- Pour $k \in \mathbb{Z}$, $\omega(a^k) = \dfrac{\omega(a)}{\omega(a) \wedge k}$.
- Si H est un sous-groupe distingué de S_n contenant une transposition alors $H = S_n$.
- Toute permutation peut se décomposer en produit de transpositions.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

<u>Exercices de la banque CCINP à préparer :</u>

— (CCINP 19) 1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$.

2. Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.

— (CCINP 25) 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

— (CCINP 29) On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in\ ]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.
1. Démontrer que : $\forall\, x \in\ ]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

— (CCINP 30) 1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3.a. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
b. Résoudre (E).

— (CCINP 49) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.
On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[\,,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.
1.a. Justifier que la suite (a_n) est bornée.
b. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
2.a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
b. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

— (CCINP 50) On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.
1. Prouver que F est définie et continue sur $]0;+\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.