Colle de la semaine du 08/01

Le programme porte sur les anneaux et le début des compléments d'algèbre linéaire :

Anneaux :

— Définitions, rappels de MPSI.
— Idéaux d'un anneau commutatif, idéal principal, anneau principal, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont principaux.
— Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal, l'image réciproque d'un idéal est un idéal.
— L'intersection et la somme d'idéaux est un idéal.
— Divisibilité dans un anneau commutatif intègre, lien avec les idéaux.
— Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$, écriture du PGCD et PPCM en termes d'idéaux, théorème et relation de Bézout, éléments irréductibles.
— Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$; exemples dans $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]$.
— Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, définition, $\overline{k}$ est inversible $\Leftrightarrow$ $k \wedge n = 1$ et si $\overline{k}$ n'est pas inversible c'est un diviseur de $\overline{0}$.
— Théorème chinois : pour $m \wedge n = 1$ $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— Indicatrice d'Euler, définition, $\varphi(mn) = \varphi(n)\varphi(n) = 1$ pour $m \wedge n = 1$, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ pour p premier et calcul de $\varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
— Théorème d'Euler : si $a \wedge n = 1$, $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$, petit théorème de Fermat.
— Structure d'algèbre (unitaire), exemples de référence : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Sous-algèbres, morphismes d'algèbres.
— Algèbre engendrée par un élément α : $\mathbb{K}[\alpha]$ (hors programme si $\alpha \notin \mathcal{L}(E), \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), polynôme minimal de α, base et dimension de $\mathbb{K}[\alpha]$ si le polynôme minimal existe.

Compléments d'algèbre linéaire :

— Produit et somme d'un nombre fini d'espaces vectoriels.
— Somme directe d'espaces vectoriels, famille de projecteurs associée à une somme directe, une application linéaire peut être définie par ses restrictions aux sous-espaces vectoriels composants la somme directe.
— Cas de la dimension finie : formule de Grassman ($\dim(\sum_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$, caractérisation d'une somme directe, bases adaptées à un sous-espace vectoriel ou à une somme directe.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :

- Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal, l'image réciproque d'un idéal est un idéal.
- L'intersection et la somme d'idéaux est un idéal.
- Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé alors P' est scindé.
- Théorème chinois.
- $\overline{k}$ est inversible $\Leftrightarrow$ $k \wedge n = 1$ et si $\overline{k}$ n'est pas inversible c'est un diviseur de $\overline{0}$.
- Théorème d'Euler.
- $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ pour p premier.
- La somme de sev. est un sev.
- La dimension de l'espace somme est inférieure à la somme des dimensions.
- Caractérisation d'une somme directe avec la dimension.
- Si f est nilpotent d'indice p m.q. $\exists x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre.
- Matrices de diagonale strictement dominante : si $A = (a_{i,j})$ vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ alors A est inversible.
- Pour α dans une $\mathbb{K}$-algèbre admettant un polynôme minimal P_α de degré n, $((1, \alpha, ..., \alpha^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[\alpha]$.

Approfondissements :

- Il existe une infinité de nombres premiers de la forme $-1 + 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- Pour p premier, x est un carré dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$ alors il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.
- Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, P est scindé à racines simples $\Rightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k^2 + a_{k+1}^2 > 0$.
- Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, P est scindé $\Rightarrow \forall k \in [\![0, n-2]\!]$, $a_k a_{k+2} \leq a_{k+1}^2$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.
- Pour α dans une $\mathbb{K}$-algèbre intègre admettant un polynôme minimal P_α, P_α est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps.
- Montrer que un polynôme P de degré supérieur ou égal à 2 irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ n'admet pas de racine rationnelle.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 86) 1. Soit $(a,b,p)\in\mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p\wedge a=1$ et $p\wedge b=1$, alors $p\wedge(ab)=1$.
2. Soit p un nombre premier.
a. Prouver que $\forall k\in[\![1,p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k}k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
b. Prouver que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n^p\equiv n \mod p$.
c. En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1}\equiv 1 \mod p$.

— (CCINP 85) 1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $a\in\mathbb{R}$.
a. Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
b. Soit $r\in\mathbb{N}^*$. En déduire que :
a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a)\neq 0$ et $\forall k\in[\![0,r-1]\!]$, $P^{(k)}(a)=0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P=X^5+aX^2+bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

— (CCINP 94) 1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c\in\mathbb{N}$.
Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.
3. On considère le système (S) : $\left\{\begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array}\right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.
a. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.
b. Déduire des questions précédentes la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

— (CCINP 84) 1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n=1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n=(z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

— (CCINP 87) Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.
1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant

$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i\in[\![0,n]\!],\ P(a_i)=b_i.$$

2. Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :$\forall i\in[\![0,n]\!],\ \ b_i=\left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{si} & i\neq k \\ 1 & \text{si} & i=k \end{array}\right.$.

3. Prouver que $\forall p\in[\![0,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

— (CCINP 60) Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M)=AM$.
1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\mathrm{Ker} f\oplus \mathrm{Im} f$?

— (CCINP 64) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
1. Démontrer que : $E=\mathrm{Im} f\oplus\mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2$.
2.a. Démontrer que : $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f=\mathrm{Ker} f^2$.
b. Démontrer que : $\mathrm{Im} f=\mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E=\mathrm{Im} f\oplus\mathrm{Ker} f$.

— (CCINP 71) Soit P le plan d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équation $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$.
1. Vérifier que $\mathbb{R}^3=P\oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D et $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.