Colle de la semaine du 15/01

Le programme porte sur les compléments d'algèbre linéaire et le début du cours de réduction des endomorphismes et de matrices (la notion de polynôme caractéristique n'a pas encore été développée mais peut être utilisée pour le calcul pratique des valeurs propres) :

Compléments d'algèbre linéaire :

- Produit et somme d'un nombre fini d'espaces vectoriels.
- Somme directe d'espaces vectoriels, famille de projecteurs associée à une somme directe, une application linéaire peut être définie par ses restrictions aux sous-espaces vectoriels composants la somme directe.
- Cas de la dimension finie : formule de Grassman ($\dim(\sum_{i=1}^{n} E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$, caractérisation d'une somme directe, bases adaptées à un sous-espace vectoriel ou à une somme directe.
- Matrices définies par blocs, matrices diagonales par blocs, matrices triangulaires par blocs
- Opérations sur les matrices par blocs (addition, multiplication, transvections par blocs), déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, exemples de déterminants

Réduction :

- Sous-espaces stables par un endomorphismes, caractérisation matricielle (par blocs) ; si u et v commutent $Im(u)$ et $Ker(v)$ sont stables par v.
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, caractérisation de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs, triangulaire supérieure par blocs.
- Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée ; si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
- Toute somme finie de sev. propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe ; toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
- En dimension finie, $\lambda \in SP(u) \Leftrightarrow det(u - \lambda id) = 0$ et u admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres (puis prop. analogue avec une matrice).
- Endomorphismes diagonalisables, définition, caractérisations (E est égal à la somme directe des sous-espaces propres) et condition suffisante de diagonalisation ($\dim(E)$ valeurs propres distinctes).
- Matrices diagonalisables, exemples.
- Polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ; $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. Si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Polynôme minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice, les valeurs du polynôme minimal sont les valeurs propres.

<u>Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :</u>
- La somme de sev. est un sev.
- La dimension de l'espace somme est inférieure à la somme des dimensions.
- Caractérisation d'une somme directe avec la dimension.
- Si f est nilpotent d'indice p m.q. $\exists x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), ..., f^{p-1}(x_0))$ est libre.
- Matrices de diagonale strictement dominante : si $A = (a_{i,j})$ vérifie $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ alors A est inversible.
- Si u et v commutent $Im(u)$ et $Ker(v)$ sont stables par v.
- Toute somme finie de sev. propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe.
- u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in SP(u)} E_\lambda(u)$.
- Pour $P \in K[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E_\lambda(u)$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$ puis si P est annulateur de u, $SP(u) \subset Rac(P)$.

<u>Approfondissements :</u>
- Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n qui admet n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u est $\text{Vect}(id, u, ..., u^{n-1})$ (*on commence par montrer que cet ensemble est de dimension* n).

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 91) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

— (CCINP 73) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

— (CCINP 67) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

— (CCINP 59) Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.
1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : sans utiliser de matrice de f / en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
3. f est-il diagonalisable ?

— (CCINP 60) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.
1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

— (CCINP 64) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
1. Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
2.a. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
b. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.

— (CCINP 71) Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.
1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D et $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.