Colle de la semaine du 22/01

Le programme porte sur le cours de réduction des endomorphismes et des matrices :

- Sous-espaces stables par un endomorphismes, caractérisation matricielle (par blocs) ; si u et v commutent $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par v.
- Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, caractérisation de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs, triangulaire supérieure par blocs.
- Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée ; si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.
- Toute somme finie de sev. propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe ; toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.
- En dimension finie, $\lambda \in SP(u) \Leftrightarrow det(u - \lambda id) = 0$ et u admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres (puis prop. analogue avec une matrice).
- Endomorphismes diagonalisables, définition, caractérisations (E est égal à la somme directe des sous-espaces propres) et condition suffisante de diagonalisation ($\dim(E)$ valeurs propres distinctes).
- Matrices diagonalisables, exemples.
- Polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ; $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. Si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Polynôme minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice, les valeurs du polynôme minimal sont les valeurs propres.
- Lemme de décomposition des noyaux.
- u est diagonalisable ssi χ_u est SARS ssi π_u est SARS ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]\ \{0\}$ SARS tel que $P(u) = 0$.
- Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme, propriétés.
- Ordre de multiplicité d'une valeur propre, la dimension d'un espace propre est inférieure à la multiplicité. Une matrice A est diagonalisable ssi χ_A est scindé et la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.
- Théorème de Cayley-Hamilton
- Trigonalisation : définition et CNS de trigonalisation, u est trigonalisable ssi χ_u est scindé ssi π_u est scindé ssi il existe un polynôme scindé annulateur de u.
- Caractérisation des matrices et endomorphismes nilpotents : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, A est nilpotent ssi $\mathrm{SP}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ ssi $\chi_A = X^n$ ssi $A^n = 0$ ssi A est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale est nulle.
- Sous-espaces caractéristiques ($N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)^{m_i}$), ils sont stables, de somme directe égale à E et de dimension égale à la multiplicité.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :

- Si u et v commutent $Im(u)$ et $Ker(v)$ sont stables par v.
- Toute somme finie de sev. propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe.
- u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in SP(u)} E_\lambda(u)$.
- Pour $P \in K[X]$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E_\lambda(u)$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$ puis si P est annulateur de u, $SP(u) \subset Rac(P)$.
- Lemme de décomposition des noyaux.
- u est diagonalisable ssi χ_u est SARS ssi π_u est SARS ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]\ \{0\}$ SARS tel que $P(u) = 0$.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable, si u est diagonalisable alors u_F est diagonalisable.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \mathrm{det}(A)$.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable, $\chi_{u_F} | \chi_u$.
- La dimension d'un espace propre est inférieure à la multiplicité.
- Condition nécessaire et suffisante de trigonalisation.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable, si u est trigonalisable alors u_F est trigonalisable.
- Les trois propriétés des sous-espaces caractéristiques.
- Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Approfondissements :

- Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n qui admet n valeurs propres distinctes. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u est $\mathrm{Vect}(id, u, ..., u^{n-1})$ (*on commence par montrer que cet ensemble est de dimension* n).
- Diagonalisation simultanée pour 2 ou une famille d'endomorphismes (ou matrices) diagonalisables qui commutent deux à deux.
- Si $GL_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $GL_m(\mathbb{C})$ alors $n = m$ (application de la diagonalisation simultanée).
- Théorème de Cayley-Hamilton (matrices compagnon).
- Trigonalisation simultanée.
- Décomposition de Dunford (existence).

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 91) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

— (CCINP 73) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

— (CCINP 67) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

— (CCINP 59) Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\forall\, P \in E,\ f(P) = P - P'$.
1. Démontrer que f est bijectif de deux manières : sans utiliser de matrice de f / en utilisant une matrice de f.
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
3. f est-il diagonalisable ?

— (CCINP 62) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$: en utilisant le lemme des noyaux, sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

— (CCINP 65) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
1. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2.a. Démontrer que : $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
b. Démontrer que, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
(P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

— (CCINP 69) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.
1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

— (CCINP 70) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

— (CCINP 72) Soit n un entier naturel non nul.
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E.
1. Donner le rang de f.
2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

— (CCINP 83) Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

— (CCINP 88) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = J_n - I_n$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall\, M \in E$, $u(M) = M + \mathrm{tr}(M)A$.
1. Prouver que le polynôme $X^2 - 2X + 1$ est annulateur de u.
2. u est-il diagonalisable ?

— (CCINP 93) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.
1. Montrer que $\mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u = E$.
2.a. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
b. En déduire que $\mathrm{Im} u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.