Colle de la semaine du 29/01

Le programme porte sur le cours de réduction des endomorphismes et des matrices ainsi que sur des révisions de MPSI sur les espaces préhilbertiens réels/euclidiens :

Réduction :

— Sous-espaces stables par un endomorphismes, caractérisation matricielle (par blocs) ; si u et v commutent $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont stables par v.

— Si $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et $\mathcal{B}$ est une base adaptée à cette décomposition, caractérisation de $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs, triangulaire supérieure par blocs.

— Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée ; si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

— Toute somme finie de sev. propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est directe ; toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre.

— En dimension finie, $\lambda \in SP(u) \Leftrightarrow det(u - \lambda id) = 0$ et u admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres (puis prop. analogue avec une matrice).

— Endomorphismes diagonalisables, définition, caractérisations (E est égal à la somme directe des sous-espaces propres) et condition suffisante de diagonalisation ($\dim(E)$ valeurs propres distinctes).

— Matrices diagonalisables, exemples.

— Polynôme d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée ; $P(u)$ et $Q(u)$ commutent. Si λ est une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

— Polynôme minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice, les valeurs du polynôme minimal sont les valeurs propres.

— Lemme de décomposition des noyaux.

— u est diagonalisable ssi χ_u est SARS ssi π_u est SARS ssi $\exists P \in \mathbb{K}[X]\ \{0\}$ SARS tel que $P(u) = 0$.

— Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme, propriétés.

— Ordre de multiplicité d'une valeur propre, la dimension d'un espace propre est inférieure à la multiplicité. Une matrice A est diagonalisable ssi χ_A est scindé et la dimension des espaces propres est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

— Théorème de Cayley-Hamilton

— Trigonalisation : définition et CNS de trigonalisation, u est trigonalisable ssi χ_u est scindé ssi π_u est scindé ssi il existe un polynôme scindé annulateur de u.

— Caractérisation des matrices et endomorphismes nilpotents : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$, A est nilpotent ssi $\mathrm{SP}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ ssi $\chi_A = X^n$ ssi $A^n = 0$ ssi A est semblable à une matrice triangulaire dont la diagonale est nulle.

— Sous-espaces caractéristiques ($N_i = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i id)^{m_i}$), ils sont stables, de somme directe égale à E et de dimension égale à la multiplicité. Décomposition de Dunford (à la limite du programme).

Euclidiens/préhilbertiens réels :

— Révisions de première année : produit scalaire (exemples de références), Cauchy-Schwartz, orthogonalité, Gram-Schmidt, projection orthogonale, distance à un sev. de dimension finie.

— Pour E euclidien, $a \mapsto \varphi_a$, où $\varphi_a(x) = (x|a)$ pour tout $x \in E$, est un isomorphisme entre E et $E^\star$. Vecteur normal à un hyperplan.

— Ecritures matricielles et expressions analytiques dans une base orthonormée d'un produit scalaire de deux vecteurs, de la matrice d'un endomorphisme.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :

- Lemme de décomposition des noyaux.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable, si u est diagonalisable alors u_F est diagonalisable.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev stable, $\chi_{u_F} | \chi_u$.
- La dimension d'un espace propre est inférieure à la multiplicité.
- Les trois propriétés des sous-espaces caractéristiques.
- Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.
- Décomposition de Dunford (existence).
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

Approfondissements :

- Diagonalisation simultanée pour 2 ou une famille d'endomorphismes (ou matrices) diagonalisables qui commutent deux à deux.
- Si $GL_n(\mathbb{C})$ est isomorphe à $GL_m(\mathbb{C})$ alors $n = m$ (application de la diagonalisation simultanée).
- Théorème de Cayley-Hamilton (matrices compagnon).
- Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- "Diagonalisation à ϵ près" : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $P_\epsilon \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P_\epsilon^{-1} A P_\epsilon = T_\epsilon$ où T_ϵ est triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux étant les λ_i et les autres coefficients sont tous de module inférieur ou égal à ϵ.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $\exists (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ où A_k est semblable à A pour tout k et $A_k \to 0$.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 91) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

— (CCINP 73) On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, A)$.

— (CCINP 67) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

— (CCINP 62) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.
1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$: en utilisant le lemme des noyaux, sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

— (CCINP 65) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
1. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2.a. Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
b. Démontrer que, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
(P polynôme annulateur de u)$\Longrightarrow$ (PQ polynôme annulateur de u).
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Écrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

— (CCINP 93) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. On notera Id l'application identité sur E.
1. Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Ker}u = E$.
2.a. Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
b. En déduire que $\mathrm{Im}u = \mathrm{Ker}(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

— (CCINP 76) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
1.a. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
b. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}\right),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

— (CCINP 77) Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
a. Démontrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
b. Démontrer que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

— (CCINP 79) Soit a et b deux réels tels que a¡b.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.
2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall\,(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

— (CCINP 80) Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

— (CCINP 81) On $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $((A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B))$ et on note
$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.