Colle de la semaine du 05/02

Le programme porte sur le cours des espaces euclidiens :

— Pour E euclidien, $a \mapsto \varphi_a$, où $\varphi_a(x) = (x|a)$ pour tout $x \in E$, est un isomorphisme entre E et $E^\star$. Vecteur normal à un hyperplan.
— Ecritures matricielles et expressions analytiques dans une base orthonormée d'un produit scalaire de deux vecteurs, de la matrice d'un endomorphisme.
— Adjoint d'un endomorphisme, F est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par u^*, $\text{Ker}(u) = (\text{Im}(u))^\perp$, $\text{Im}u^* = (\text{Ker}u)^\perp$ et $u^{**} = u$.
— Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N., $Mat_\mathcal{B}(u^*) = Mat_\mathcal{B}(u)^T$; $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
— Isométries vectorielles : définition, caractérisations (conserve le produit scalaire, envoie une B.O.N. sur une B.O.N., $u \circ u^* = id$).
— Propriétés des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est un groupe, déterminant et spectre d'une isométrie, si F est stable par une isométrie $F^\perp$ est aussi stable.
— Symétries orthogonales : définition, caractérisation par être une symétrie et une isométrie, réflexions
— Matrices orthogonales : définition, caractérisations (les vecteurs colonne/ligne forment une B.O.N., $A^T A = I_n$, $AA^T = I_n$).
— Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, f est une isométrie ssi la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.
— Déterminant, spectre réel, spectre complexe d'une matrice orthogonale.
— Changement de base orthonormale, orientation.
— Isométries d'un plan euclidien orienté : description de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (rotations) et $\mathcal{O}_2 \backslash \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (réflexions), toute rotation de E peut s'écrire comme le produit de deux réflexions.
— Tout endomorphisme de E admet une droite stable ou un plan stable. Réduction d'une isométrie en B.O.N. : pour $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe $\mathcal{B}$ une B.O.N. de E telle que $Mat_\mathcal{B}(u) = \text{diag}(I_r, -I_s, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_p})$.
— Cas particulier des isométries directes en dimension 3.(rotations)
— Endomorphismes autoadjoints/symétriques : définition, caractérisation par sa matrice dans une B.O.N. ; pour f symétrique et F stable par F alors $F^\perp$ est stable par f et l'endomorphisme induit sur F est symétrique.
— Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints, les symétries orthogonales sont les symétries autoadjointes.
— Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $SP_\mathbb{C}(A) \subset \mathbb{R}$ et $SP(A) \neq \emptyset$. Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux 2 à 2.
— Théorème spectral : Si f est symétrique, il existe une B.O.N. de E formée de vecteurs propres de f. Interprétation matricielle.
— Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs ; matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation à l'aide du spectre.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :
- F est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par u^* et $u^{**} = u$.
- Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N., $Mat_\mathcal{B}(u^*) = Mat_\mathcal{B}(u)^T$.
- Déterminant et spectre d'une isométrie, spectre complexe d'une matrice orthogonale.
- Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints ou les symétries orthogonales sont les symétries autoadjointes.
- Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \in \mathcal{O}(E)$ ssi $Mat_\mathcal{B}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.
- Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $SP_\mathbb{C}(A) \subset \mathbb{R}$.
- Théorème spectral.

Approfondissements :
- Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, il existe un produit scalaire sur E tel que $G \subset \mathcal{O}(E)$ (pour ce produit scalaire).
- Une isométrie de E est la composée de p réflexions (avec $p \leq \dim(E)$).
- Déterminer les matrices orthogonales à coefficients positifs (ce sont les matrices de permutation).
- Pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}| \leq n$.
- Tout endomorphisme de E ($\mathbb{R}$-ev.) admet une droite stable ou un plan stable.
- $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
- Soit G un sous-groupe fini de de $SL(\mathbb{R}^2)$, montrer que G est cyclique. (utilise le 1er point des approfondissements)

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 63) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
i. $u \circ u^* = u^* \circ u$. ii. $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$. iii. $\forall x \in E,\ ||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

— (CCINP 66) 1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R}),\ A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R}),\ \forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R}),\ AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

— (CCINP 68) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
a. sans calcul,
b. en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
c. en utilisant le rang de la matrice,
d. en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

— (CCINP 78) Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. $||.||$ est la norme euclidienne associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
a. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
b. Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

— (CCINP 82) Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.
Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A \mid A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.
1. Démontrer que $(\,.\,|\,.\,)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

— (CCINP 92) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A,B) \in E^2,\ \langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.
1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
a. Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
b. Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E. Déterminer $F^\perp$.

— (CCINP 76) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall\, x \in E,\ ||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
1.a. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
b. Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.
2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$. Prouver que l'ensemble
$\left\{ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

— (CCINP 77) Soit E un espace euclidien.
1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que $\left(A^\perp\right)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
a. Démontrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
b. Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

— (CCINP 79) Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow h = 0$.

2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall\,(f, g) \in E^2$, $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}\mathrm{d}x$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

— (CCINP 80) Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$. Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

— (CCINP 81) On $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($(A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$) et on note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^{\perp}$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^{\perp}$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.