Colle de la semaine du 26/02

Le programme porte sur le cours des espaces euclidiens, les familles sommables (révisions de MPSI) et les espaces de probabilité :

Espaces euclidiens :

— Pour E euclidien, $a \mapsto \varphi_a$, où $\varphi_a(x) = (x|a)$ pour tout $x \in E$, est un isomorphisme entre E et $E^\star$. Vecteur normal à un hyperplan.
— Ecritures matricielles et expressions analytiques dans une base orthonormée d'un produit scalaire de deux vecteurs, de la matrice d'un endomorphisme.
— Adjoint d'un endomorphisme, F est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par u^*, $\text{Ker}(u) = (\text{Im}(u))^\perp$, $\text{Im}u^* = (\text{Ker}u)^\perp$ et $u^{**} = u$.
— Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N., $Mat_\mathcal{B}(u^*) = Mat_\mathcal{B}(u)^T$; $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
— Isométries vectorielles : définition, caractérisations (conserve le produit scalaire, envoie une B.O.N. sur une B.O.N., $u \circ u^* = id$).
— Propriétés des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est un groupe, déterminant et spectre d'une isométrie, si F est stable par une isométrie $F^\perp$ est aussi stable.
— Symétries orthogonales : définition, caractérisation par être une symétrie et une isométrie, réflexions
— Matrices orthogonales : définition, caractérisations (les vecteurs colonne/ligne forment une B.O.N., $A^TA = I_n$, $AA^T = I_n$).
— Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, f est une isométrie ssi la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.
— Déterminant, spectre réel, spectre complexe d'une matrice orthogonale.
— Changement de base orthonormale, orientation.
— Isométries d'un plan euclidien orienté : description de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (rotations) et $\mathcal{O}_2 \backslash \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (réflexions), toute rotation de E peut s'écrire comme le produit de deux réflexions.
— Tout endomorphisme de E admet une droite stable ou un plan stable. Réduction d'une isométrie en B.O.N. : pour $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe $\mathcal{B}$ une B.O.N. de E telle que $Mat_\mathcal{B}(u) = \text{diag}(I_r, -I_s, R_{\theta_1}, ..., R_{\theta_p})$.
— Cas particulier des isométries directes en dimension 3.(rotations)
— Endomorphismes autoadjoints/symétriques : définition, caractérisation par sa matrice dans une B.O.N. ; pour f symétrique et F stable par F alors $F^\perp$ est stable par f et l'endomorphisme induit sur F est symétrique.
— Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints, les symétries orthogonales sont les symétries autoadjointes.
— Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $SP_\mathbb{C}(A) \subset \mathbb{R}$ et $SP(A) \neq \emptyset$. Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux 2 à 2.
— Théorème spectral : Si f est symétrique, il existe une B.O.N. de E formée de vecteurs propres de f. Interprétation matricielle.
— Endomorphismes symétriques positifs, définis positifs ; matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation à l'aide du spectre. compléments hors programme : racine carrée d'un endomorphisme (ou matrice) symétrique positif, décomposition polaire d'une matrice symétrique définie positive.

Espaces de probabilité :

— Tribu sur un ensemble, évènements, système complet d'évènements (et quasi-complet d'évènements)
— Probabilité, propriétés usuelles d'une probabilité dont le théorème de continuité monotone.
— Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
— Indépendance de deux évènements, indépendance mutuelle d'une famille d'évènements.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :

- F est stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par u^* et $u^{**} = u$.
- Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N., $Mat_\mathcal{B}(u^*) = Mat_\mathcal{B}(u)^T$.
- Déterminant et spectre d'une isométrie, spectre complexe d'une matrice orthogonale.
- Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints ou les symétries orthogonales sont les symétries autoadjointes.
- Si $\mathcal{B}$ est une B.O.N. de E et $f \in \mathcal{L}(E)$, $f \in \mathcal{O}(E)$ ssi $Mat_\mathcal{B}(f) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact.
- Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $SP_\mathbb{C}(A) \subset \mathbb{R}$.
- Théorème spectral.
- Racine carré d'un endomorphisme (ou matrice) symétrique positif (au moins l'existence)
- Propriété de continuité croissante (et décroissante) d'une probabilité.

Approfondissements :

- Soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$, il existe un produit scalaire sur E tel que $G \subset \mathcal{O}(E)$ (pour ce produit scalaire).
- Une isométrie de E est la composée de p réflexions (avec $p \leq \dim(E)$).
- Déterminer les matrices orthogonales à coefficients positifs (ce sont les matrices de permutation).

- Pour $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $|\sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j}| \le n$.
- Tout endomorphisme de E ($\mathbb{R}$-ev.) admet une droite stable ou un plan stable.
- $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
- Soit G un sous-groupe fini de de $SL(\mathbb{R}^2)$, montrer que G est cyclique. (utilise le 1er point des approfondissements)
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A||| = \sqrt{\rho(A^T A)}$ puis l'application qui à une matrice symétrique positive associe sa racine carrée est continue.
- Décomposition polaire d'une matrice symétrique définie positive.
- 1er lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements tq $\sum P(A_n)$ converge alors $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\ge n} A_k) = 0$.
- 2ème lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants tq $\sum P(A_n)$ diverge alors $P(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\ge n} A_k) = 1$.
- Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes. Le support de la famille est au plus dénombrable.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 63) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$. On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.
1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
i. $u \circ u^* = u^* \circ u$. ii. $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$. iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

— (CCINP 66) 1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

— (CCINP 68) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 1. Démontrer que A est diagonalisable de quatre manières :
a. sans calcul,
b. en calculant directement le déterminant $\det(\lambda \mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
c. en utilisant le rang de la matrice,
d. en calculant A^2.
2. On suppose que A est la matrice d'un endomorphisme u d'un espace euclidien dans une base orthonormée. Trouver une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale.

— (CCINP 78) Soit E un espace euclidien de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. $||.||$ est la norme euclidienne associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
1. Soit u un endomorphisme de E, tel que : $\forall x \in E, ||u(x)|| = ||x||$.
a. Démontrer que : $\forall (x,y) \in E^2$ $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
b. Démontrer que u est bijectif.
2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E.
Prouver que : $u \in \mathcal{O}(E) \iff (u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

— (CCINP 105) 1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements. 2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
a. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
c. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

— (CCINP 112) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
1. Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$. 3. Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

— (CCINP 101) Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :
On note A_n l'événement «l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note B_n l'événement «l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.
1.a. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
b. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
a. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
b. Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
c. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé)
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

— (CCINP 107) On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.
1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.