Colle de la semaine du 04/03

Le programme porte sur les familles sommables (MPSI), les espaces de probabilité et une partie du cours de variables aléatoires discrètes :

Espaces de probabilité :
- Tribu sur un ensemble, évènements, système complet d'évènements (et quasi-complet d'évènements)
- Probabilité, propriétés usuelles d'une probabilité dont le théorème de continuité monotone.
- Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
- Indépendance de deux évènements, indépendance mutuelle d'une famille d'évènements.

Variables aléatoires discrètes :
- Définition d'une v.a. discrète, loi d'une v.a. discrète, une fonction d'une v.a. discrète est encore une v.a. discrète.
- Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.
- Approximation d'une loi binomiale de grande taille et petit paramètre par une loi de Poisson.
- Couples de v.a. discrètes, loi d'un couple, lois marginales. Lois conditionnelles.
- Indépendance de 2 v.a. discrètes, indépendance mutuelle d'un nombre fini de v.a. discrètes, indépendance mutuelle d'une suite de v.a. discrètes.
- Transfert d'indépendance, lemme des coalitions.
- Espérance d'une v.a. réelle ou complexe discrète (pour une v.a. positive l'espérance peut valoir $+\infty$), espérance pour les lois usuelles.
- Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n)$.
- Théorème de transfert ; linéarité, positivité, croissance.
- Si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.
- X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
- Moment d'ordre p, espace vectoriel L^p des v.a. admettant un moment d'ordre p, pour $p \leq n$, $L^n \subset L^p$.
- Pour $(X, Y) \in L^2$, $XY \in L^1$.
- Variance d'une v.a. réelle discrète, formule de Koenig-Huygens.
- Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev, de Cauchy-Schwartz.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :
- Propriété de continuité croissante (et décroissante) d'une probabilité.
- Si $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda$ alors $P(X_n = k) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
- Lois usuelles : définition, calcul des espérances et des variances.
- L^p est un espace vectoriel (savoir redémontrer l'inégalité $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$).
- Pour $p \leq n$, si X admet un moment d'ordre n alors X admet un moment d'ordre p.
- Pour $(X, Y) \in L^2$, $XY \in L^1$.
- Inégalité de Markov puis inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Inégalité de Cauchy-Schwartz : $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$ (pour $X \in L^2$ et $Y \in L^2$).
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, montrer que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ (sans les fonctions génératrices).

Approfondissements :
- 1er lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements tq $\sum P(A_n)$ converge alors $P(\cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} A_k) = 0$.
- 2ème lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants tq $\sum P(A_n)$ diverge alors $P(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k) = 1$.
- Soit (X_n) une suite de v.a.d., X une v.a.d. et $Y \in L^2$ telles que $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$, $|X_n| \leq Y$, $|X| \leq Y$ et $\forall \epsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n - X) = 0$.
- Inégalité de Kolmogorov : Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a.d. indépendantes centrées dans L^2, on note $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Alors : $\forall x > 0$, $P(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| > x) \leq \frac{V(S_n)}{x^2}$.
- Compléments convexité (une prop. au choix) : pour $\mathring{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, f est dérivable à gauche et à droite sur $\mathring{I}$ et continue sur $\mathring{I}$, $\forall x \in \mathring{I}$, $f(x) = \sup_{t\in\mathring{I}} f_g'(t)(x-t) + f(t)$ (idem avec f_d') et pour $X \in L^1$ avec $X(\omega) \subset I$ on a $f(E(X)) \leq E(f(X))$ (inégalité Jensen, dem. avec I ouvert).

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 95) Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
a. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
b. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
a. Déterminer la loi de X.
b. Déterminer la loi de Y.

— (CCINP 98) Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
b. Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
c. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

— (CCINP 97) Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :
$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y)=(j,k)\right) = \dfrac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$.
1.Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

— (CCINP 100) Soit $\lambda \in]0,+\infty[$ et X une v.a.d. telle que $X(\omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.
1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

— (CCINP 102) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.
1. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$
a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y>n)$. En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y=n)$.
b. Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

— (CCINP 103) Soit $p \in]0,1]$. Soit $\lambda \in]0,+\infty[$. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=m)$ est une loi binomiale de paramètre (m,p). Déterminer la loi de X.

— (CCINP 112) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
1. Déterminer le nombre a de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre b de couples $(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre c de triplets $(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

— (CCINP 101) Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t=0$, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :
On note A_n l'événement ≪l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet≫.
On note B_n l'événement ≪l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet≫.

On note C_n l'événement «l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet».
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.
1.a. Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
b. Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
a. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
b. Prouver que $-\dfrac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
c. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé)
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

— (CCINP 107) On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.
1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.