Colle de la semaine du 11/03

Le programme porte sur les variables aléatoires discrètes et sur le début du calcul différentiel :

Variables aléatoires discrètes :

— Définition d'une v.a. discrète, loi d'une v.a. discrète, une fonction d'une v.a. discrète est encore une v.a. discrète.
— Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.
— Approximation d'une loi binomiale de grande taille et petit paramètre par une loi de Poisson.
— Couples de v.a. discrètes, loi d'un couple, lois marginales. Lois conditionnelles.
— Indépendance de 2 v.a. discrètes, indépendance mutuelle d'un nombre fini de v.a. discrètes, indépendance mutuelle d'une suite de v.a. discrètes.
— Transfert d'indépendance, lemme des coalitions.
— Espérance d'une v.a. réelle ou complexe discrète (pour une v.a. positive l'espérance peut valoir $+\infty$), espérance pour les lois usuelles.
— Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $E(X) = \sum_{n \geq 0} P(X > n)$.
— Théorème de transfert ; linéarité, positivité, croissance.
— Si $|X| \leq Y$ et Y est d'espérance finie alors X est d'espérance finie.
— X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
— Moment d'ordre p, espace vectoriel L^p des v.a. admettant un moment d'ordre p, pour $p \leq n$, $L^n \subset L^p$.
— Pour $(X, Y) \in L^2$, $XY \in L^1$.
— Variance d'une v.a. réelle discrète, formule de Koenig-Huygens.
— Inégalité de Markov, de Bienaymé-Tchebychev, de Cauchy-Schwartz.
— Covariance de v.a. réelles.
— Lois faibles des grands nombres.
— Fonction génératrice de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice caractérise la loi, $X \in L^1 \Leftrightarrow G_X$ est dérivable en 1 et $X \in L^2 \Leftrightarrow G_X$ est 2 fois dérivable en 1. Fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.

Calcul différentiel :

— Notion de différentielle pour une application d'un ouvert d'un ev. F de dim. finie vers un autre ev. de dim. finie.
— Si f est différentiable en a alors f est continue en a, la différentielle est unique, différentielle d'une combinaison linéaire, d'une application p-linéaire de p fonction différentiables et différentielle d'une fonction à valeurs dans un espace produit.Différentielle d'une composée de deux fonctions, dérivation le long d'un arc.
— Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, lien avec la différentielle.

<u>Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :</u>

- Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.
- Lois usuelles : définition, calcul des espérances et des variances. (éventuellement avec fonction génératrice)
- Pour $p \leq n$, si X admet un moment d'ordre n alors X admet un moment d'ordre p.
- Pour $(X, Y) \in L^2$, $XY \in L^1$.
- Inégalité de Markov puis inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Inégalité de Cauchy-Schwartz : $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}$ (pour $X \in L^2$ et $Y \in L^2$).
- Loi faible des grands nombres.
- G_X est définie, continue sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
- Formule de Wald : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a.d. i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et N v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendante des X_n, si $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ alors $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ sur $[0, 1]$.
- Différentielle de l'application déterminant.

<u>Approfondissements :</u>

- Soit (X_n) une suite de v.a.d., X une v.a.d. et $Y \in L^2$ telles que $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$, $|X_n| \leq Y$, $|X| \leq Y$ et $\forall \epsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n - X) = 0$.
- $X \in L^1 \Leftrightarrow G_X$ est dérivable en 1.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 96) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n$. La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E[t^X] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.
1. Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
2. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer que $\forall t \in]-1, 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$:
a. en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
b. en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E[t^X]$.
3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés.
Déterminer $G_{S_n}(t)$, pour $t \in]-1, 1[$, puis en déduire la loi de S_n.

— (CCINP 99) 1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi et et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n \in L^2$. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.
Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application :** On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$?

— (CCINP 104) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent toutes se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
1. Préciser les valeurs prises par X.
2.a. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
b. Finir de déterminer la loi de probabilité de X.
3.a. Calculer $E(X)$.
b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

— (CCINP 106) X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = P(Y = k) = pq^k$ où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$. 1. Déterminer la loi du couple (U, V).
2. Déterminer la loi marginale de U.
On admet que $V(\Omega) = \mathbb{N}$ et que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P(V = n) = pq^{2n}(1 + q)$.
3. Prouver que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.
4. U et V sont-elles indépendantes ?

— (CCINP 109) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

— (CCINP 110) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
1. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t. On note R_X son rayon de convergence.
a. Prouver que $R_X \geqslant 1$. On pose $G_X(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X.
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$ puis exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance pour tout t dans $[-1, 1]$.
b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2.a. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.
b. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

— (CCINP 111) On admet, dans cet exercice, que :

$\forall\, q \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]-1,1[,\ \sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et que $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et, X et Y, deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall\,(k,n) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2.a. Déterminer la loi de Y.
b. Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
c. Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

— (CCINP 58) 1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Donner la définition de «f différentiable en a».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|,$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On pose : $\forall (x,y) \in E\times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
a. Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\ \forall\,(x,y) \in E\times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
b. Montrer que B est différentiable sur $E\times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.