Colle de la semaine du 18/03

Le programme porte sur le calcul différentiel (la fin de l'optimisation sera vue lundi) :

Calcul différentiel :

- Notion de différentielle pour une application d'un ouvert d'un ev. F de dim. finie vers un autre ev. de dim. finie.
- Si f est différentiable en a alors f est continue en a, la différentielle est unique, différentielle d'une combinaison linéaire, d'une application p-linéaire de p fonction différentiables et différentielle d'une fonction à valeurs dans un espace produit.Différentielle d'une composée de deux fonctions, dérivation le long d'un arc.
- Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, lien avec la différentielle.
- Matrice jacobienne, gradient.
- Dérivation en chaîne.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: les dérivées partielles existent et sont continues. Une fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f est différentiable en tout point de Ω et l'application différentielle df est continue sur Ω.
- Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^1$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Inégalité des accroissements finis, caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs.
- Vecteurs tangents à une partie X (notation : T_aX pour l'ensemble des vecteurs tangents à X au point a). Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $X = f^{-1}(\{0\})$, pour $a \in X$ tel que $df(a) \neq 0$ on a $T_aX = \ker df(a)$.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwartz. Matrice Hessienne ($H_f(a)$). DL à l'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
- Extremum (local, global). Point critique.
- Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $a \in \Omega$ et f admet un extremum local en a alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si c'est un minimum et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si c'est un maximum.
- Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$ est un point critique de f alors :
  - si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,$f$ admet un min. local en a.
  - si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, f admet un max. local en a.
- Optimisation sous contrainte : pour $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $X = g^{-1}(\{0\})$, si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $dg(a \neq 0$ alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$.
- Exemples d'équations aux dérivées partielles.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :
- Si f est différentiable en a alors f est continue en a.
- Différentielle de l'application déterminant.
- Différentielle de l'application norme associée à un produit scalaire sur un espace euclidien.
- Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de R.C.V. $R > 0$ et $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x + iy)^n$ avec $(x, y) \in D(0, R)$. Montrer que f est de Classe $\mathcal{C}^1$ sur $D(0, R)$.
- Inégalité des accroissements finis (en démontrant l'expression intégrale de $f(b) - f(a)$).
- Pour $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{A}$ avec f différentiable en a, si f admet un extremum local en a alors $df(a) = 0$.
- Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{||x|| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors f admet un minimum (global).

Approfondissements :
- Expression du laplacien en coordonnées polaires.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors f est différentiable et l'application différentielle est continue.
- Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ admet un D.L. à l'ordre 2.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 52) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2.a. Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
b. Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
a. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
b. Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

— (CCINP 41)(*sera traité en cours lundi*) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x,y) \mapsto 4x^2+12xy-y^2$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 13\}$.
1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.
2. Soit $(u,v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
a. Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
$(S)\ :\ \begin{cases} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{cases}$
b. Montrer que $(\lambda-4)(\lambda+1)-36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ. 3. Déterminer les valeurs possibles de (u,v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

— (CCINP 56) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3+6xy-3y^2+2$.
1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$. Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

— (CCINP 57) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
1.a. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
b. Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
a. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

— (CCINP 58) 1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \longrightarrow F$ une application. Donner la définition de «f différentiable en a».
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.
On pose : $\forall x \in E,\ \|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, où $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On pose : $\forall (x,y) \in E \times E,\ \|(x,y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$.
Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur E.
a. Prouver que $\exists\, C \in \mathbb{R}^+ /\, \forall\, (x,y) \in E \times E,\ |B(x,y)| \leqslant C\|x\|_\infty \|y\|_\infty$.
b. Montrer que B est différentiable sur $E \times E$ et déterminer sa différentielle en tout $(u_0, v_0) \in E \times E$.

— (CCINP 1) 1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

— (CCINP 39) On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.
1.a. Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.
b. Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.
On pose $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$ et on admet que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur l^2. On muni l^2 de ce produit scalaire et la norme euclidienne associée est notée $||\ ||$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$. Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes. Déterminer $F^\perp$ puis comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.