# Colle de la semaine du 25/03

Le programme porte sur le calcul différentiel, les exponentielles d'endomorphismes et de matrices et les équations différentielles scalaires d'ordre 1 (révisions de MPSI) :

**Calcul différentiel :**

- Notion de différentielle pour une application d'un ouvert d'un ev. $F$ de dim. finie vers un autre ev. de dim. finie.
- Si $f$ est différentiable en $a$ alors $f$ est continue en $a$, la différentielle est unique, différentielle d'une combinaison linéaire, d'une application $p$-linéaire de $p$ fonction différentiables et différentielle d'une fonction à valeurs dans un espace produit.Différentielle d'une composée de deux fonctions, dérivation le long d'un arc.
- Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, lien avec la différentielle.
- Matrice jacobienne, gradient.
- Dérivation en chaîne.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ : les dérivées partielles existent et sont continues. Une fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $f$ est différentiable en tout point de $\Omega$ et l'application différentielle $df$ est continue sur $\Omega$.
- Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^1$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Inégalité des accroissements finis, caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe par arcs.
- Vecteurs tangents à une partie X (notation : $T_aX$ pour l'ensemble des vecteurs tangents à $X$ au point $a$). Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $X = f^{-1}(\{0\})$, pour $a \in X$ tel que $df(a) \neq 0$ on a $T_aX = \ker df(a)$.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Théorème de Schwartz. Matrice Hessienne ($H_f(a)$). DL à l'ordre 2 d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
- Extremum (local, global). Point critique.
- Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $a \in \Omega$ et $f$ admet un extremum local en $a$ alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si c'est un minimum et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si c'est un maximum.
- Si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$ est un point critique de $f$ alors :
  - si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,$f$ admet un min. local en $a$.
  - si $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $f$ admet un max. local en $a$.
- Optimisation sous contrainte : pour $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $X = g^{-1}(\{0\})$, si $f_{|X}$ admet un extremum local en $a \in X$ et si $dg(a \neq 0$ alors $df(a)$ est colinéaire à $dg(a)$.
- Exemples d'équations aux dérivées partielles.

**Exponentielle d'un endomorphisme ou d'une matrice :**

- Pour $\sum a_n z^n$ de R.C.V. $R > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E$ de dim. finie) tel que $|||u||| < R$, la série $\sum a_k u^k$ converge absolument et $\begin{array}{llll} \varphi : & B(0,R) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & u & \longrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k \end{array}$ est continue.
- Définition de l'exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
- $e^{u+v} = e^u e^v$ si $u$ et $v$ commutent.
- $f : t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{'}(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
- Si $A$ est diagonalisable alors $e^A$ est diagonalisable.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

**Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 :**

- Structure de l'ensemble des solutions, théorème de Cauchy
- Exemples d'équations non normalisées. Lemme de Gronwall (hors programme).

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :

- Si $f$ est différentiable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.
- Différentielle de l'application déterminant.
- Différentielle de l'application norme associée à un produit scalaire sur un espace euclidien.
- Inégalité des accroissements finis (en démontrant l'expression intégrale de $f(b) - f(a)$).
- Pour $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{A}$ avec $f$ différentiable en $a$, si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $df(a) = 0$.
- Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f(x) \underset{||x|| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $f$ admet un minimum (global).
- Expression du laplacien en coordonnées polaires.
- Détermination de la solution générale au problème de Cauchy (pour une EDL scalaire d'ordre 1).
- $f : t \mapsto e^{tA}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{'}(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.
- Pour $\sum a_n z^n$ de R.C.V. $R > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E$ de dim. finie) tel que $|||u||| < R$, la série $\sum a_k u^k$ converge absolument et $\begin{array}{llll} \varphi : & B(0,R) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & u & \longrightarrow & \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k \end{array}$ est continue.

Approfondissements :
- Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ admet un D.L. à l'ordre 2.
- Lemme de Gronwall : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $(u,v) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+)^2$ tel que, $\exists C \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leq C + \int_a^x u(t)v(t)\,dt$ alors $\forall x \in [a,b]$, $u(x) \leq Cexp(\int_a^x v(t)\,dt)$.
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $f+f' \underset{+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \underset{+\infty}{\to} l$.
- $e^{u+v} = e^u e^v$ si $u$ et $v$ commutent.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si $e^A$ est diagonalisable alors $A$ est diagonalisable (avec la décomposition de Dunford).

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 33) On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.
1. Démontrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que $f$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. $f$ est-elle de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

— (CCINP 41) Soit $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f : (x,y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 = 13\}$.
1. Justifier que $f$ atteint un maximum et un minimum sur $C$.
2. Soit $(u,v) \in C$ un point où $f$ atteint un de ses extremums.
a. Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel $\lambda$ tel que le système $(S)$ suivant soit vérifié :
$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lll} 4u & +6v & = \lambda u \\ 6u & -v & = \lambda v \end{array}\right.$$
b. Montrer que $(\lambda-4)(\lambda+1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de $\lambda$. 3. Déterminer les valeurs possibles de $(u,v)$, puis donner le maximum et le minimum de $f$ sur $C$.

— (CCINP 56) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
1. $f$ admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$ ? Si oui, les déterminer.
2. $f$ admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.
3. On pose $K = [0,1] \times [0,1]$. Justifier, oralement, que $f$ admet un maximum global sur $K$ puis le déterminer.

— (CCINP 57) Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
1.a. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de $f$ en $(0,0)$.
b. Donner la définition de « $f$ différentiable en $(0,0)$ ».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$
a. Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
b. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

— (CCINP 42) On considère les deux équations différentielles : $2xy' - 3y = 0$ $(H)$ et $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ $(E)$.
1. Résoudre l'équation $(H)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation $(E)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. L'équation $(E)$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$ ?

— (CCINP 1) 1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
Démontrer que $u_n$ et $v_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \text{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

— (CCINP 4) 1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in ]a,b[$. On suppose que $f$ est continue sur $[a,b]$ et que $f$ est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
Démontrer que, si $f'$ admet une limite finie en $x_0$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : ( $f$ est dérivable en $x_0$) $\Longrightarrow$ ($f'$ admet une limite finie en $x_0$) est fausse.
**Indication** : on pourra considérer la fonction $g$ définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.