Colle de la semaine du 01/04 (programme vituel)

Le programme porte sur les équations différentielles linéaires :

Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 :

- Structure de l'ensemble des solutions, théorème de Cauchy.
- Exemples d'équations non normalisées. Lemme de Gronwall (hors programme).

Equations différentielles linéaires d'ordre 1 :

- Formulation intégrale, structure de l'ensemble des solutions, théorème de Cauchy.
- Wronskien et méthode de variation des constantes (hors programme dans ce cadre général).
- Systèmes différentiels à coefficients constants : $X^{'} = AX$, système fondamental de solutions lorsque A est diagonalisable.

Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre n :

- Mise sous forme d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, structure de l'ensemble des solutions, théorème de Cauchy.
- Pour $n = 2$: wronskien de deux solutions, méthode de variations des constantes.

<u>Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :</u>

- Résolution de $X^{'} = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: trouver les solutions <u>réelles</u>.

- Pour $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable, montrer que l'équation $y^{''} + q(x)y = 0$ admet des solutions non bornées (par l'absurde en utilisant le wronskien).

<u>Approfondissements :</u>

- Lemme de Gronwall : Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $(u, v) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+)^2$ tel que, $\exists C \geq 0,\ \forall x \in [a, b],\ \ u(x) \leq C + \int_a^x u(t)v(t)\ dt$ alors $\forall x \in [a, b],\ \ u(x) \leq Cexp(\int_a^x v(t)\ dt)$.
- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f + f^{'} \underset{+\infty}{\rightarrow} l \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \underset{+\infty}{\rightarrow} l$.
- Preuve du théorème de Cauchy pour les équations/système différentielles linéaires d'ordre 1 (existence et unicité).
- Montrer que les solutions de $X^{'} = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sont bornées sur $\mathbb{R}$ ssi A est diagonalisable et $Sp(A) \subset i\mathbb{R}$.
- Montrer que les solutions de $X^{'} = AX$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tendent vers 0 en $+\infty$ ssi $\forall \lambda \in Sp(A),\ \mathrm{Re}(\lambda) < 0$.
- Les zéros d'une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 (normalisée) sont isolés et il y en a un nombre fini dans tout segment.
- Calcul du wronskien pour un système différentiel linéaire d'ordre 1.

<u>Exercices de la banque CCINP à préparer :</u> les numéros 31, 32, 42, 74 et 75.