REVUE DE LA FILIÈRE
MATHÉMATIQUES
RMS

Exercices étoilés des oraux 2024

Vous trouverez ci-dessous deux types d'exercices étoilés. Les exercices munis d'une étoile sont réservés aux étudiants, qui y trouveront des questions pas nécessairement plus faciles que celles des exercices doublement étoilés, mais qui ne font appel qu'à peu de connaissances. Les exercices avec deux étoiles sont, comme d'habitude, ouverts à tous.

Selon la tradition, le comité publiera prioritairement les solutions proposées par les lecteurs, qu'elle souhaite très nombreux.

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, André Chambrillon, Philippe Chateaux, Denis Choimet, Dimitri Cocheril-Crèvecoeur, Yves Dutrieux, Alexis Fagebaume, Serge Francinou, Cyril Germain, Hervé Gianella, Gil Guibert, Max Hochart, Denis Jourdan, Romain Krust, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, Roger Mansuy, François Moulin, Jean Nougayrède, Renaud Palisse, Philippe Patte, Mickaël Prost, Marc Rezzouk, Eddy Routin, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 7 février 2025, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com*.

Écoles Normales Supérieures – MP – MPI

3. [PLSR] ★ On étend de façon naturelle la valuation 2-adique v_2 à $\mathbb{Q}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculer $v_2(H_n)$.

4. ★ Soit $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, avec p premier supérieur ou égal à 5, m et p premiers entre eux.
a) Montrer que $\dbinom{np}{m} \equiv 0\,[p]$.
b) Montrer que $\dbinom{np}{mp} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p(n-1)}{mp-k}\binom{p}{k}$.
c) Montrer que $\dbinom{np}{mp} \equiv \dbinom{n}{m}\,[p^2]$.
L'objectif de la suite est de montrer $\dbinom{2p}{p} \equiv 2\,[p^3]$.
d) Montrer que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\dbinom{p-1}{k-1} \equiv \pm 1\,[p]$.
e) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^2 \equiv 0\,[p]$.
f) Conclure.

6. [L] ★★ On considère l'équation $2^a + 3^b = 5^c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.
a) Résoudre l'équation dans le cas $a = b = c$.
b) Traiter le cas b impair.
c) Traiter le cas c impair.
d) Traiter le cas général.

10. [PLSR] ★ ***a)*** Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont cycliques.
b) Alice et Barbara jouent à un jeu. Elles choisissent à tour de rôle un élément de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans remise qu'elles ajoutent à un ensemble S. Le jeu s'arrête quand S engendre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et la joueuse ayant tiré le dernier numéro perd. Selon n, y a-t-il une stratégie gagnante pour la première joueuse ?
c) Même question avec le groupe $\mathcal{S}_n$.

13. [P] ★ Soient G un groupe, A une partie finie non vide de G. Montrer que $|A| = |AA|$ si et seulement si $A = xH$ avec $x \in G$ et H sous-groupe de G tel que $x^{-1}Hx = H$.

18. [PLSR] ★ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{F}_3)$. On admet que $A^{13} = -I_3$.
a) Quels calculs auriez-vous fait pour justifier que $A^{13} = -I_3$?
b) Montrer que $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ et que A est d'ordre 26 dans ce groupe.
c) On note G le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A, et on pose $V = G \cup \{0\}$. Montrer que $V = \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2)$.
d) On pose $W = \mathrm{Vect}(I_3, A)$. Montrer que, pour tout $M \in G$, il existe $N, P \in W \setminus \{0\}$ telles que $M = P^{-1}N$.

e) On note H le sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_3)$ engendré par A^2. Montrer que H est isomorphe à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, puis que $|H \cap W| = 4$.

19. [L] $\star$ ***a)*** Montrer que toute rotation du plan complexe est composée de deux symétries orthogonales par rapport à des droites.
b) Montrer que toute permutation d'un ensemble fini non vide X est produit de deux éléments d'ordre au plus 2 du groupe des permutations de X.
c) Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si X est infini ?

22. [L] $\star$ Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \in [1/C, C]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_{k,n})$, où l'on a noté $x_{k,n}$ les racines complexes de P_n.
a) Montrer que $\{x_{k,n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![1, n]\!]\}$ est borné.
b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k,n}^2 = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n}{a_n^2}$ pour tout $n \geqslant 2$.
c) Montrer que, pour n suffisamment grand, P_n n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

25. [PLSR] $\star$ Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ non tous constants et premiers entre eux deux à deux.
a) On veut montrer que si $A+B = C$ alors $\max\left(\deg(A), \deg(B), \deg(C)\right) \leqslant M(ABC)-1$ où $M(P)$ est le nombre de racines distinctes du polynôme P.
Si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on note $W_{P,Q} = PQ' - P'Q$.
  i) Montrer que $W_{A,B} = W_{C,B} = W_{A,C} \neq 0$.
  ii) Montrer que $\deg(A \wedge A') + \deg(B \wedge B') + \deg(C \wedge C') \leqslant \deg(W_{A,B})$.
  iii) Conclure.
b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de $(A, B, C) \in \mathbb{C}[X]^3$ avec $\deg(A) = d$ et pour lequel $\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) = M(ABC) - 1$.
c) Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux dans leur ensemble et tels que $A^n + B^n = C^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \leqslant 2$. Montrer qu'il existe des solutions pour $n = 2$.

27. [P]$\star\star$ Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires. On dit que P et Q sont entrelacés lorsqu'entre deux racines consécutives de l'un (en tenant compte des multiplicités) il y a exactement une racine de l'autre. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P)-1$, que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et que P et Q n'ont aucune racine commune. On pose enfin $F = \dfrac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.
Montrer l'équivalence entre :
(i) P est scindé sur $\mathbb{R}$ et P et Q sont entrelacés, (ii) $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

32. [P] $\star\star$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, m un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que la réduction modulo m définit un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$, puis que ce morphisme est surjectif.

33. [P] $\star\star$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ non nul, on a $\{Mv\ ;\ M \in A\} = \mathbb{C}^n$. Montrer que $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

37. [SR] $\star$ Pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, soit $\mathrm{Pf}(A) = a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{1,4}a_{2,3}$.
a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A)$.

b) On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ et tout $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $\mathrm{Pf}(BAB^T) = \det(B)\mathrm{Pf}(A)$.
Ind. Pour le cas $\det B < 0$, considérer la matrice $J = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.
c) Soit $R \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. On pose $A = R - R^T$. Montrer l'équivalence entre :
(i) R n'a pas de valeur propre réelle, (ii) $\mathrm{Pf}(A) \neq 0$, (iii) A est inversible.
d) Soient $R_1, R_2 \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$, $A_1 = R_1^T - R_1$ et $A_2 = R_2^T - R_2$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $\mathrm{Pf}(A_1) = \mathrm{Pf}(A_2) \neq 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ telle que $R_1 = PR_2P^T$.

41. [PLSR] ★ ★ Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $\zeta = e^{2i\pi/n}$ et $S = \left(\zeta^{(r-1)(s-1)}\right)_{1 \leqslant r,s \leqslant n}$.
a) Donner une expression simple de $\det(S)$. ***Ind.*** On pourra calculer S^2.
b) On pose $G_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik^2\pi}{n}}$. Donner une expression simple de $|G_n|^2$ par un calcul direct.
c) On suppose que n est impair. Déterminer le spectre de S et la multiplicité de chacune de ses valeurs propres.

47. [PLSR] ★ Soient A, B, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'équation $(E) : X - AXB = C$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ les spectres complexes de A et B.
a) On suppose que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, $\alpha\beta \neq 1$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution.
b) Que se passe-t-il dans le cas général ?

49. [L] ★★ Déterminer les M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que M soit semblable à $2M$.

50. [L] ★ ★ Déterminer les matrices $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $k \geqslant 2$, on dispose de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ vérifiant $A = M^k$.

52. [P] ★★ ***a)*** Montrer que toute $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ s'écrit de façon unique UD où $U \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente, $D \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et $UD = DU$.
b) Soit ρ un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$ tel que les coefficients de $\rho(M)$ soient des fonctions polynomiales de ceux de M. Montrer que ρ respecte la décomposition de la question précédente.

56. [P] ★ Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E tels que $\langle e_i, e_j \rangle \leqslant 0$ pour tous i, j distincts dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement s'il existe une forme linéaire f sur E telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) > 0$.

58. [L] ★★ Trouver un espace préhilbertien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ et $f : \mathbb{R} \to E$ tels que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp\left(-\dfrac{(y-x)^2}{2}\right) = \langle f(x), f(y) \rangle$.

64. [PLSR] ★★ ***a)*** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ soit positive, puis définie positive.
b) Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$. On suppose que $1 + 2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$.

65. [PLSR] ★ ***a)*** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe un vecteur propre de A dont tous les coefficients sont > 0.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients > 0. Montrer que A possède un vecteur propre à coefficients > 0.
c) Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$, $M_i = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que $M_1 \times \cdots \times M_n$ est à spectre inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

67. [PLSR] $\star$ Montrer que $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

71. [L] $\star$ Soient $p \geqslant 1$ et $A, B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que $\operatorname{tr}\left(I_p - A^{-1}B\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{\det A}{\det B}\right)$.
b) Soient $n \geqslant 1$, $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \leqslant m \leqslant n$, on pose $A_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} u_k\, u_k^T$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$. Montrer que, pour $1 \leqslant m \leqslant n$, B_m est symétrique définie positive.
c) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n.
Montrer que $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} \left\langle u_m, B_m^{-1} u_m \right\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{p} \ln\left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda}\right)$.

75. [P] $\star\star$ Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}^n, +)$ dans lequel 0 est un point isolé. Montrer qu'il existe une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G = \left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k . u_k,\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p \right\}$.

78. [PLSR] $\star\star$ Soient H le groupe (pour la composition) des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, H^+ le sous-groupe des homéomorphismes croissants.
a) Caractériser les groupes finis isomorphes à un sous-groupe de H.
b) Montrer qu'on peut munir tout sous-groupe dénombrable G de H^+ d'une relation d'ordre totale telle que $\forall f, g, h \in G,\ f \leqslant g \implies h \circ f \leqslant h \circ g$.
c) Réciproquement, montrer que tout groupe dénombrable pouvant être muni d'un tel ordre est isomorphe à un sous groupe de H^+.

81. [P] $\star\star$ Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ telle que : $\forall r \in]0,1], \forall x \in E,\ B\left(f(x), \dfrac{r}{2}\right) \subset f(B(x,r)) \subset B(f(x), 2r)$.
a) Montrer que f est continue et surjective.
b) Que peut-on dire de l'image par f d'un ouvert ? D'un fermé ?
c) Soit γ un chemin continu de $[0,1]$ dans F. Montrer qu'il existe un chemin c continu de $[0,1]$ dans E tel que $f \circ c = \gamma$.

85. [P] $\star$ Soient $n \geqslant 2$ et e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, il existe $a_{v,M} \in \mathbb{R}$, tel que la suite $(M^k v)_{k \geqslant 1}$ tende vers $a_{v,M} e_1$, avec de plus $v \mapsto a_{v,M}$ non identiquement nulle.
Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $f_v : M \in \mathcal{A} \mapsto a_{v,M}$ est continue.

87. [L] $\star$ Soit $n \geqslant 1$ un entier, $L \in\ ]0,1[$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application L-lipschitzienne pour $\|\ \|_\infty$, et $x_* \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x_*) = x_*$.
a) Soit $(x_k)_{k \geqslant 1}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \geqslant 1$, $x_{k+1} = F(x_k)$. Montrer que $x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} x_*$.

b) Pour $I \subset \{1, \ldots, n\}$, on note $F^{|I} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $1 \leqslant i \leqslant n$, par $F^{|I}(x)_i = \begin{cases} F(x)_i & \text{si } i \in I \\ x_i & \text{si } i \notin I \end{cases}$.
Montrer que $F^{|I}$ est 1-lipschitzienne pour $\| \|_\infty$.
c) Soit $(I_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ telle que chaque indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ appartienne à une infinité de ces ensembles. Soient $x_1 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \geqslant 1$, $x_{k+1} = F^{|I_k}(x_k)$. Montrer que cette suite converge vers x_*.

88. [PLSR] ★★ On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\| \|_\infty$.

a) Soit (a_n) une suite réelle sommable. Montrer que l'application $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ définit une forme linéaire continue sur l'espace ℓ^∞.
b) On suppose l'existence d'une partie $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que : (i) pour tous $A, B \in F$, $A \cap B \in F$, (ii) pour $A \in F$, F contient toute partie B de $\mathbb{N}$ qui contient A, (iii) F ne contient que des ensembles infinis, (iv) si $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors $A \in F$ ou $\mathbb{N} \setminus A \in F$.
i) Soit $x \in \ell^\infty$.
Montrer qu'il existe un unique réel x^∞ tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists A \in F, \forall n \in A, |x_n - x^\infty| \leqslant \varepsilon$.
ii) En déduire l'existence d'une forme linéaire continue sur ℓ^∞ qui n'est pas de la forme donnée en question ***a)***.
c) On note c_0 le sous-espace de ℓ^∞ des suites réelles de limite nulle. Montrer que toute forme linéaire continue sur c_0 est de la forme donnée en question ***a)***.

89. [P] ★ Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ coupant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annulant sur E. Montrer que $P = 0$.

90. [P] ★★ Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$, C un convexe ouvert de E ne contenant pas 0. Montrer qu'il existe une droite vectorielle ne coupant pas C.

94. [PLSR] ★ Soient $n \geqslant 2$ et $I_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) \subset E_\lambda(A)\}$, où $E_\lambda(A)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
a) Montrer que $I_n(\mathbb{R})$ est stable par similitude.
b) Soient $A, B \in I_n(\mathbb{R})$.
Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$ et $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
c) On note $I_n^*(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \mathrm{Im}(A) = E_\lambda(A)\}$. Étudier la connexité par arcs de $I_n(\mathbb{R})$ et de $I_n^*(\mathbb{R})$.
d) Déterminer les classes de similitude incluses dans $I_2(\mathbb{R})$.

97. [P] ★★ Déterminer les valeurs d'adhérence des suites $(\cos n)$ et $(\cos^n n)$.

98. [PSLR] ★★ Soit S une partie de $\mathbb{N}^*$ infinie et stable par produit. On range les éléments de S en une suite strictement croissante $(s_n)_{n \geqslant 1}$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n \geqslant 1}$ admet une limite dans $[1, +\infty[$.

102. [PLSR] ★ Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose que $\sum_{k=1}^{m} a_k z_k^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

103. [P] ★★ Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée telle que $\forall h \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+h} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

105. [L] ★★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
a) Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i\geqslant 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geqslant {n_i}^2$ et que $\alpha = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n_i}\right)$.
b) Généraliser ce résultat.

112 ★ ***a)*** Soit (u_n) une suite réelle telle que $\forall n, p, u_{n+p} \leqslant u_n + u_p + C$, où C est une constante réelle. Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ converge ou tend vers $-\infty$.
b) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue et croissante, telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) + 1$. On note f^n la composée itérée de f (n fois).
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{f^n(x) - x}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite qui ne dépend pas de x.

113. [SR] ★ Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ dans $(\mathbb{R}^{+*})^n$.
On note $a \geqslant b$ si : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} b_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. Montrer que $a \geqslant b$ si et seulement si, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$, $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{\sigma(i)}} \geqslant \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_{\sigma(i)}}$.

122. [P] ★ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(0) \neq 0$, $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $z_1, \ldots, z_p$ les racines de module strictement inférieur à r de P comptées avec multiplicité. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|)\mathrm{d}t = \ln(|P(0)|) + \sum_{k=1}^{p} \ln\left(\frac{r}{|z_k|}\right)$.

130. [L] ★★ Pour $k \geqslant 3$, on note $G_k : z \mapsto \displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+nz)^k}$.
a) Montrer que $G_k(z)$ est bien défini pour tout complexe z tel que $\operatorname{Im} z > 0$ et que la fonction $(x, y) \mapsto G_k(x + iy)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que $G_k(iy)$ admet une limite quand $y \to +\infty$.
c) Étudier l'existence des limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2}$ et $\displaystyle\lim_{M\to\infty} \sum_{m=-M}^{M} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m+in)^2}$, où dans les deux cas la somme exclut $(n, m) = (0, 0)$. Ces limites sont-elles égales ?

131. [PLSR] ★ ★ Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$.
Démontrer que $(x+y+z)^3 + 9xyz \geqslant 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$.

134. [L] ★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

On considère $n+1$ vecteurs $v_1,\dots,v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$, c'est à dire tels que $\left\{\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i v_i,\ (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}\in(\mathbb{R}^+)^{n+1}\right\}=\mathbb{R}^n$.
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue croissante telle que $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Pour $x\in\mathbb{R}^n$, on définit $g(x)=\sum_{i=1}^{n+1}f(\langle v_i,x\rangle)$.
a) Montrer qu'il existe bien $n+1$ vecteurs $v_1,\dots,v_{n+1}$ engendrant positivement $\mathbb{R}^n$.
b) Montrer que g atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$.
c) On suppose que f est intégrable en $-\infty$.
Montrer qu'il existe $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1}f(\langle v_i,x\rangle)v_i=0$.

142. [PLSR] ⋆ ⋆ Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Si N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $X_{N+n}(\omega)=X_{N(\omega)+n}(\omega)$.
a) Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N=1)=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n}=1)=1/2$?
b) Existe-t-il N tel que $\mathbf{P}(X_N=1)=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{Z}^*$, $\mathbf{P}(X_{N+n}=1)=1/2$?

144. [P] ⋆ ⋆ Soient G un groupe fini de cardinal N, et A une partie de G aléatoire, où l'on prend chaque élément de G indépendamment avec probabilité $p>0$.
On note $\mathrm{AA}=\{xy,\ (x,y)\in A^2\}$.
a) Montrer que $\mathbf{P}(1\in\mathrm{AA})$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.
b) Montrer que $\mathbf{P}(\mathrm{AA}=G)$ tend vers 1 quand N tend vers l'infini.

148. [L] ⋆⋆ Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soient $v_1,\dots,v_n\in E$ tels que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\|v_i\|\leqslant 1$. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in[-1,1]$ et $w=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ tels que $v=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i$ satisfait $\|v-w\|\leqslant\sqrt{n}$.

156. [SR] ⋆⋆ ***a)*** Soient $n\in\mathbb{N}$, $(p_0,\dots,p_n)\in\{-1,1\}^{n+1}$. Montrer que les racines de $\sum_{i=0}^{n}p_iX^i$ dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur ou égal à 1.
b) Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite réelle non identiquement nulle telle que $\sum a_kx^k$ ait pour rayon de convergence $R>0$. Si $j\in\mathbb{N}$, on dit que la suite $(a_i)_{i\geqslant 0}$ change de signe en j s'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_ja_{j+k}<0$ et que $a_i=0$ pour $i\in[\![j+1,j+k-1]\!]$. Montrer que l'ensemble des $x\in]0,R[$ tels que $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k=0$ est fini de cardinal majoré par le nombre de changements de signes de $(a_i)_{i\geqslant 0}$.

c) Soit $(A_k)_{k\geqslant 0}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n\in\mathbb{N}$, soient $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}A_k$ et N_n le nombre de $x\in]0,1[$ tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}A_i x^i=0$. Montrer que $N_n\leqslant \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n-1}{2}} 1_{S_{2k+1}=0}$ et en déduire que $\mathbf{E}(N_n)\underset{n\to+\infty}{=}O(\sqrt{n})$.

Écoles Normales Supérieures – PC

187. $^\bigstar$ ***a)*** Soit $X\subset\mathbb{N}$ telle que 0 et 1 appartiennent à X et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\mathrm{Card}(X\cap[\![0,n]\!])=0$. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe $j\in\mathbb{N}$ telle que $\mathrm{Card}(X\cap[\![j,j+k]\!])=2$.
b) Montrer qu'il existe 100 entiers consécutifs contenant exactement 5 nombres premiers.

219. $^\bigstar$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x_n=A$. Quelles sont les valeurs que peut prendre $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x_n^2$?

222. $^\bigstar$ Trouver toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)^2=f\left(t\sqrt{2}\right)$.

248. $^{\bigstar\bigstar}$ Montrer que la fonction $f:P\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto f(P)=\displaystyle\int_0^1\left(P(x)-\mathrm{e}^x\right)^2\,\mathrm{d}x$ admet un unique point critique.

256. $^\bigstar$ Soient, pour $\lambda>0$, $A_\lambda,B_\lambda,C_\lambda,D_\lambda$ quatre variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
a) Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\mathbf{P}\left(A_\lambda X^2+B_\lambda X+C_\lambda \text{ n'a que des racines réelles}\right)$.
b) Même question pour $A_\lambda X^3+B_\lambda X^2+C_\lambda X+D_\lambda$.

École Polytechnique – MP - MPI

265. $^{\bigstar\bigstar}$ Pour toute partie finie non vide X de $\mathbb{R}$ dont on note $x_1<x_2<\cdots<x_n$ les éléments, on pose : $a^+(X)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i+1)$ et $a^-(X)=\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(x_{i+1}-x_i-1)$. L'objectif est d'établir que : $\displaystyle\sum_{\substack{B\subset A\\ B\neq\emptyset}}a^-(B)=a^+(A)$ pour n'importe quelle partie finie non vide A de $\mathbb{R}$.
On se donne donc $A=\{a_1\ldots,a_n\}$ une partie finie non vide de $\mathbb{R}$, avec $a_1<\cdots<a_n$.
a) On suppose le résultat acquis. Trouver une expression de : $\alpha(A)=\displaystyle\sum_{\substack{B\subset A\\ a_n\in B}}a^-(B)$.
b) Établir le résultat cherché.

c) On suppose $A = [\![1, n]\!]$. Calculer : $\displaystyle\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset \\ B \cap (B+1) = \emptyset}} a^-(B)$.

268. $\star$ Quels sont les m de $\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe m éléments consécutifs de $\mathbb{N}^*$ divisibles par des cubes d'éléments de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$?

272. $\star$ Soit p un nombre premier impair.
a) Dénombrer les $(x, y) \in (\mathbb{F}_p)^2$ tels que $x^2 + y^2 = 1$.
b) Soit $z \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$. Dénombrer $\{\, (x, y) \in \mathbb{F}_p^2,\ x^2 + y^2 = z\}$.

274. $\star$ Soient p un nombre premier congru à 1 modulo 4 et S l'ensemble $S = \{x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \ ;\ p = x^2 + 4yz\}$. Pour $(x, y, z) \in S$ on pose :
- si $x < y - z$, $f(x, y, z) = (x + 2z, z, -x + y - z)$;
- si $y - z < x < 2y$, $f(x, y, z) = (2y - x, y, x - y + z)$;
- si $x > 2y$, $f(x, y, z) = (x - 2y, x - y + z, y)$.
Montrer que f définit une involution de S. En déduire que p s'écrit $u^2 + v^2$ avec $(u, v) \in \mathbb{N}^2$.

278. $\star\star$ Soit G un groupe fini de cardinal $2n$ où n est impair.
a) Montrer que G possède un élément d'ordre 2.
b) Montrer que G possède un sous-groupe d'ordre n.
Ind. Considérer l'application Φ qui à $g \in G$ associe $\Phi(g) : G \to G$ telle que, pour tout $x \in G$, $\Phi(g)(x) = gx$.
c) Trouver un contre-exemple si n est pair.

284. $\star$ On appelle nombre de coefficients positifs du polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ le cardinal de l'ensemble $\{i \in [\![0, n]\!],\ a_i \geqslant 0\}$.
a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 2$. Montrer que P^2 a au moins trois coefficients positifs.
b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que P^2 ait exactement trois coefficients positifs.

285. $\star$ Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré majoré par n, Δ le pgcd de $P(0), P(1), \ldots, P(n)$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, Δ divise $P(k)$.

287 $\star\star$ Pour $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|P\| = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \right)^{1/2}$.
a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\|(X - z)P\| = \|(1 - \bar{z}X)P\|$.
b) On suppose P unitaire et on note M_P le produit des modules des racines de P de module supérieur ou égal à 1. Montrer que $M_P \leqslant \|P\|$.
c) Montrer, pour $1 \leqslant k \leqslant n - 1$, que $|a_k| \leqslant \dbinom{n-1}{k} M_P + \dbinom{n-1}{k-1}$.

291. $\star$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Si M est inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre non-inversible ?

b) Si M n'est pas inversible, combien de coefficients de M faut-il modifier au minimum pour la rendre inversible ?

297. ★★ Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que (V, A, B) est une réalisation de M si :
- V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d,
- $A = (a_1, \dots, a_n)$ est une famille libre de formes linéaires sur V,
- $B = (b_1, \dots, b_n)$ est une famille libre de vecteurs de V,
- pour tous i, j, $a_i(b_j) = m_{i,j}$.

On dit que d est la dimension de la réalisation.
a) Montrer que si M est réalisée par un espace de dimension d, elle l'est aussi par un espace de dimension $d' > d$.
b) Trouver une réalisation de la matrice $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
c) Trouver la dimension minimale d'une réalisation de M_0.

300. ★ La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ peut-elle s'écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

305. ★ Soit $d \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^d$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $\delta_1, \delta_2 > 0$ avec $\delta_1 \neq \delta_2$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $\forall i \neq j$, $\|x_i - x_j\| \in \{\delta_1, \delta_2\}$. Montrer que $n \leqslant \dfrac{(d+1)(d+5)}{2}$.
Ind. Montrer que les $f_i : y \mapsto \left(\|y - x_i\|^2 - \delta_1^2\right)\left(\|y - x_i\|^2 - \delta_2^2\right)$ sont linéairement indépendantes.

306. ★ ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $H_n = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})\ ;\ M^T M = nI_n\right\}$.
a) Déterminer H_1, H_2 et H_3.
b) Soit $n \geqslant 4$ tel que $H_n \neq \emptyset$. Montrer que 4 divise n.
c) À l'aide de $A \in H_n$, construire une matrice $B \in H_{2n}$.
d) Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3\,[4]$. Montrer que H_{p+1} n'est pas vide.

321. [MPI] ★★ Soit (u_n) une suite réelle majorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.
Montrer que la suite (u_n) est constante.

322. ★★ On définit la suite (z_n) par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(z_n + \dfrac{1}{z_n}\right)$.
a) Lorsque $z_0 \in \mathbb{R}^*$, étudier l'existence de la suite (z_n) et sa convergence.
b) Même question lorsque $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

326. ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1-périodique.
On définit : $\forall S \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ M_n(f, S) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(S_k)$.
a) Montrer que la suite $(M_n(f, S))$ converge pour toute suite S si et seulement si f est constante.
b) On dit qu'une suite réelle (u_n) est équirépartie modulo 1 lorsque

$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 1-périodique, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$

Montrer que la suite $(\sqrt{n})$ est équirépartie modulo 1.

338. ★ ★ ***a)*** Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

i) Montrer qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\displaystyle\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$; déterminer les valeurs possibles de ℓ.

ii) Si $\ell \in \mathbb{R}$, montrer que $f(x) - \ell x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers $+\infty$ et déterminer les limites possibles.

b) i) Soient f, g convexes et continues sur $[0,1]$ vérifiant $\max(f,g) \geqslant 0$.

Montrer qu'il existe α, β positifs et non tous nuls tels que $\alpha f + \beta g \geqslant 0$.

ii) Soient $f_1, \ldots, f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexes et continues vérifiant $\max(f_1, \ldots, f_n) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ positifs et non tous nuls vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \geqslant 0$.

344. ★ Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ bornées par 1. Déterminer $\sup \left\{ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' \ ; \ \varphi \in E \right\}$.

346 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme général $f(nx)$ diverge ?

355. ★★ Une série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est dite primitive lorsqu'elle est à termes entiers et il n'existe pas d'entier $d > 1$ divisant tous les a_n.

a) Soit $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries primitives. Montrer que leur produit de Cauchy est une série primitive.

b) Soit $F(z) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$, où $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, telle qu'il existe P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ avec $P \wedge Q = 1$ et $Q(0) = 1$, tels que, pour z voisin de 0, on ait $F(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Montrer que $(P, Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$.

356. ★★ Soit $n \geqslant 2$. On pose $g_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{4k}} \binom{2k}{k}^2$. Soit K_n l'élément de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \underset{x\to 0}{=} K_n(x) + o(x^n)$.

a) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|K_n\left(e^{i\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\theta = g_n$.

b) Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, de somme $f(z)$. On suppose que, pour $|z| < 1$, $|f(z)| \leqslant 1$. Montrer que $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant g_n$.

368. ★★ ***a)*** Soit x de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $+\infty$. On suppose qu'il existe $\tau > 0$ et $\lambda > 0$ tels qu'on ait $x'(t) + \lambda x(t-\tau) \leqslant 0$ et $x(t) \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que $x(t-\tau) \leqslant \dfrac{4}{(\lambda\tau)^2} x(t)$ au voisinage de $+\infty$.

b) Soient x de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, m et n dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ des réels, $\tau_1, \ldots, \tau_n$, des réels strictement positifs, $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ des réels positifs.

On suppose que $\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'(t-\tau_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i x(t-\sigma_i) = 0$.

Démontrer qu'il existe c et K réels tels que, pour t au voisinage de $+\infty$, $|x'(t)| \leqslant K e^{ct}$.

372. ★★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace de dimension r et $p \in \mathcal{P}$. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $\mathcal{P}$ en p.

386 ★ Une grille $\{1,2,3\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ modélise un tuyau vertical. On dépose à l'instant $t = 0$ une goutte d'eau au point $(2, n)$. À chaque instant, si elle se trouve au milieu (i.e. en un point $(2, k)$), la goutte descend d'un niveau avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou se déplace à droite (resp. gauche) avec probabilité $\dfrac{1}{4}$; si elle se trouve sur un bord, elle descend avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ ou va au milieu avec probabilité $\dfrac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité pour que la goutte sorte du tuyau à un instant t.

b) Calculer l'espérance du temps d'attente pour que l'eau sorte du tuyau.

387. ★ ***a)*** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur les entiers pairs entre 2 et $2n$. Déterminer $\mathbf{P}(|X-Y| \leqslant 1)$ et $\mathbf{P}(|X-Y| \leqslant 2)$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et identiquement distribuées. Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose :
$S_m(n) = \big|\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,;\ |X_i - X_j| \leqslant m\}\big|$.
Montrer que $\mathbf{E}(S_m(n)) = n + n(n-1)\mathbf{P}(|X_1 - X_2| \leqslant m)$.

c) Soit $(x_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on pose : $s_m(n) = \big|\{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \,;\ |x_i - x_j| \leqslant m\}\big|$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_2(n) \leqslant 3 s_1(n)$.

d) En déduire que, si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi, alors $\mathbf{P}(|X-Y| \leqslant 2) \leqslant 3\,\mathbf{P}(|X-Y| \leqslant 1)$.

390. ★★ Soient $\alpha > 0$ et $(B_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que $\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = 0) = \dfrac{1}{i^\alpha}$. Soit $S = \{n \in \mathbb{N}^*, B_n = 1\}$.

a) Donner une condition sur α pour que S soit infini presque sûrement, puis pour que S soit fini presque sûrement.

b) On suppose $\alpha < 1$. On pose $\beta > 0$ et $N = \max\{n \in \mathbb{N}^*, S \cap [\![n, n + n^\beta]\!] = \emptyset\}$. Donner des conditions sur β pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 1$ et pour que $\mathbf{P}(N = +\infty) = 0$.

c) Montrer que, presque sûrement, il existe un rationnel γ tel que $\lfloor \gamma^{2^n} \rfloor \notin S$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

391. ★★ Soient $N \geqslant 1$, μ une distribution de probabilité sur $[\![1, N]\!]$ telle que $\mu(1) > 0$, $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi μ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $E = \{S_m,\ m \in \mathbb{N}\}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathbf{P}(n \in E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k)\, \mathbf{P}(n-k \in E)$.

On pose $F : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(n \in E) z^n$ et $G : z \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mu(k) z^k$.

b) On pose $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{D}, F(z) = \dfrac{1}{1-G(z)}$.

c) Montrer que 1 est un pôle simple de F et tous les autres pôles de F ont un module strictement supérieur à 1.

d) Montrer que $\mathbf{P}(n \in E) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathbf{E}(X_1)}$.

École Polytechnique - ESPCI – PC

412. ★ Soient $n \geqslant 2$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un entier $i \in [\![0, n]\!]$ tel que l'on ait $\left| \displaystyle\sum_{k=0}^{i} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k \right| \leqslant \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.

413. ★★ Soit $P = X^2 + c_1 X + c_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Déterminer les suites d'entiers naturels (a_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2}$.

436. ★ ★ Soit $f \in \mathcal{L}(S_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ f(M) \geqslant 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M \mapsto X^T M X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

439. ★★ On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E. Déterminer l'adhérence de A.

440. ★ Chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijective, continue, dont la réciproque est continue et telle que, pour toute droite $\mathcal{D}$, $f(\mathcal{D})$ est une droite.

446. ★★ On note $a = \sqrt{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ a < \frac{k}{n} < a+1}} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}$. Étudier la convergence de la suite (S_n).

459. ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0([\,0\,; 2\pi\,], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0$. Quel est le nombre minimal d'annulations de f ?

460. ★ ★ Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([\,0\,; 1\,], \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_0^1 fg = 0$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \left(\int_0^1 g\right)^2 + \int_0^1 g^2 \left(\int_0^1 f\right)^2 \geqslant 4 \left(\int_0^1 f \int_0^1 g\right)^2$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \int_0^1 g^2 \geqslant 4 \left(\int_0^1 f \int_0^1 g\right)^2$.

468. ★★ La fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1^- ?

471. ★★ Pour $x \geqslant 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
a) Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.
b) Montrer que $I(x) = \mathcal{O}(x^{-1/4})$ quand x tend vers $+\infty$.

480. ★★ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $p_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$ est croissante sur $[0,1]$. Interpréter d'un point de vue probabiliste.

481. ★★ On étudie un groupe de cellules. À l'instant initial, $n = 0$, il y en a une. À chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

482. ★★ Soient $p \in \,]0,1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1-p$. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Mines - Ponts – MP - MPI

535. ★ Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et non inversible.
a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{C}^n = \mathrm{Im}(A^p) \oplus \mathrm{Ker}(A^p)$.
b) Montrer qu'il existe $r \in [\![1, n-1]\!]$, $A_0 \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$
c) On suppose qu'il existe $m \geqslant 2$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $A^m B = A$.
Montrer que $A^m B = A^{m-1}BA = \cdots = BA^m$.

559. ★ Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{C}^0([-1,1],[-1,1])$ surjective et croissante. Soit $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. On considère $F \neq \{0\}$ un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ.
a) Montrer que Φ_F est un automorphisme.
b) Montrer que 1 est l'unique valeur propre de Φ_F.
c) Montrer que $u = \Phi_F - \mathrm{id}_F$ est nilpotent.

635. ★ Soient E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.
a) Montrer que : $\|f\|_{\mathrm{op}} = \dfrac{|f(x_0)|}{d(x_0, \mathrm{Ker}\, f)}$.
b) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\exists a \in E, \|f\|_{\mathrm{op}} = \dfrac{|f(a)|}{\|a\|}$; (ii) $\exists y \in \mathrm{Ker}\, f, d(x_0, \mathrm{Ker}\, f) = \|x_0 - y\|$.

636. ★ Soient $\|\ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $\|\ \|_{\mathrm{op}}$ la norme d'opérateur associée.

a) i) Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
ii) Montrer qu'elle est sous-multiplicative.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_k(A) = \left(I_n + \dfrac{1}{k}A\right)^k$.
i) On suppose que A est diagonalisable. Montrer que $(u_k(A))$ est une suite convergente et préciser sa limite.
ii) Montrer le même résultat dans le cas général.

638. ★ ***a)*** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout couple (A, B) de matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait $N(AB) = N(BA)$?

701. ★★ ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sqrt{\sin(2x)}}\mathrm{d}x$.
b) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x))\sin(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2(y))\cos(y)\mathrm{d}y$.

710. ★ Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f n'est pas dérivable en 0.

824. ★★ Soient X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Minorer aussi précisément que possible $\mathbf{E}(X/Y)$.

Mines - Ponts – PSI

920. ★ Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = 2f - \mathrm{id}$.
a) Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
b) On pose $f_0 = f$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. Montrer que $\left(\dfrac{1}{n}f_n\right)$ admet une limite, que l'on précisera.
c) Déterminer f.

Centrale – MP - MPI

1197. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier premier impair. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.
a) i) Rappeler la définition de la comatrice.
ii) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1.
b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$ et que $A = \dfrac{1}{p}(M - I_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M = I_n$.
c) Déterminer un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

1205. ★ ***a)*** Justifier la définition de l'exponentielle de matrice.
b) Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ et $t \in \mathbb{R}$.
c) Considérons une matrice A diagonalisable. Calculer $\exp(A)$ en utilisant des matrices de passage. Montrer que $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$.
d) Dans cette question, on admet l'existence et l'unicité de la décomposition de Jordan-Dunford. En notant $D + N$ la décomposition de Jordan-Dunford de A, montrer que la décomposition de $\exp(A)$ est $\exp(D) + \exp(D)(\exp(N) - I_n)$.