`Lycée François Premier - MP (2023/2024)`

Colle de la semaine du 18/09

Pour cette semaine le programme porte sur des révisions sur les inégalités et les intégrales généralisées :

Inégalités :

- Notions de borne sup et inf
- Thm. de limite monotone
- Inégalité triangulaire (pour des complexes, pour l'intégrale), cas d'égalité
- Inégalité de Cauchy-Schwartz
- Inégalités de convexité : Jensen, des 3 pentes, usuelles ($e^x \leq 1 + x$, $\ln(1 + x) \leq x$, $\sin(x) \leq x$ et $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$), inégalité arithmético-géométrique.
- Inégalité des accroissements finis

Intégrales généralisées :

- Intégrales généralisées, définitions, propriétés (linéarité, Chasles, positivité, croissance, positivité stricte, changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif et intégration par parties).
- Intégrales de référence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ et intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$.
- Fonctions intégrables, l'intégrabilité implique la convergence, intégrales semi-convergentes.
- Critères de convergence par comparaison pour les fonctions positives, pour les fonctions intégrables.
- Espaces L^1 et L^2.
- Intégration des relations de comparaison (pour o, O et $\sim$ dans les cas de fonctions intégrables et non intégrables, la fonction de référence étant positive)

Énoncés et démonstrations à préparer :

- thm. limite monotone (pour une suite)
- inégalité triangulaire : $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- inégalité de Cauchy-Schwartz
- inégalité de Jensen
- inégalité des 3 pentes
- inégalité arithmético-géométrique
- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, dt$ converge ssi $\alpha > 0$.
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- Justifier que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!$ (fonction Gamma sur les entiers).
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ converge et n'est pas absolument convergente.

Exemples de cours et exercices à préparer :

— Si $\int_a^{+\infty} f$ converge et $f \underset{+\infty}{\to} l$ alors $l = 0$.

— Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$ (en intégrant une relation de comparaison).

— (CCINP 28) 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

— (CCINP 26) Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Etudier la monotonie de la suite (I_n) puis montrer que (I_n) converge vers une limite à déterminer (*on admet que c'est zéro*).
3. Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n I_n$.

— (CCINP 89) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, donner le module et un argument de $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$.

Approfondissements :

- Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire pour n complexes
- Inégalité de Hölder : Pour $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a :

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |k_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

- Inégalité de Minkowski : Pour $p \in]1, +\infty[$,

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Si f est c.p.m. décroissante positive sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x})$.
- Si f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par l'absurde).

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Le Roy, Chaumont, Benyeloul.