Lycée François Premier - MP (2023/2024)

Colle de la semaine du 25/09

Pour cette semaine le programme porte sur des révisions sur les intégrales généralisées et certaines notions d'espaces vectoriels normés :

Intégrales généralisées :

— Intégrales généralisées, définitions, propriétés (linéarité, Chasles, positivité, croissance, positivité stricte, changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif et intégration par parties).

— Intégrales de référence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ et intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$.

— Fonctions intégrables, l'intégrabilité implique la convergence, intégrales semi-convergentes.

— Critères de convergence par comparaison pour les fonctions positives, pour les fonctions intégrables.

— Espaces L^1 et L^2.

— Intégration des relations de comparaison (pour o, O et $\sim$ dans les cas de fonctions intégrables et non intégrables, la fonction de référence étant positive)

Espaces vectoriels normés :

— Notion de norme, de distance, distance associée à une norme.

— Boules ouvertes, fermées, sphères, parties bornées, applications bornées, distance à une partie, fonctions lipschitziennes entre 2 evn.

— Parties convexes.

— Suites convergentes d'un evn, propriétés usuelles sur les suites convergentes.

— Suites extraites, si φ est une extraction $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, traduction de (u_n) n'est pas majorée en terme de suite extraite, traduction de (u_n) ne tend pas vers 0 en terme de suite extraite.

— Valeur d'adhérence, thm. de Bolzano-Weierstrass (dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$),
$a \in \mathrm{Adh}(x_n) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \;\; \{n \in \mathbb{N} \mid ||x_n - a|| \leq \epsilon\}$ est infini.

— Notion de normes équivalentes, les normes sont équivalentes en dimension finie (sera démontré plus tard).

— Notion d'algèbre, de norme d'algèbre.

— Série à valeurs dans un evn (de dimension finie).

Énoncés et démonstrations à préparer :

- $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ converge ssi $\alpha > 0$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
- Justifier que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = n!$ (fonction Gamma sur les entiers).
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ converge et n'est pas absolument convergente.
- Pour A une partie non vide d'un evn, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
- la composée de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.
- Les boules (ouvertes ou fermées) d'un evn sont convexes.

- Si φ est une extraction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
- Thm. de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ (à partir de la version dans $\mathbb{R}$).
- Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.

Exemples de cours et exercices à préparer :

— Si $\int_a^{+\infty} f$ converge et $f \underset{+\infty}{\to} l$ alors $l = 0$.

— Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$ (en intégrant une relation de comparaison).

— (CCINP 28) 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?

2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

— (CCINP 26) Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.
1. Justifier que I_n est bien définie.
2. Etudier la monotonie de la suite (I_n) puis montrer que (I_n) converge vers une limite à déterminer (*on admet que c'est zéro*).
3. Déterminer la nature de la série $\sum(-1)^n I_n$.

— (CCINP 37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
1.a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

— (CCINP 40) Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $|| \; ||$. On suppose que : $\forall (u, v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.
1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
a. Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
b.Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\displaystyle\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

Approfondissements :

- Si f est c.p.m. décroissante positive sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{x})$.
- Si f est uniformément continue sur $[0, +\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par l'absurde).
- Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2|\sin(x)|}\, dx$ converge (on montre que la suite $\left(\int_\pi^{n\pi} e^{-x^2|\sin(x)|}\, dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée).
- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|^2\, dt$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f(t)\, dt$ converge.
- (x_n) n'est pas majorée $\iff$ il existe une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)} \to +\infty$.
- $a \in \mathrm{Adh}(x_n) \iff \forall \epsilon > 0,\ \ \{n \in \mathbb{N} \mid ||x_n - a|| \leq \epsilon\}$ est infini.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Le Roy, Chaumont, Benyeloul.