Lycée François Premier - MP (2023/2024)

Colle de la semaine du 02/10

Pour cette semaine le programme porte sur certaines notions d'espaces vectoriels normés et les séries numériques :

Espaces vectoriels normés :

— Notion de norme, de distance, distance associée à une norme.
— Boules ouvertes, fermées, sphères, parties bornées, applications bornées, distance à une partie, fonctions lipschitziennes entre 2 evn.
— Parties convexes.
— Suites convergentes d'un evn, propriétés usuelles sur les suites convergentes.
— Suites extraites, si φ est une extraction $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, traduction de (u_n) n'est pas majorée en terme de suite extraite, traduction de (u_n) ne tend pas vers 0 en terme de suite extraite.
— Valeur d'adhérence, thm. de Bolzano-Weierstrass (dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$), $a \in \text{Adh}(x_n) \iff \forall \epsilon > 0,\ \ \{n \in \mathbb{N} \mid ||x_n - a|| \leq \epsilon\}$ est infini.
— Notion de normes équivalentes, les normes sont équivalentes en dimension finie (sera démontré plus tard).
— Notion d'algèbre, de norme d'algèbre.
— Série à valeurs dans un evn (de dimension finie).

Séries numériques :

— Comparaison série-intégrale avec une fonction monotone
— Règle de d'Alembert
— Théorèmes de sommation des relations de comparaison (cas des séries convergentes, cas des séries divergentes)
— Théorème de Césaro (pour une suite de complexes ayant une limite finie, pour une suite de réels ayant une limite infinie)

Énoncés et démonstrations à préparer :

- Pour A une partie non vide d'un evn, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.
- la composée de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.
- Les boules (ouvertes ou fermées) d'un evn sont convexes.
- Si φ est une extraction, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
- Thm. de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{C}$ (à partir de la version dans $\mathbb{R}$).
- Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.
- Thm. de comparaison série-intégrale : si f est continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge $\iff$ f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.
- Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge.
- Règle de d'Alembert ($l > 1$ ou $l < 1$).
- Théorème de Césaro (cas d'une limite finie ou infinie)

Exemples de cours et exercices à préparer :

- (CCINP 37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

  On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

  1.a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

  b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

  2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

- (CCINP 40) Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$. On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

  1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

  a. Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

  b. Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

  2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\displaystyle\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

- (CCINP 5) 1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

  a. Dans le cas $\alpha \leqslant 0$, à l'aide d'une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

  b. Dans le cas $\alpha > 0$, étudier la nature de la série.

  2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

- Déterminer un équivalent de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. ($x_n \sim \sqrt{2n}$)

Approfondissements :

- (x_n) n'est pas majorée $\Longleftrightarrow$ il existe une extraction φ telle que $u_{\varphi(n)} \to +\infty$.
- $a \in \mathrm{Adh}(x_n) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \ \{n \in \mathbb{N} \mid ||x_n - a|| \leq \epsilon\}$ est infini.
- théorème des variations bornées : Si $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{C})$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'|$ converge alors

$$\sum f(n) \text{ converge } \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} f \text{ converge.}$$

- transformation d'Abel, théorème d'Abel : Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites de réels telles que $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante positive et converge vers 0 et, la suite des sommes partielles associée à la série $\sum v_n$ est bornée alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Le Roy, Chaumont, Benyeloul.