Lycée François Premier - MP (2023/2024)

Colle de la semaine du 09/10

Pour cette semaine le programme porte sur les séries (cf. programmes précédents), les ensembles dénombrables et la topologie des espaces vectoriels normés :

Ensembles dénombrables :

- définition d'ensembles finis, dénombrables, au plus dénombrables.
- Une partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
- E est au plus dénombrable ssi il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$ ssi il existe une surjection de N dans E
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables est dénombrable.
- Toute union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.
- $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Topologie des espaces vectoriels normés :

- Notions de point intérieur, ouvert, fermé, intérieur, voisinage.
- Une boule ouverte est ouverte, une boule fermée est fermée
- Une réunion d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert ; propriété analogue pour les fermés.
- Tout produit fini d'ouverts (resp. fermés) est un ouvert (resp. un fermé).
- Notion de point adhérent, d'adhérence d'une partie, de frontière.
- A est fermée ssi $A = \overline{A}$.
- caractérisation séquentielle d'un point adhérent, d'un fermé.
- parties denses. exemples : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Topologie induite
- les notions topologiques sont invariantes par changement de norme équivalente.

Énoncés et démonstrations à préparer :

- $\mathbb{Z}$ est dénombrable, $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
- Une boule ouverte est ouverte ou une boule fermée est fermée.
- Une réunion d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert (ou la propriété analogue pour les fermés).
- Caractérisation séquentielle d'un point adhérent.

Exemples de cours et exercices à préparer :

- Si C est une partie convexe alors l'adhérence de C et l'intérieur de C sont convexes.
- Si $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0\}$, montrer que F est fermée pour la norme infinie et la norme 1.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (CCINP 34) Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
  1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
  2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
  3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

— (CCINP 37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
1.a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
c. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

— (CCINP 44) Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
1.a. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
b. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. a. Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
b. Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

— (CCINP 45) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. 1. a. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
b. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$.
a. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
b. On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$,
$d_A(tx + (1-t)y) \leqslant td_A(x) + (1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

Approfondissements :
- Existence de nombres transcendants (en montrant que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrables).
- L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé.
- Si C est une partie convexe alors pour $(a, b) \in \mathring{C} \times \overline{C}$ on a $[a, b[\in \mathring{C}$.
- Si $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0\}$, montrer que
$\mathring{F} = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1],\ f(x) > 0\}$ pour la norme infinie et $\mathring{F} = \emptyset$ pour la norme 1.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Le Roy, Chaumont, Benyeloul.