Colle de la semaine du 16/10

Pour cette semaine le programme porte sur la topologie des espaces vectoriels normés (la continuité par arcs sera au prochain programme de colle) :

- Notions de point intérieur, ouvert, fermé, intérieur, voisinage.
- Une boule ouverte est ouverte, une boule fermée est fermée
- Une réunion d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert ; propriété analogue pour les fermés.
- Tout produit fini d'ouverts (resp. fermés) est un ouvert (resp. un fermé).
- Notion de point adhérent, d'adhérence d'une partie, de frontière.
- A est fermée ssi $A = \overline{A}$.
- Caractérisation séquentielle d'un point adhérent, d'un fermé.
- Parties denses. exemples : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Topologie induite
- les notions topologiques sont invariantes par changement de norme équivalente.
- Limite d'une application en un point, caractérisation séquentielle, opérations sur les limites
- Applications continues en un point, sur une partie ; prolongement par continuité, caractérisation séquentielle de la continuité, toute application lipschitzienne est continue, raisonnement par densité, caractérisation de la continuité par les images réciproques d'ouverts ou de fermés.
- Continuité uniforme
- Ensemble compact, un compact est fermé borné, une partie d'un compact est compacte ssi elle est fermée, le produit de compacts est compact, les compacts de R^n et $\mathbb{C}^n$ (muni de la norme infinie) sont les fermés bornés, une suit d'un compact converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.
- Théorème de Heine, l'image d'un compact par une application continue est un compact, théorème des bornes atteintes.
- Recouvrement d'un compact par un nombre fini de boules ouvertes de rayon donné. (hors programme)
- Caractérisation de la continuité pour une application linéaire, norme subordonné d'un application linéaire (3 définitions possibles) et d'une matrice, caractérisation de la continuité pour les applications multilinéaires.
- Equivalence des normes en dimension finie
- Caractérisation de la convergence d'une suite, de la limite/continuité d'une application en un point en dimension finie.
- Théorème de Bolzano-Weierstrass (en dimension finie), en dimension finie les compacts sont les parties fermées bornées.
- Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé, une suite bornée d'un espace vectoriel de dimension finie converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.
- Une application linéaire ayant pour espace de départ un espace de dimension finie est continue, les fonctions polynômiales sont continues, les applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces de dimension finie sont continues. (*les deux derniers points seront vus lundi*)

Énoncés et démonstrations à préparer :

- Une boule ouverte est ouverte ou une boule fermée est fermée.
- Une réunion d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert (ou la propriété analogue pour les fermés).
- Caractérisation séquentielle d'un point adhérent.
- $\mathbb{Q}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Caractérisation séquentielle de la limite d'une application.
- f est continue ssi l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.
- Une partie compacte est fermée et bornée.
- Théorème de Heine.
- L'image d'un compact par une fonction continue est un compact, thm. des bornes atteintes. - $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue ssi $\exists C > 0, \forall x \in E, \ ||u(x)||_F \leq C||x||_E$. - $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie est continue.
- Montrer que la norme subordonnée est une norme (d'algèbre dans le cas de $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Approfondissements :

- les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ soit denses dans $\mathbb{R}$. - Une suite d'un compact converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.
- Recouvrement d'un compact par un nombre fini de boules ouvertes de rayon donné.
- Equivalence des normes en dimensions finies.
- Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Le Roy, Chaumont, Benyeloul.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 34) Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

— (CCINP 37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.
1.a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
c. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

— (CCINP 44) Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.
1.a. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
b. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3. a. Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
b. Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

— (CCINP 45) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. 1. a. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
b. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.
a. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
b. On suppose que A est fermée et que : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall t \in [0,1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant td_A(x) + (1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

— (CCINP 54) Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.
1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
a. Prouver que $||\ .\ ||$ est une norme sur E.
b. Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
c. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. Prouver que f est continue sur E.

— (CCINP 38) 1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$,
$||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.
Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
On admet que u est un endomorphisme de E.
Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé** et $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$.
a. Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
b. On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2}$. Calculer $|||u|||$.
c. On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

— (CCINP 35) E et F désignent deux espaces vectoriels normés. On note $||\ ||_E$ (respectivement $||\ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).
1. Soient f une application de E dans F et a un point de E. Montrer que :
f est continue en $a \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

— (CCINP 36) Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$. On note $|| \; ||_E$ (respectivement $|| \; ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).
1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$f \text{ est continue sur } E \iff f \text{ est continue en } 0_E \iff \exists k > 0,\ \forall x \in E,\ \ \|f(x)\|_F \leqslant k \, \|x\|_E\,.$$

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que φ est linéaire et continue.

— (CCINP 13) 1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $|| \; ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $||P||_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
a. Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X] \;/\; ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
b. Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.