Colle de la semaine du 6/11

Pour cette semaine le programme porte sur la topologie des espaces vectoriels normés et le début du cours sur les suites et séries de fonctions :

espaces vectoriels normés

- cf. programme précédent
- Connexité par arcs, composantes connexes par arcs.
- Une partie convexe est CPA, une partie étoilée est CPA, les parties CPA de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- L'image d'une partie CPA par une fonction continue est une partie CPA.
- Thm. des valeurs intermédiaires : pour $f : A \to \mathbb{R}$ continue avec A CPA alors $f(A)$ est un intervalle.

Suites et séries de fonctions

- Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions ; la convergence uniforme implique la convergence simple ; exemples divers.
- Convergence simple, uniforme et normale pour une série de fonctions ; la convergence uniforme équivaut à la convergence simple et la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle ; la convergence normale implique la convergence uniforme ; exemples divers.

Énoncés et démonstrations à préparer :

- $\mathbb{Q}$ et $GL_n(\mathbb{K})$ sont denses dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une partie compacte est fermée et bornée.
- L'image d'un compact par une fonction continue est un compact, thm. des bornes atteintes.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue ssi $\exists C > 0, \forall x \in E,\ ||u(x)||_F \leq C||x||_E$.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie est continue.
- Montrer que la norme subordonnée est une norme (d'algèbre dans le cas de $\mathcal{L}(E)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
- Une partie convexe est connexe par arcs.
- La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple.

Approfondissements :

- les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$ soit denses dans $\mathbb{R}$.
- Une suite d'un compact converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.
- Recouvrement d'un compact par un nombre fini de boules ouvertes de rayon donné.
- Une forme linéaire est continue ssi son noyau est fermé.
- Si H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ alors $\mathbb{R}^n \backslash H$ admet exactement 2 composantes CPA.
- Si H est un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ alors $\mathbb{C}^n \backslash H$ est CPA.
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Le Roy, Chaumont, Benyeloul.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

- (CCINP 34) Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
  1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
  2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
  3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.
- (CCINP 37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.

  On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

  1.a. Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

  b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

  c. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

  2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
- (CCINP 44) Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

  1.a. Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

  b. Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

  2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

  3. a. Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

  b. Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

— (CCINP 45) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A. 1. a. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
b. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.
a. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
b. On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall t \in [0, 1],\ d_A(tx + (1 - t)y) \leqslant td_A(x) + (1 - t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

— (CCINP 54) Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.
1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ ||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
a. Prouver que $||\ .\ ||$ est une norme sur E.
b. Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
c. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ f(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$. Prouver que f est continue sur E.

— (CCINP 38) 1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$,
$||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.
Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x\ \in [0, 1],\ g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
On admet que u est un endomorphisme de E.
Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé** et $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$.
a. Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
b. On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$. Calculer $|||u|||$.
c. On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$. Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

— (CCINP 35) E et F désignent deux espaces vectoriels normés. On note $||\ ||_E$ (respectivement $||\ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).
1. Soient f une application de E dans F et a un point de E. Montrer que :
f est continue en $a \Longleftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.
2. Soit A une partie dense dans E, et soient f et g deux applications continues de E dans F.
Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

— (CCINP 36) Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$. On note $||\ ||_E$ (respectivement $||\ ||_F$) la norme sur E (respectivement sur F).
1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

$$f \text{ est continue sur } E \Longleftrightarrow f \text{ est continue en } 0_E \Longleftrightarrow \exists k > 0,\ \forall x \in E,\ \ \|f(x)\|_F \leqslant k\, \|x\|_E\,.$$

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par :
$\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Démontrer que φ est linéaire et continue.

— (CCINP 13) 1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $||\ ||_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ de E par : $||P||_1 = \sum\limits_{i=0}^{n} |a_i|$.
a. Justifier que $S(0, 1) = \{P \in \mathbb{R}[X]\ /\ ||P||_1 = 1\}$ est une partie fermée et bornée de E.
b. Calculer $||X^n - X^m||_1$ pour m et n entiers naturels distincts. $S(0, 1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.