Colle de la semaine du 13/11

Pour cette semaine le programme porte les fonctions vectorielles de la variable réelle et une partie du cours sur les suites et séries de fonctions (les thm. de la classe $\mathcal{C}^1$ et de la classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que les thm. d'approximation uniforme seront au prochain programme) :

Suites et séries de fonctions

Les fonctions sont définies sur une parties d'un espace vectoriel de dimension finie et sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

- Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions ; la convergence uniforme implique la convergence simple ; exemples divers.
- Convergence simple, uniforme et normale pour une série de fonctions ; la convergence uniforme équivaut à la convergence simple et la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle ; la convergence normale implique la convergence uniforme ; exemples divers.
- Théorème de continuité : Si (f_n) est une suite de fonctions continues, la convergence uniforme de (f_n) (resp. $\sum f_n$) sur une partie X implique la continuité de la fonction limite (resp. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) sur X.
- Théorème de la double limite : pour (f_n) une suite de fonctions sur X telle que, pour tout n, f_n admet une limite l_n en un point a adhérent à X, on a :
  si (f_n) converge uniformément vers f sur X alors (l_n) admet une limite l et f tend vers l en a,
  si $\sum f_n$ converge uniformément sur X alors la série $\sum l_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ tend vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ en a.
- Théorème d'intégration : Si (f_n) est une suite de fonctions continues, la convergence uniforme de (f_n) (resp. $\sum f_n$) vers f (resp. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ implique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ (resp. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$).

Fonctions vectorielles : dérivation et intégration

- Notion de dérivabilité d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ; D.L. à l'ordre 1 ; caractérisation à l'aide des composantes.
- Opérations sur les fonctions dérivables : addition, multiplication par un réel, $(L\circ f)' = L\circ f'$ pour L application linéaire , $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$ pour B application bilinéaire (exemples du produit scalaire et du déterminant dans $\mathbb{R}^2$) et généralisation avec une application multilinéaire.
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, formule de Liebniz.
- Notion de fonction continue par morceaux à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie ; définition de l'intégrale sur un segment d'une fonction vectorielle continue par morceaux.
- Extension des propriétés de l'intégrale pour les fonctions à valeurs réelles aux fonctions vectorielles : linéarité, Chasles, sommes de Riemann, inégalité triangulaire.
- Notions de primitive, théorème fondamental, inégalité des accroissements finis.
- Formule de Taylor avec reste intégral, formule de Taylor-Young.

Énoncés et démonstrations à préparer :

- La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple.
- $\sum f_n$ converge normalement sur $I \Rightarrow \sum f_n$ converge uniformément sur I.
- Si (f_n), suite de fonctions continues, converge uniformément vers f sur X alors f est continue sur X.
- Théorème d'intégration sur un segment pour une suite de fonctions.
- $(L\circ f)' = L\circ f'$ pour L application linéaire et f fonction à valeurs vectorielles dérivable.
- $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$ pour B application bilinéaire et, f et g fonctions à valeurs vectorielles dérivables.
- Donner la définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles et montrer que que cette définition ne dépend pas de la base choisie.

Approfondissements :

- Soit $(a, b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(f_n)\in\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $K\geq 0$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est K-lipschitzienne et que (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- Soit E un espace vectoriel normé.
1. Soit (f_n) une suite de fonction de X dans E où X est une partie de E et $a \in X$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers une fonction f continue sur X. Montrer que pour toute suite (a_n) d'éléments de X qui converge vers a on a $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
2. Soit K un compact non vide de E et, $f : K \to K$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $x \neq y$, $||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$. Montrer que f possède un unique point fixe.
3. Soit K un convexe compact de E et $f : K \to K$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

— (CCINP 8) 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
  a. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
  b. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
  2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
  a. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. b. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

— (CCINP 9) 1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
  2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2} \cos\left(\sqrt{n}x\right)$.
  a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
  b. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
  c. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
  d. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

— (CCINP 10) On pose $f_n\left(x\right) = \left(x^2+1\right) \dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
  1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
  2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right) \frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x} \mathrm{d}x$.

— (CCINP 11) 1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
  On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f\left(x_n\right))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
  Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
  2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin\left(nx\right)}{1 + n^2x^2}$.
  a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
  b. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

— (CCINP 12) 1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
  On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$. Démontrer que f est continue en x_0.
  2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$.
  La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

— (CCINP 14) 1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
  Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n\left(x\right) \mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x$.
  2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
  3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

— (CCINP 15) Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.

3. La série de fonctions $\sum \frac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

— (CCINP 17) Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.

1. Démontrer l'implication :

la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur $A \;\Rightarrow\;$ la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) = n x^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; +\infty[$.

$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0; +\infty[$? Justifier.

— (CCINP 18) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2.a. La fonction S est-elle continue sur D ?

b. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

c. Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

— (CCINP 27) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n\,(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n\,(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in \,]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

— (CCINP 53) On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + n^4 x^4}$.

1.a. Prouver que $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$? c. $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.