Colle de la semaine du 20/11

Pour cette semaine le programme porte sur les suites et séries de fonctions et le début des séries entières :

Suites et séries de fonctions

- Convergence simple et uniforme pour une suite de fonctions ; la convergence uniforme implique la convergence simple ; exemples divers.
- Convergence simple, uniforme et normale pour une série de fonctions ; la convergence uniforme équivaut à la convergence simple et la convergence uniforme du reste vers la fonction nulle ; la convergence normale implique la convergence uniforme ; exemples divers.
- Théorème de continuité : Si (f_n) est une suite de fonctions continues, la convergence uniforme de (f_n) (resp. $\sum f_n$) sur une partie X implique la continuité de la fonction limite (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) sur X.
- Théorème de la double limite : pour (f_n) une suite de fonctions sur X telle que, pour tout n, f_n admet une limite l_n en un point a adhérent à X, on a :
  si (f_n) converge uniformément vers f sur X alors (l_n) admet une limite l et f tend vers l en a,
  si $\sum f_n$ converge uniformément sur X alors la série $\sum l_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ tend vers $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n$ en a.
- Théorème d'intégration : Si (f_n) est une suite de fonctions continues, la convergence uniforme de (f_n) (resp. $\sum f_n$) vers f (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$) sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ implique : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$ (resp. $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt$).
- Théorème de la classe $\mathcal{C}^1$: Si (f_n) est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge simplement vers f sur I et telle que $(f_n^{'})$ converge uniformément vers g sur tout segment de I alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f^{'} = g$. Thm. de dérivation terme à terme pour les séries de fonctions.
- Extension du thm. précédent pour une suite ou série de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Exemple : fonction zêta de Riemann.
- Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme de fonctions en escalier ; révisions sur les sommes de Riemann.
- Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de fonctions polynômiales.

Séries entières d'une variable complexe :

- Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence
- Utilisation des relations de comparaison et de la règle de d'Alembert pour déterminer le R.C.V.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même R.C.V. ; invariance du R.C.V. par décalage d'indice.

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :

- La convergence uniforme d'une suite de fonctions implique la convergence simple.
- $\sum f_n$ converge normalement sur $I \Rightarrow \sum f_n$ converge uniformément sur I.
- Si (f_n), suite de fonctions continues, converge uniformément vers f sur X alors f est continue sur X.
- Théorème d'intégration sur un segment pour une suite de fonctions.
- thm. de classe $\mathcal{C}^1$ pour une suite de fonctions.
- La fonction zeta de Riemann est de classe C^∞ sur son ensemble de définition.
- La fonction zeta de Riemann tend vers 1 en $+\infty$. - lemme d'Abel.

Approfondissements :
- Théorème d'approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier.
- Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, m.q. $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\, dt = 0$.
- Si f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômiales alors f est une fonction polynômiale.
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $(f_n) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $K \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est K-lipschitzienne et que (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ vers une fonction f. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
- Soit E un espace vectoriel normé.
1. Soit (f_n) une suite de fonction de X dans E où X est une partie de E et $a \in X$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers une fonction f continue sur X. Montrer que pour toute suite (a_n) d'éléments de X qui converge vers a on a $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
2. Soit K un compact non vide de E et, $f : K \to K$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$, $x \neq y$, $||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$. Montrer que f possède un unique point fixe.

3. Soit K un convexe compact de E et $f : K \to K$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que f admet un point fixe dans K.

Les approfondissements concernent les élèves suivant : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

- (CCINP 8) 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.
  a. Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
  b. Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
  2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
  a. Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. b. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.
- (CCINP 9) 1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
  2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.
  a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
  b. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?
  c. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?
  d. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
- (CCINP 10) On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.
  1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
  2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.
- (CCINP 11) 1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
  On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
  Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.
  2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.
  a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
  b. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.
- (CCINP 12) 1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
  On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$. Démontrer que f est continue en x_0.
  2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0; 1],\ g_n(x) = x^n$.
  La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?
- (CCINP 14) 1. Soit a et b deux réels donnés avec $a < b$ et (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.
  Démontrer que si la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
  2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.
  3. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.
- (CCINP 15) Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.
  2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, normalement convergente sur X est uniformément convergente sur X.
  3. La série de fonctions $\sum \dfrac{n^2}{n!}z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

— (CCINP 17) Soit $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.
1. Démontrer l'implication :
la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A $\Rightarrow$ la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers 0 sur A
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;+\infty[,\ f_n(x) = nx^2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
Prouver que $\sum f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
$\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0;+\infty[$? Justifier.

— (CCINP 27) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$.
2. Soit $a \in]0, 1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, 1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

— (CCINP 53) On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.
1.a. Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a, b]$? sur $[a, +\infty[$?
c. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

— (CCINP 16) On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0, 1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$.
On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.
1. Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

— (CCINP 48) $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f.
a. Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0, 1]$ vers f^2.
b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
c. Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0, 1]$.

— (CCINP 20) 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \cos n z^n.$$

— (CCINP 21) 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$?

— (CCINP 47) Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n x^{2n}}{n} \qquad \sum a_n x^n \text{ avec } \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$$