Colle de la semaine du 27/11

Pour cette semaine le programme porte sur les séries entières :

Séries entières d'une variable complexe :

- Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence.
- Utilisation des relations de comparaison et de la règle de d'Alembert pour déterminer le R.C.V.
- $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même R.C.V. ; invariance du R.C.V. par décalage d'indice.
- Continuité de la fonction somme.
- Opérations algébriques sur les séries entières : produit par un scalaire, somme et produit de Cauchy.
- Séries entières usuelles de la variable complexe : e^zet $\frac{1}{1-z}$.

Séries entières à variable réelle :

- Définition, rayon de convergence, propriétés héritées des séries entières à variable complexe.
- Convergence normale sur tout$[-r,r]$ inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
- Continuité de la fonction somme, théorème d'Abel radial : si R est le R.C.V. de $\sum a_n x^n$ et que $\sum a_n R^n$ converge alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to R^-}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ (il y a C.V.U. sur $[0,R]$).
- Primitivation de la fonction somme.
- Dérivation de la fonction somme.
- Relation entre coefficients et la fonction somme ($a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$) ; si les sommes de deux séries entières coïncident au voisinage de 0 (ou plus généralement sur $]0,r[$) les coefficients sont égaux ; cas d'une fonction somme paire ou impaire (coefficients d'ordre impairs ou pairs nuls).
- Développement en série entière en 0 et en un point quelconque.
- Si une fonction est D.S.E. en 0 elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ et est la somme de sa série de Taylor.
- Séries entières usuelles de la variable réelle : e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, $\ln(1+x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$ et $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :</u>

- Lemme d'Abel.
- R.C.V. d'une somme de deux séries entières.
- Continuité de la fonction somme d'une série entière (de la variable réelle ou complexe).
- D.S.E. de $(1+x)^\alpha$ (avec indications : résolution de $(1+x)y' = \alpha y$ et unicité du problème de Cauchy).
- D.S.E. de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ puis de la fonction arcsin (ce n'est pas un D.S.E. usuels).
- Montrer que le prolongement par continuité à $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \frac{e^x-1}{x}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

<u>Approfondissements :</u>

- Théorème d'Abel radial.
- Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$ pour $x \in]-1,1[$ alors $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{\ln(2)}\ln(1-x)$.
- principe des zéros isolés
- formule de Cauchy : si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R,R[$ alors pour tout $r \in]0,r[$, $a_n = \dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt$.

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul.

<u>Exercices de la banque CCINP à préparer :</u>

- (CCINP 2) On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.
  1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
  2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r,r[$ (où $r>0$).
  Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
  3. a.Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R>0$. On pose, pour tout $x \in]-R,R[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
  Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
  b. En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

— (CCINP 18) On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2.a. La fonction S est-elle continue sur D ?
b. Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
c. Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$

— (CCINP 20) 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Déterminer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1} \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \cos n z^n.$$

— (CCINP 21) 1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

— (CCINP 22) 1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$? En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

— (CCINP 23) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.
1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ ont le même rayon de convergence. On le note R.
2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

— (CCINP 24) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
1. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
2.a. Déterminer $S(x)$.
b. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0\ .$$

Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

— (CCINP 47) Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{3^n x^{2n}}{n} \qquad \sum a_n x^n \text{ avec } \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$$