Colle de la semaine du 4/12

Le programme porte sur l'intégration des suites et séries de fonctions et les intégrales à paramètres :

- Théorème de convergence dominée.
- Théorème d'intégration terme à terme ; appliquer le thm. d'intégration terme à terme n'est pas la même chose que d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.
- théorème de convergence dominée à paramètre continu.
- Théorème de continuité des intégrales à paramètres.
- Théorème de convergence dominée avec paramètre continu.
- Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètres puis extension à la classe $\mathcal{C}^k$.
- Etude de la fonction Γ (hors programme).

Énoncés, exemples et démonstrations à préparer :
- Énoncer correctement l'un des thm. du programme.
- Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- Donner en le justifiant le tableau de variation de la fonction Γ.

Approfondissements : Rien de particulier cette semaine

Les approfondissements concernent les élèves suivants : Chaubin, Maniols, Lagrue, Eymard-Leblanc, Koueta, Grandville, Rousselier, Chaumont, Benyeloul, Le Roy.

Exercices de la banque CCINP à préparer :

- (CCINP 19) 1. Prouver que, pour tout entier naturel n, $f_n : t \longmapsto t^n \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln t dt$.

  2. Prouver que $f : t \longmapsto \mathrm{e}^t \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t \ln t dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nn!}$.
- (CCINP 25) 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

  2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
- (CCINP 29) On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, t \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.
  1. Démontrer que : $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

  On pose alors : $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

  2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
  3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.
- (CCINP 30) 1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.

  2. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

  3.a. Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
  b. Résoudre (E).
- (CCINP 49) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

  On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,+\infty[\,,\ f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}$.

  1.a. Justifier que la suite (a_n) est bornée.
  b. Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

  On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

  2.a. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t) \mathrm{d}t$. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, \mathrm{d}t$.

  b. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

— (CCINP 50) On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2\,t}}{x+t}\mathrm{d}t$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \longmapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.