

## Géométrie

**Lois entrée/sortie géométrique :** pour relier le paramètre d'entrée (évolution fournie par un actionneur) au paramètre de sortie (mouvement récupéré en sortie).

**a) Aspect linéaire :** systématique

On parcourt le mécanisme en passant par un point  $A_i$  de chaque liaison :

$$\boxed{\vec{A}_1\vec{A}_2 + \vec{A}_2\vec{A}_3 + \dots + \vec{A}_{n+1}\vec{A}_1 = \vec{0}} \Rightarrow 3 \text{ équations scalaires par projection dans une base commune}$$

**b) Aspect angulaire :** pas souvent

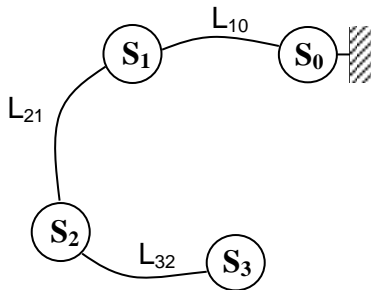
A partir d'une base de référence, on parcourt les différentes bases attachées aux différents solides :

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + \dots + (\vec{x}_n, \vec{x}_0) = 0$$

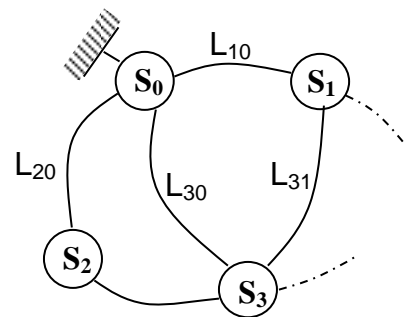
idem dans deux autres plans perpendiculaires  $\Rightarrow 3$  équations scalaires.

**c) Type de chaînes suivant le graphe de liaisons**

**Chaîne simple ouverte**



**Chaîne complexe fermée**



Plusieurs fermetures géométriques sont nécessaires dans ce cas

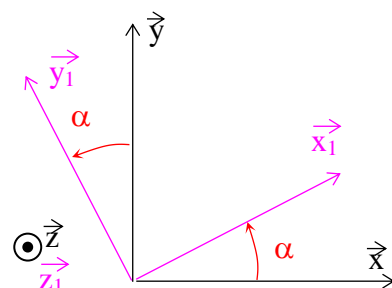
**d) En dérivant, on obtient la loi entrée/sortie cinématique ou en écrivant la fermeture cinématique issue de la composition des mouvements**

## Cinématique

**Cinématique du point :**

- $\vec{V}(M/R) = \left[ \frac{d\vec{OM}}{dt} \right]_R = \frac{d\vec{OM}}{dt}_{/R}$       $O$  : origine ou point fixe du repère  $R$
- $\vec{a}(M/R) = \vec{\Gamma}(M/R) = \left[ \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right]_R$
- $\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R = \frac{da}{dt} \vec{x} + \frac{db}{dt} \vec{y} + \frac{dc}{dt} \vec{z} = \dot{a} \vec{x} + \dot{b} \vec{y} + \dot{c} \vec{z}$      si  $\vec{U} = \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$  est exprimé dans le repère  $R$
- $\left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_R = \left[ \frac{d\vec{U}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{U}(t)$

Exemple :  $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\alpha} \vec{z}$           $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_1) = (\vec{y}, \vec{y}_1)$



## Cinématique du solide :

- $\vec{V}(B \in R_1/R_0) = \vec{V}(A \in R_1/R_0) + \overline{BA} \wedge \vec{\Omega}(R_1/R_0)$  (Babar)
- $\vec{V}(A \in R_n/R_0) = \vec{V}(A \in R_n/R_{n-1}) + \vec{V}(A \in R_{n-1}/R_{n-2}) + \dots + \vec{V}(A \in R_1/R_0)$
- $\vec{\Omega}(R_n/R_0) = \vec{\Omega}(R_n/R_{n-1}) + \vec{\Omega}(R_{n-1}/R_{n-2}) + \dots + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$
- $V(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{array} \right\}$  torseur cinématique de S/R
- $V(R_n/R_0) = V(R_n/R_{n-1}) + V(R_{n-1}/R_{n-2}) + \dots + V(R_1/R_0)$  (en un même point de réduction)

## Contact entre solides :

Condition de non glissement = vitesse de glissement nulle  $\vec{V}(I, S_1/S_2) = \vec{0}$  avec I point de contact entre  $S_1$  et  $S_2$ .



Le point I étant la plupart du temps ni fixe dans  $S_1$  ni fixe dans  $S_2$ , on ne peut expliciter cette condition en dérivant un vecteur position (c'est une vitesse d'entraînement). Donc on décompose...

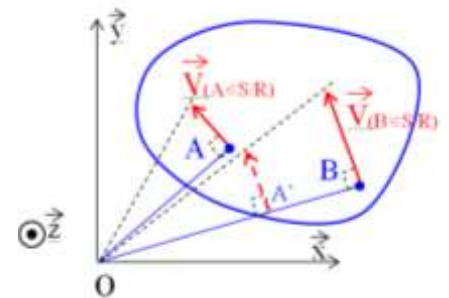
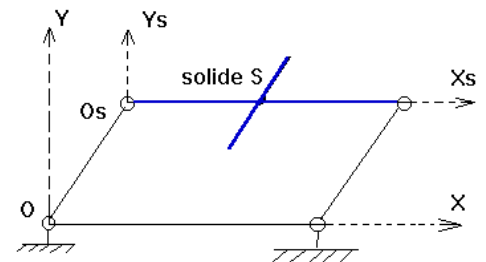
## Forme des torseurs cinématiques associés aux liaisons parfaites (sans frottement) : Voir Tableau

### Interprétation graphique :

#### Cas particuliers :

- Translations rectiligne et circulaire :  $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{0}$  donc la vitesse est la même partout.

*Exemple de translation circulaire : le parallélogramme déformable*

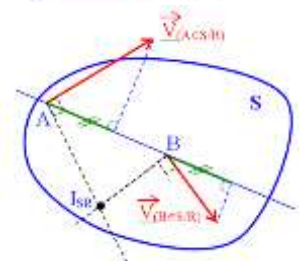
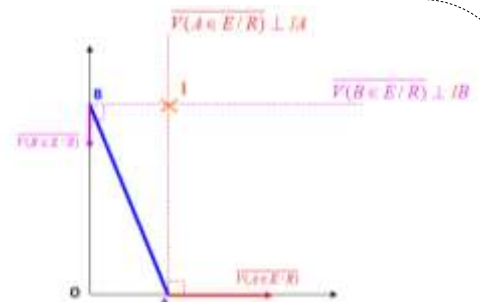


- Rotation autour d'un axe  $(O, \vec{z})$  :  $\vec{V}(O \in S/R) = \vec{0}$ .  
La vitesse est orthoradiale et proportionnelle au rayon («  $V = R \cdot \omega$  »)

#### Propriétés graphiques :

- Centre Instantané de Rotation :  $\vec{V}(I_{SR} \in S/R) = \vec{0}$ .  
Il se trouve à l'intersection des  $\perp$  aux vitesses  $\Rightarrow$  tout mouvement peut s'interpréter comme une rotation...

*Exemple : une échelle contre un mur qui tombe*



- Équiprojectivité :  $\vec{V}(B \in S/R) \cdot \overline{AB} = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \overline{AB}$

Pour info

# Statique

## Modélisation effort :

- **Action hydrostatique :** 
$$\mathbb{T}(\text{fluide} \rightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p(M) \vec{n}(M) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p(M) \vec{n}(M)) dS \end{array} \right\}$$

- **Action de contact entre solides :** 
$$\mathbb{T}(S_1 \rightarrow S_2) = \left\{ \begin{array}{l} \int_S -p(M) \vec{n}(M) dS + f p(M) \vec{t}(M) dS \\ \int_S \vec{OM} \wedge (-p(M) \vec{n}(M) dS + f p(M) \vec{t}(M) dS) \end{array} \right\} \quad \text{A la limite du glissement}$$

$p(M)$  = pression de contact en M

$\vec{n}(M)$  = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, orienté vers l'extérieur du solide isolé.

$\vec{t}(M)$  = vecteur unitaire du plan tangent commun en M opposé à la vitesse de glissement.

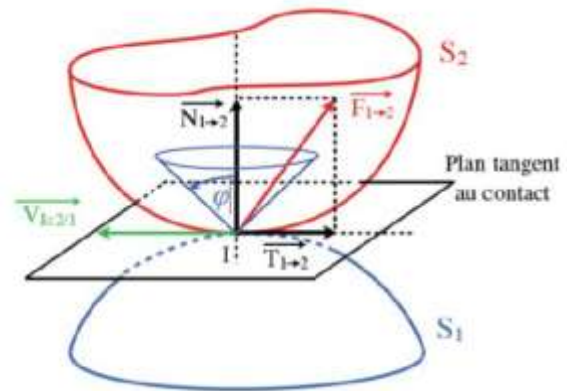
$f$  = coefficient de frottement ( $f = \tan \varphi$  avec  $\varphi$  l'angle de frottement)

$S$  = surface de contact

- **Contact ponctuel avec frottement sec (modèle de Coulomb)**

Cas du contact ponctuel :  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{N}_{1 \rightarrow 2} + \vec{T}_{1 \rightarrow 2}$

- Si  $\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$  :  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$  et  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  de direction inconnue ( $\in$  plan tangent)
- Si  $\vec{V}(I \in 2/1) \neq \vec{0}$  :  $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$  et  $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$  opposé à  $\vec{V}(I \in 2/1)$



- **Contact surfacique avec frottement sec :** Couple résistant constant

## Forme des torseurs d'actions mécaniques associés aux liaisons parfaites (sans frottement) :

### Voir Tableau

⚠ Avec hypothèse **PB Plan** (x,y):  $\mathbb{T}(S_1 \rightarrow S_2) = \left\{ \begin{array}{l} X \quad - \\ Y \quad - \\ - \quad N \end{array} \right\}_R$  on a moins d'inconnues à gérer...

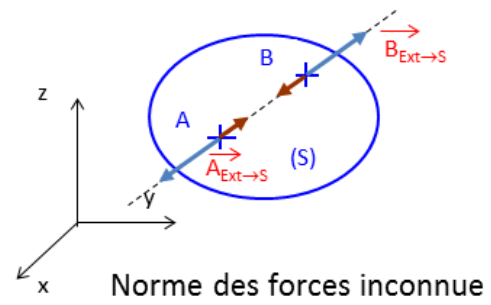
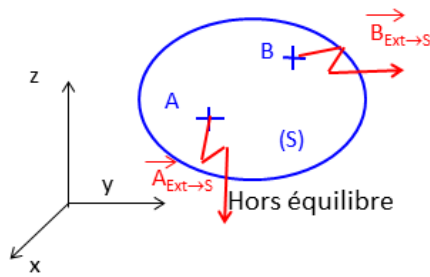
## Principe Fondamental de la Statique :

- $\mathbb{T}(\bar{E} \rightarrow E) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Théorème de la Résultante Statique : } E \text{ en équilibre / } R_g \Rightarrow \vec{R}(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \\ \text{Théorème du Moment Statique : } E \text{ en équilibre / } R_g \Rightarrow \vec{M}_O(\bar{E} \rightarrow E) = \vec{0} \\ (\forall \text{ le point } O) \end{array} \right.$

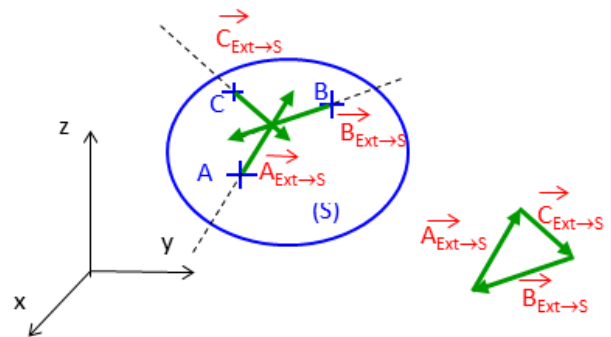
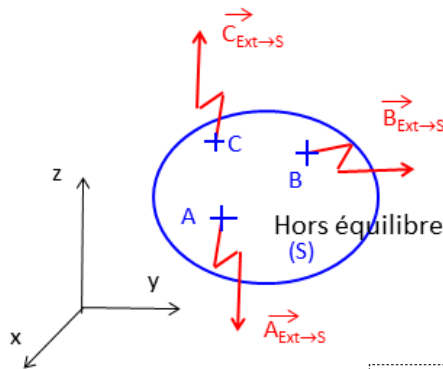
- **Théorème des actions réciproques :**  $\mathbb{T}(E_2 \rightarrow E_1) = - \mathbb{T}(E_1 \rightarrow E_2)$

**Interprétation graphique :**

- si un solide (ou un ensemble de solides) est en équilibre sous l'action de **2 efforts** modélisables par des glisseurs, ceux-ci sont **colinéaires, de somme nulle et de même droite support**.



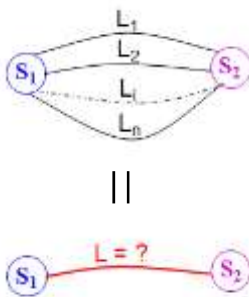
- si un solide (ou un ensemble de solides), soumis à **3 actions** modélisables par des glisseurs, est en équilibre, alors ces trois glisseurs sont : **coplanaires, concourants ou parallèles, de somme vectorielle nulle**



Pour info

**Liaison équivalente : pas fréquent**

Liaisons en parallèle :



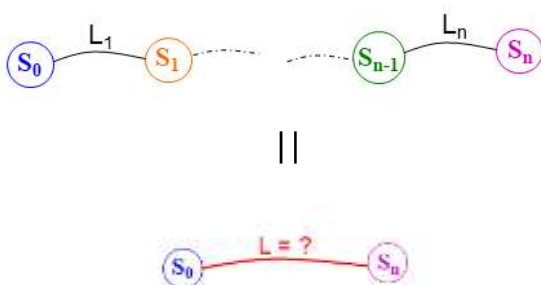
*Détermination avec les torseurs d'inter-efforts :*

$$T_{L_n}(S_1 \rightarrow S_2) = \sum_{i=1}^n T_{L_i}(S_1 \rightarrow S_2)$$

*Détermination avec les torseurs cinématiques :*

$$V_{L_n}(S_1/S_2) = V_{L_1}(S_1/S_2) = \dots = V_{L_i}(S_1/S_2) \quad \forall i$$

Liaisons en série :



*Détermination avec les torseurs cinématiques : (Loi de composition des mouvements)*

$$V_{L_n}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^n V_{L_i}(S_i/S_{i-1})$$

*Détermination avec les torseurs d'inter-efforts :*

$$T_{L_n}(S_n/S_0) = T_{L_n}(S_n/S_{n-1}) = \dots = T_{L_1}(S_1/S_0)$$