

Exercice 1 : Système de stationnement automatique (extrait Centrale MP 2021)

L'intervention du système de stationnement se fait sur la direction du véhicule : le système gère automatiquement l'orientation des roues avant du véhicule (et donc celle du volant). Quant au conducteur, il contrôle le déplacement du véhicule (marche avant ou arrière) et la vitesse du véhicule avec la pédale d'accélération. Cette vitesse est limitée et est supposée constante pendant la manœuvre.



Les principaux éléments technologiques entrant en jeu dans cette automatisation des manœuvres de stationnement sont : le calculateur du véhicule, la motorisation de la direction du véhicule et les capteurs à ultrasons (généralement entre 4 et 6 capteurs à l'avant et à l'arrière. Voir annexe pour le principe de fonctionnement).

La procédure d'insertion automatisée du véhicule dans une place de stationnement, du point de vue du conducteur, est décrite par la figure 1 dans le cas d'une insertion en créneau parfaitement exécuté. Sur la figure, le véhicule est équipé de 4 capteurs à ultrasons à l'avant et à l'arrière.

Lorsque le conducteur voit une place libre devant lui, il active le stationnement automatique par l'appui d'un bouton dédié sur son tableau de bord. La voiture est parallèle au trottoir et se déplace dans le sens normal de la marche (repère 1 figure 1).

Le déclenchement du stationnement automatique a pour conséquence la détection de l'emplacement libre par les capteurs ultrasons équipant la voiture lorsque celle-ci se déplace (repère 2 figure 1).

Si la place de stationnement est suffisamment longue et profonde alors le conducteur est prévenu que la manœuvre est possible par un voyant lumineux situé sur son tableau de bord. Le conducteur doit alors arrêter son véhicule (repère 3 figure 1) et mettre la boîte de vitesses au point mort (position neutre).

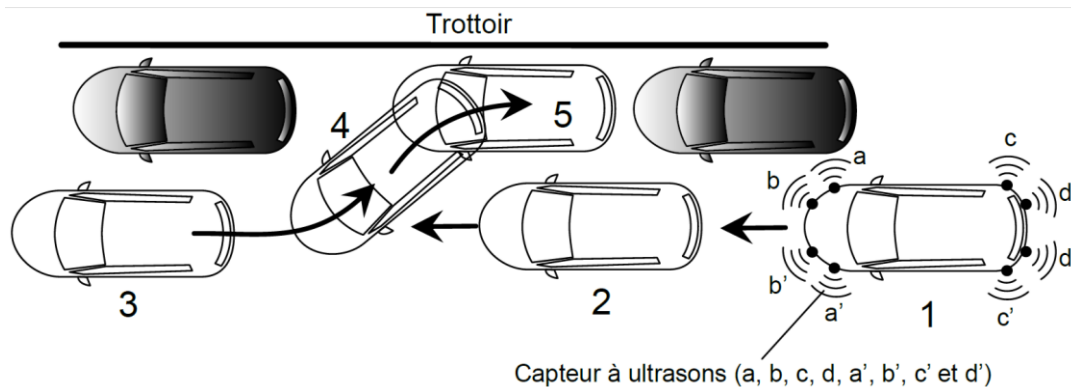


Figure 1 : Manoeuvre d'insertion en créneau dans une place de stationnement

Un signal sur le tableau de bord invite alors le conducteur à passer la marche arrière et à appuyer sur la pédale d'accélération afin que le véhicule commence la manœuvre (repères 4 et 5 figure 1). Pendant la manœuvre le conducteur ne touche pas le volant.

Le processus d'automatisation de l'insertion du véhicule dans une place de stationnement en créneau suit un algorithme dont l'action dépend du type de manœuvre, de l'espace de stationnement et de la géométrie du véhicule. Cet algorithme gère :

- la détection d'une place libre suffisamment longue et profonde pour la manœuvre (non étudié ici) ;
- le calcul de la trajectoire à suivre ;
- la commande de la direction du véhicule.

Trajectoire à suivre pour le stationnement

Une fois que le véhicule a longé une place et qu'il est à l'arrêt (position 3 figure 1) la manœuvre de type créneau débute par une phase de recul rectiligne jusqu'à ce que le train arrière soit au niveau de l'extrémité arrière du véhicule déjà stationné (point B figure 2). Toujours en recul, il s'en suit le braquage des roues (dans un sens puis l'autre) pour l'insertion dans la place libre.

La trajectoire du véhicule est définie par celle du point F , centre du train arrière (figure 2). La trajectoire « idéale » de F est donc une portion linéaire jusqu'au point O suivie de deux arcs de cercles identiques (sur les cercles C_1 et C_2) tangents en un point P . Ce dernier est le point où le véhicule fait un angle de 45° par rapport au trottoir. Le point O est défini à partir de la longueur L de la place de stationnement, des dimensions du véhicule et de la distance D de ce dernier avec le véhicule déjà stationné en amont de la place libre. Le tableau 1 précise les paramètres géométriques qui caractérisent la trajectoire du véhicule pendant la manœuvre de stationnement.

Q1. Parmi tous les paramètres géométriques définis dans le tableau 1 ainsi que sur la figure 2, identifier ceux qui sont propres au véhicule et ceux qui se déduisent directement des informations des capteurs à ultrasons. Que reste-t-il donc à déterminer afin que la géométrie de la trajectoire du point F soit définie ?

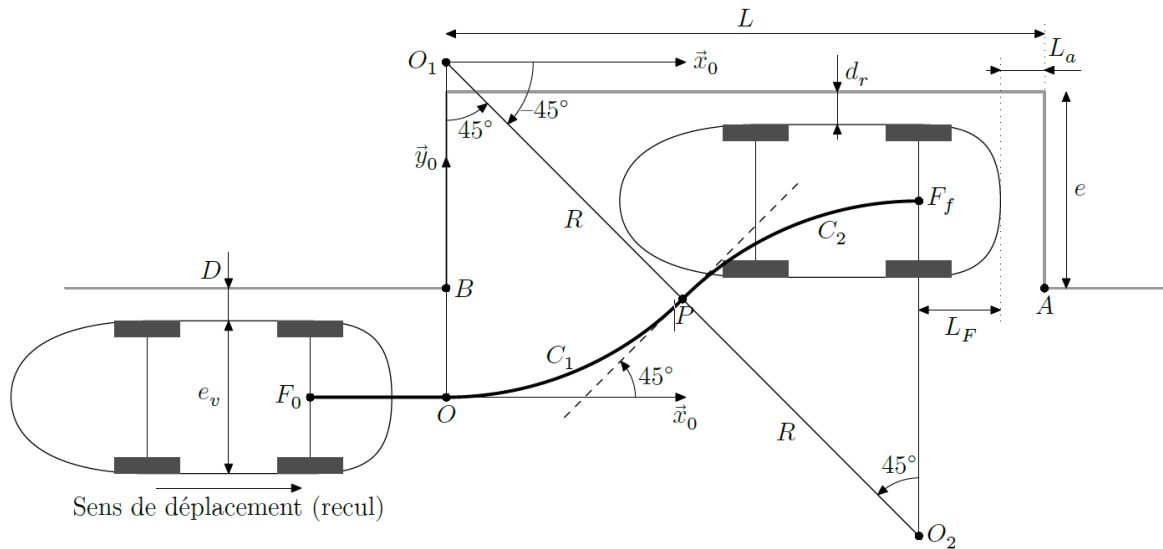


Figure 2 : Trajectoire à suivre pour la manœuvre

— Paramètres de la place de stationnement
• L longueur de la place libre ;
• e largeur de la place libre.
— Autres paramètres géométriques
• D distance latérale par rapport au véhicule déjà stationné ;
• L_F distance train arrière/extrémité arrière du véhicule ;
• R rayon des cercles C_1 et C_2 composant la trajectoire ;
• L_a distance entre l'arrière du véhicule en manœuvre et du véhicule placé derrière ;
• e_v largeur du véhicule en manœuvre ;
• d_r distance latérale entre le véhicule stationné et tout obstacle limitant la largeur de la place de stationnement.

Tableau 1 : Définition des paramètres géométriques qui caractérisent la trajectoire

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est un repère galiléen défini au point O .
- Les points O_1 et O_2 sont respectivement les centres des cercles C_1 et C_2 .
- Le point P est milieu de $[O_1O_2]$.
- Les cercles C_1 et C_2 sont de même rayon R .
- La position du point F est repérée par un angle $\theta_1(t)$ (figure 3) dans le repère $(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et par un angle $\theta_2(t)$ (figure 3) dans le repère $(O_2, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Le point F_0 correspond à la position initiale du point F et F_f à celle de la position finale lors de la phase d'insertion.

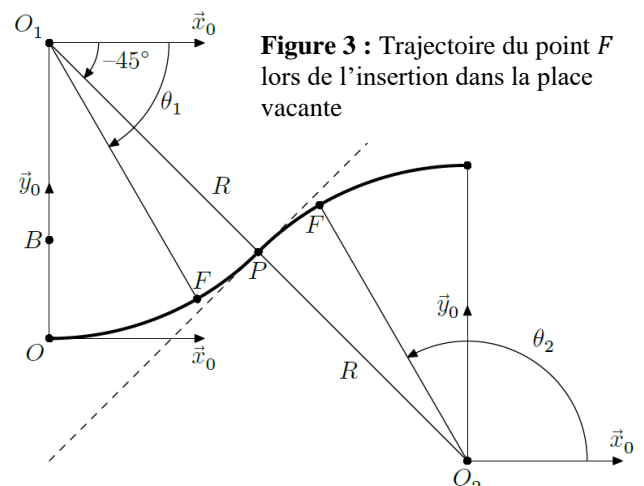


Figure 3 : Trajectoire du point F lors de l'insertion dans la place vacante

- Q2.** Les coordonnées du point P dans le repère R_0 sont notées x_p et y_p : $\vec{OP} = x_p \vec{x}_0 + y_p \vec{y}_0$. Déterminer l'expression de x_p et y_p en fonction des paramètres géométriques L , e , L_F , d_r , L_a et D . Le rayon R n'étant pas encore déterminé, il ne doit pas apparaître dans les expressions de x_p et y_p .
- Q3.** Déterminer l'expression de R en fonction de L , L_a et L_F qui permettra de définir le cercle C_1 (et donc le cercle C_2).

Le cercle C_1 (et donc C_2 par symétrie) est maintenant défini, donc la trajectoire que le point F devra suivre l'est également. Afin de vérifier en simulation la validité de la trajectoire déterminée, il est nécessaire de déterminer les coordonnées du point F lors du déplacement du véhicule en insertion dans la place de stationnement.

- Q4.** Exprimer dans R_0 les coordonnées x et y du point F parcourant la portion de cercle C_2 en fonction de R et θ_2 : $\vec{OF} = x \vec{x}_0 + y \vec{y}_0$. Préciser l'intervalle dans lequel θ_2 doit varier.

Direction du véhicule prototype

Un véhicule radiocommandé à commande par servo-moteur a été choisi pour l'implantation de l'algorithme de stationnement automatique et l'expérimentation.

La détermination de l'angle d'orientation des roues directrices (noté α sur la figure 4) sera limitée à la première portion de cercle C_1 pour laquelle le véhicule est en rotation autour du point O_1 . Du fait de la symétrie de la trajectoire, il n'est donc pas nécessaire de prolonger la détermination de α à la portion de cercle C_2 .

L'insertion du véhicule dans la place de stationnement peut se décomposer en trois phases à partir de l'instant t_0 où le véhicule est à l'arrêt après avoir longé la place de stationnement envisagée.

- *Phase 0* : recul rectiligne permettant au point F d'atteindre le point O . La durée de cette phase est notée ΔT_0 .
- *Phase 1* : recul avec braquage des roues directrices, l'objectif étant que le point F parcourt la portion de cercle C_1 jusqu'au point P . La durée de cette phase est notée ΔT_1 .
- *Phase 2* : recul avec contre-braquage des roues directrices, l'objectif étant que le point F parcourt la portion de cercle C_2 jusqu'au moment où le véhicule est dans l'alignement de la place de stationnement. Comme la manœuvre de stationnement se fait à vitesse constante et que les portions de cercle C_1 et C_2 sont symétriques, alors la durée de cette phase vaut également ΔT_1 .

Lors des phases de stationnement et entre chaque changement d'orientation des roues directrices du véhicule, le véhicule recule à une vitesse supposée constante v telle que

$$\vec{V}_{(C,V/R_1)} = v \vec{x}_r.$$

Dans la notation $\vec{V}_{(C,V/R_1)}$, V désigne le véhicule et

$R_1(O_1, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ le repère galiléen défini au point O_1 .

Le paramètre angulaire $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{y}_v)$ (figure 3) définit la position relative de la base $(\vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$ par rapport à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Ainsi $\vec{\Omega}_{(V/R_1)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$.

La figure 4 représente le véhicule lors de la phase 1 de la manœuvre de stationnement. Comme l'orientation des roues directrices (roues avant) sont liées entre elles, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les deux roues. α désigne l'angle que fait la roue intérieure au virage (côté trottoir) par rapport au véhicule (figure 4).

Ainsi $\alpha = (\vec{x}_v, \vec{x}_r) = (\vec{y}_v, \vec{y}_r)$ avec $R_r(C, \vec{x}_r, \vec{y}_r, \vec{z}_r)$ un repère orthonormé direct défini au point C , centre de la roue intérieure, et tel que (C, \vec{y}_r) est confondu avec l'axe de cette roue (figure 4) et $R_v(F, \vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$ un repère orthonormé défini au point F et lié au véhicule (figure 4).

Données : $\vec{FO}_1 = R \vec{y}_v$, $\vec{CF} = L_t \vec{x}_v - e_t \vec{y}_v$ où C est le centre de rotation de la roue intérieure avant par rapport au véhicule.

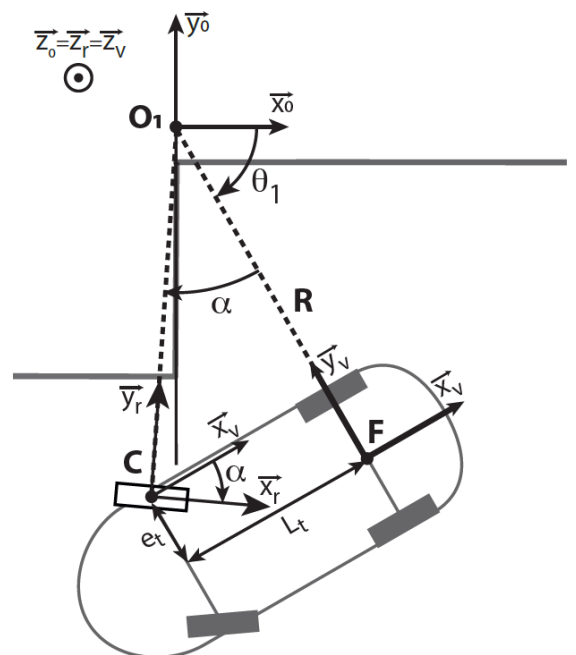


Figure 4 : Paramétrage lors de la manœuvre

- Q5. Déterminer en projection dans la base $(\vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{z}_v)$ l'expression de $\vec{V}_{(C,V/R_1)}$ en fonction de R, e_t, L_t et $\dot{\theta}_1$.
- Q6. On rappelle que $\vec{V}_{(C,V/R_1)} = v \vec{x}_r$. À partir du résultat de la question précédente, déterminer, en fonction de R, e_t, L_t , l'expression de $\tan(\alpha)$ des roues directrices lors de la phase 1 de la manœuvre. Cet angle noté α_{c1} est constant puisque le point F parcourt C_1 . α_{c1} représente la consigne angulaire à imposer aux roues directrices lors de la phase 1.

Lors de la manœuvre de stationnement, l'angle des roues devra suivre une consigne de position angulaire notée $\alpha_c(t)$ à définir pour respecter les trois phases de l'insertion dans la place.

- Q7. Sous forme d'un graphique, proposer l'évolution temporelle de la consigne $\alpha_c(t)$ pour que le véhicule puisse s'insérer dans la place de stationnement selon les trois phases de manœuvre définies précédemment. Sur ce graphique devront apparaître les ordonnées particulières que α devra atteindre ainsi que les durées des différentes phases de la manœuvre en fonction des données littérales du texte.

La commande angulaire des roues directrices est fournie figure 5. Cette commande permet d'imposer l'angle des roues directrices $\alpha(t)$ (Transformée de Laplace notée $A(p)$) en fonction d'un angle de consigne $\alpha_c(t)$ (Transformée de Laplace notée $A_c(p)$).

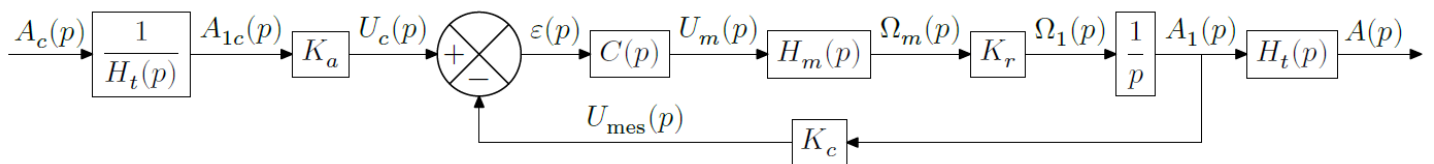


Figure 5 : Schéma blocs de la commande en position des roues directrices du véhicule

La boucle d'asservissement est réalisée sur le servomoteur. L'angle de consigne $\alpha_c(t)$ est converti en angle de consigne $\alpha_{1c}(t)$ pour le servomoteur. Le bloc $H_t(p)$ modélise dans le domaine de Laplace la relation entre $\alpha(t)$ et $\alpha_1(t)$ l'angle de rotation en sortie du servomoteur (voir figure 6). Ainsi le bloc $H_t(p)$ correspond à la modélisation de la transmission de mouvement dans la direction (ensemble des bielles et des bras composant la direction du véhicule (voir annexe)).

- Q8. A partir de l'annexe, donner le nom de chaque constituant modélisé par : $H_m(p), K_c, K_a$ et K_r . Justifier la fonction de transfert $\frac{1}{p}$ et déterminer l'expression simple de K_a pour que la structure bouclée modélisée soit un asservissement de l'angle $\alpha(t)$.

La figure 6 représente le schéma cinématique de la direction dans le plan (A, \vec{x}, \vec{y}) avec $R(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère galiléen dont le vecteur \vec{z} est vertical ascendant. La direction est sans jeu et les liaisons sont supposées parfaites.

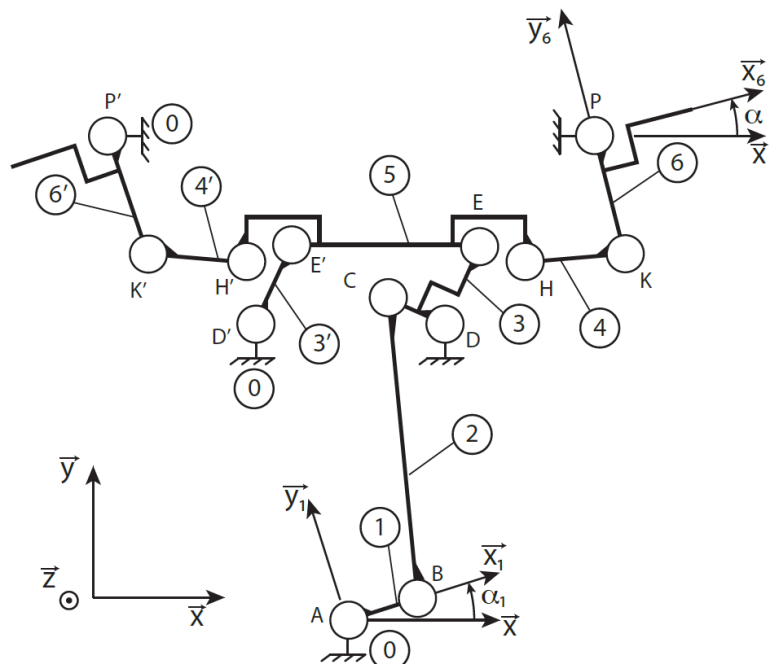


Figure 6 : Schéma cinématique plan de la direction du véhicule radio commandé

$R_1(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ est un repère orthonormé lié au bras **1**,
 $R_{61}(P, \vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z})$ un repère orthonormé lié à l'ensemble **6**
 {fusée + roue}. Ainsi $\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1)$ et $\alpha = (\vec{x}, \vec{x}_6)$.
 Le bâti **0** représente le châssis du véhicule RC. Les deux
 roues sont orientées grâce à un seul actionneur.
 Afin de déterminer l'expression de $\alpha(t)$ en fonction de
 $\alpha_1(t)$, il est nécessaire d'étudier deux chaînes fermées de
 solides et de liaisons : la chaîne {0, 1, 2, 3, 0} et la chaîne
 {0, 3, 4, 6, 0}.
 La figure 7 présente le paramétrage lié aux solides **1**, **2** et **3**.

Paramétrage

$R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ est un repère orthonormé lié à la tige **2** et
 $R_3(D, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z})$ un repère orthonormé lié à la bielle de
 renvoi **3**.

$$\vec{AB} = l_1 \vec{x}_1, \vec{BC} = b \vec{x}_2, \vec{CD} = (a - l) \vec{x}_3,$$

$$\vec{AD} = a \vec{x} + b \vec{y}, \vec{DE} = l_3 \vec{y}_3.$$

$$\alpha_1 = (\vec{x}, \vec{x}_1), \alpha_2 = (\vec{x}, \vec{x}_2) \text{ et } \alpha_3 = (\vec{x}, \vec{x}_3).$$

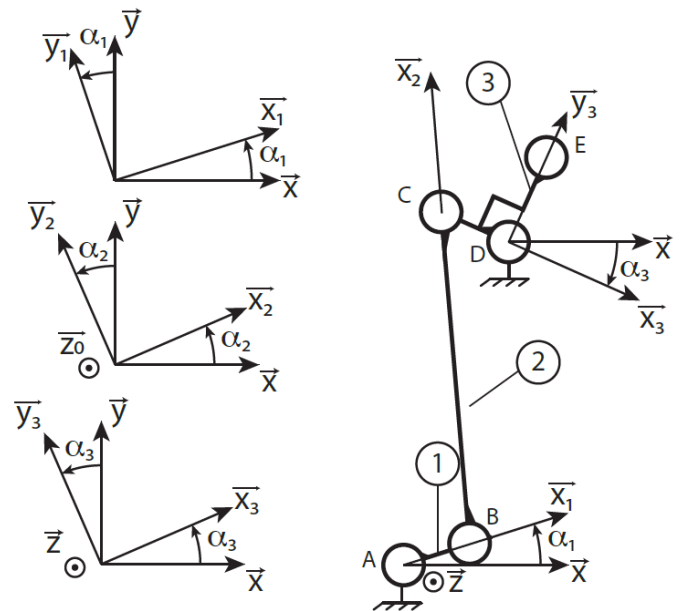


Figure 7 : Schéma cinématique plan de la direction du véhicule radio commandé

Q9. En exploitant la fermeture géométrique de la chaîne {0, 1, 2, 3, 0} et en faisant l'hypothèse que l'angle α_2 varie très peu ($\alpha_2(t) \approx 90^\circ$), montrer que $\sin(\alpha_3) = k \sin(\alpha_1)$ et préciser l'expression de k .

La figure 8 représente l'évolution de α_3 en fonction de α_1 pour un seul des deux sens de rotation des roues (α_3 varie de 0° à -45°). Lorsque les roues sont parallèles au véhicule $\alpha_1 = 0^\circ$ et $\alpha_3 = 0^\circ$.

Q10. À partir de la figure 8 justifier que $\alpha_3 = K_{31} \alpha_1$ en précisant la valeur de la constante K_{31} .

En raisonnant de façon similaire, l'étude de la chaîne fermée {0, 3, 4, 6, 0} permet de montrer que α est proportionnel à α_3 .

Ainsi, pour la suite de l'étude il est considéré que $\alpha = \lambda \alpha_1$, avec λ une constante supposée connue. Ainsi pour la suite de l'étude $H_t(p) = \lambda$.

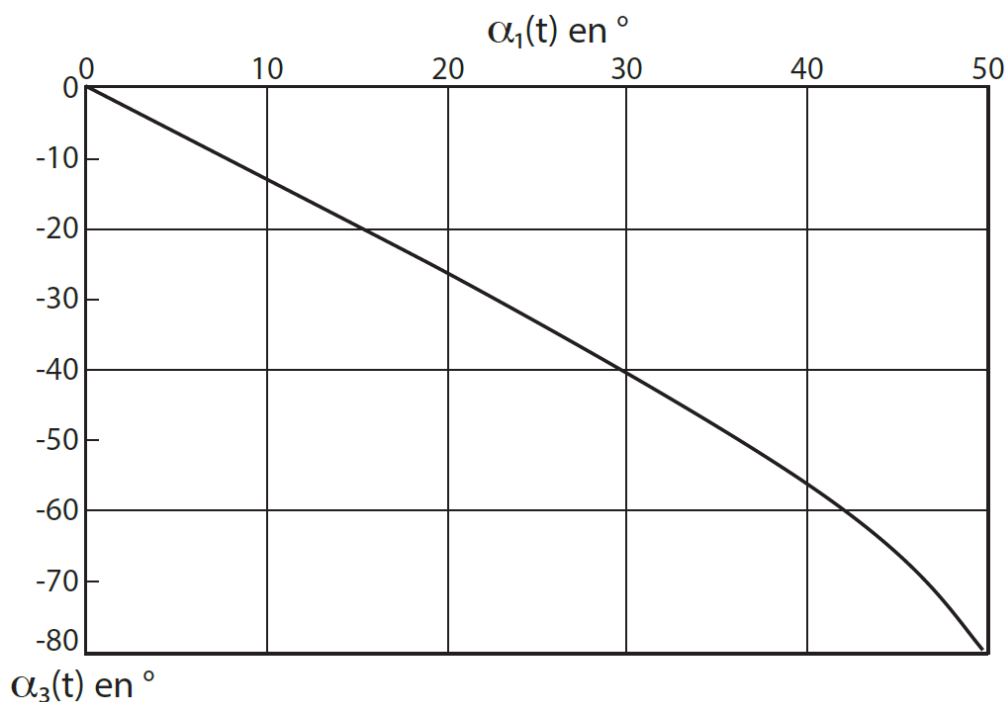
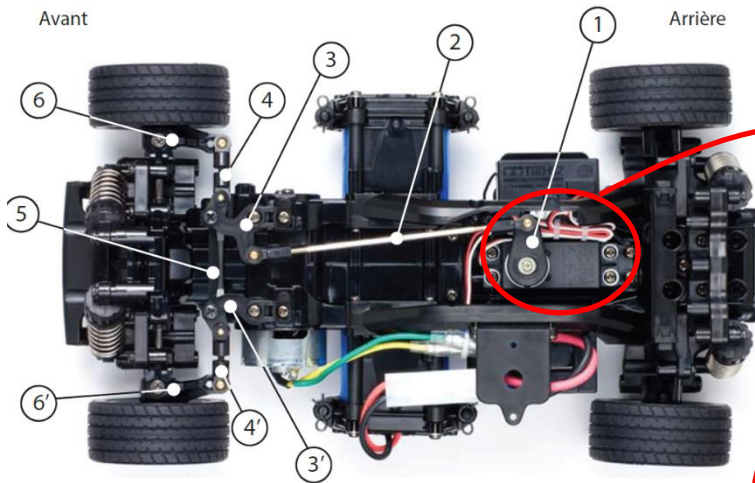
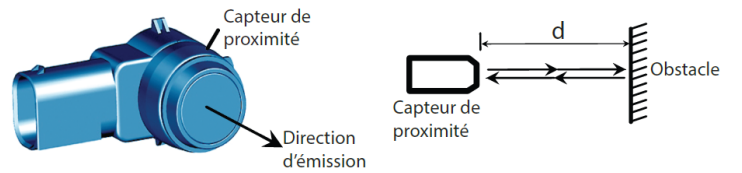
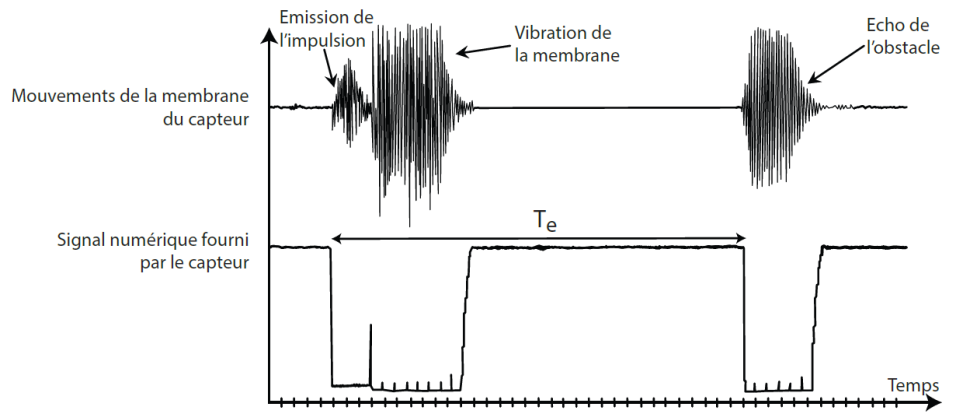


Figure 8 : Tracé de $\alpha_3(t)$ en fonction de $\alpha_1(t)$

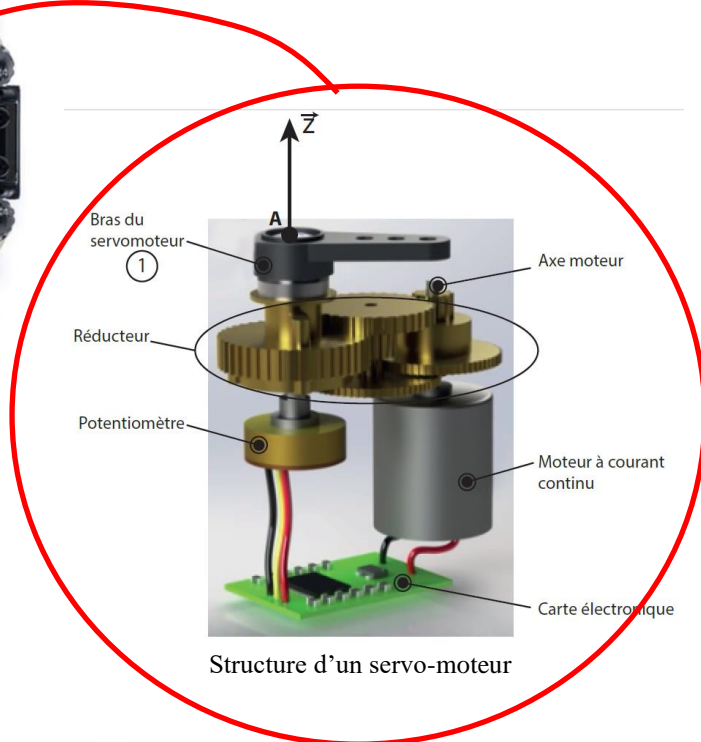
ANNEXES

Le type de capteur utilisé est un capteur de proximité à ultrasons (figure 4). Ce type de capteur possède une membrane qui émet une onde ultrasonore par vibrations. La distance d entre un capteur et un obstacle est déduite du temps T_e d'aller et retour de l'onde qui est réfléchi par l'obstacle puisque la vitesse du son dans l'air est connue : $V_s = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ainsi au niveau du capteur de proximité, l'information exploitable est le temps T_e entre l'émission et la réception du signal (écho) émis par le capteur. C'est l'acquisition de T_e qui servira dans l'algorithme pour l'identification d'une place libre et pour la caractérisation de la trajectoire à suivre.

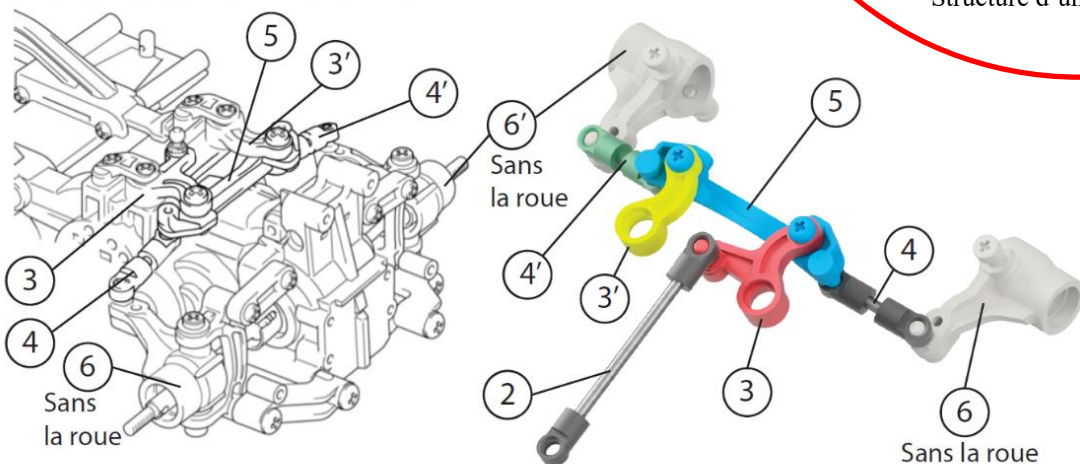


Vue de dessus du véhicule radio commandé sans carrosserie

- 1 bras du servomoteur (lié à l'axe de sortie du servomoteur)
- 2 tige
- 3 et 3' bielle de renvoi
- 4 et 4' bielle de direction
- 5 bras de direction
- 6 et 6' ensemble roue + fusée de roue



Structure d'un servo-moteur



Vue 3D des éléments de la direction

Exercice 2 : mesure de viscosité (extrait Ccp MP 15)

Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact (figure 1), est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase. La figure 2 précise les fonctions du STA Compact.



Figure 1 : STA compact

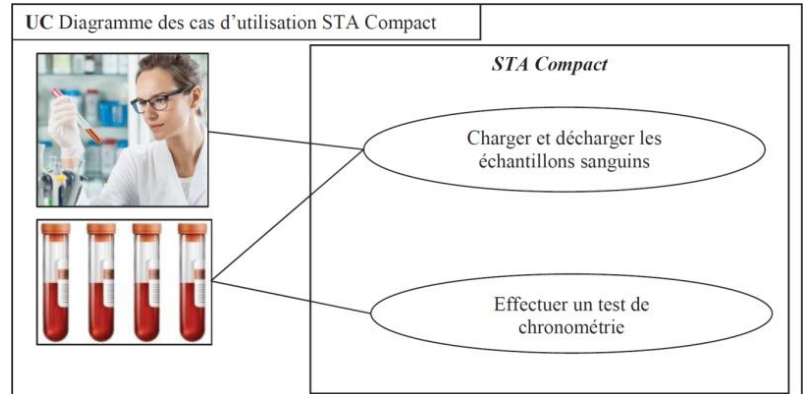


Figure 2 : Cas d'utilisation du STA Compact

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation. Le principe du test de chronométrie est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille ;
- l'ensemble est chauffé alors qu'une bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique
- on mesure l'amplitude de l'oscillation qui diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif ;
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

Mesure de la viscosité

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (figure 3). La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoïdal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie.

Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

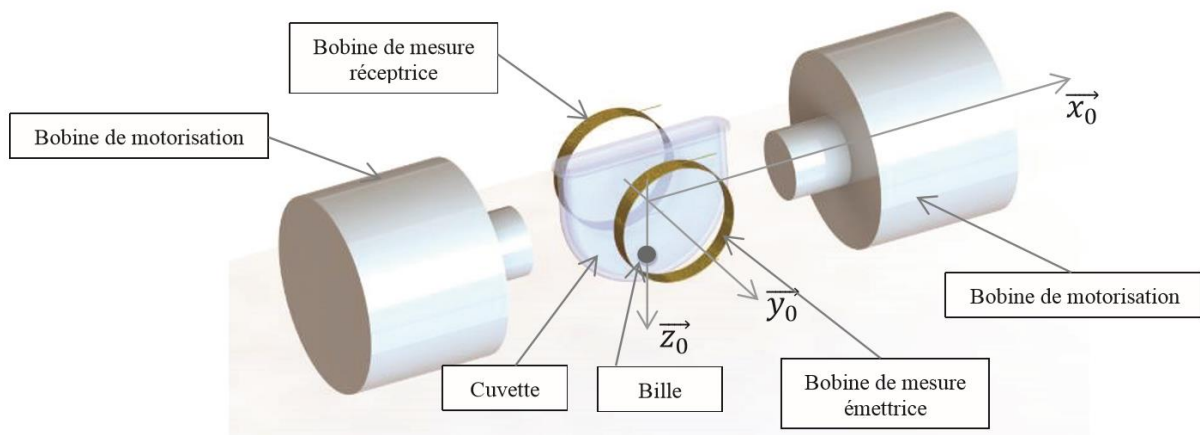


Figure 3 : Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

Objectif : on se propose de modéliser le comportement dynamique de la bille pour en déduire le réglage de la commande des bobines motrices.

Hypothèses de modélisation : voir schéma figure 4.

- la bille de masse m , de centre de masse G , de rayon r , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon R dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.

- I est le point de contact entre la bille et le rail circulaire ;

- la position de la bille sur le rail est repérée par : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

- $\{V_{bille/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{bille/0} = \omega_b \vec{y}_0 \\ \vec{V}_{G \in bille/0} = v \vec{x}_1 \end{matrix} \right\}$ le torseur cinématique de la bille par rapport au

rail 0

- $R = \|\vec{OI}\|$, le rayon du rail et $r = \|\vec{GI}\|$, le rayon de la bille.

Q1. En exprimant la condition de roulement sans glissement en I , déterminer ω_b et v , les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de θ , r et R .

Q2. Déterminer l'expression de l'accélération galiléenne du centre de la bille.

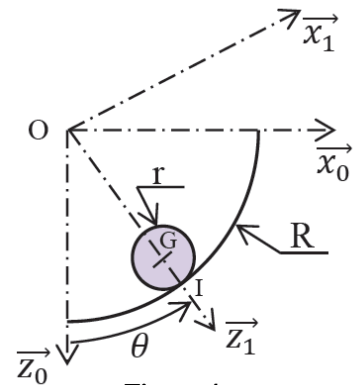


Figure 4

Une étude dynamique permet de déterminer l'équation de mouvement de la bille :

$$\frac{7}{5} m(R - r)\ddot{\theta} + f_v(R - r)\dot{\theta} + mg \sin\theta = F(t)\cos\theta$$

Où $F(t)$ est le glisseur (en G de direction \vec{x}_0) associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec $F(t) = F_0 \sin(\omega_{bob}t)$ et f_v le coefficient de frottement visqueux associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité ($\vec{F}_v = -f_v \cdot \vec{V}(G \in bille/0)$). On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors $f_v = 6\pi \cdot r \cdot \eta$ où η est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation.

Q3. θ étant petit, linéariser l'équation du mouvement puis en déduire la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta(p)}{F(p)}$. p étant la variable de Laplace, $\theta(p)$ et $F(p)$ les transformées respectives de $\theta(t)$ et $F(t)$. Mettre $H(p)$ sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique K_s , de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de f_v , R , r , m et g .

Exercice 3 : Robot de chirurgie mini-invasive (extrait E3a MP 2019)

La chirurgie mini-invasive est désormais couramment pratiquée dans les centres hospitaliers français et à travers le monde. Celle-ci consiste à réaliser les actes chirurgicaux en réalisant de fines incisions permettant de faire glisser au travers de celles-ci les instruments utiles et une caméra. Un gaz est alors insufflé afin d’augmenter la visibilité et la capacité de mouvement des instruments. Le chirurgien peut alors procéder à l’opération grâce au retour visuel de la caméra en visualisant la position de ses instruments par rapport à la zone d’intervention médicale.

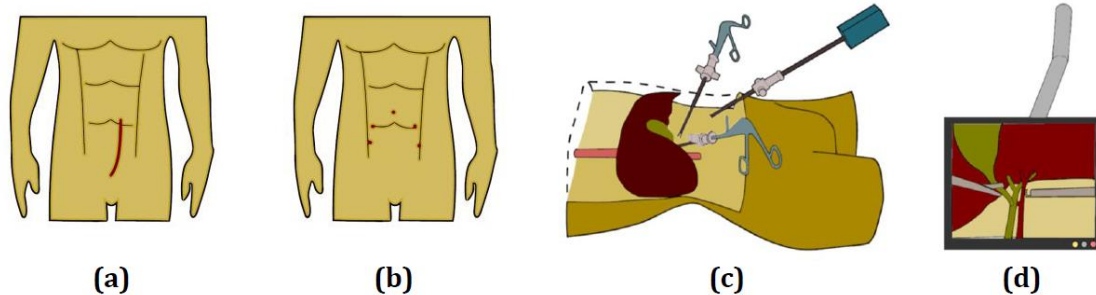


Figure 1 : Incisions de chirurgie classique (a) par rapport à la chirurgie mini-invasive (b) / Instruments de chirurgie mini-invasive (c+d)

La dextérité du chirurgien doit être accrue par rapport à une intervention avec une incision plus grande car les instruments de chirurgie mini-invasive sont fins et allongés, très sensibles au moindre défaut de mouvement. La robotisation du mouvement des instruments chirurgicaux est désormais possible, elle permet d’accroître la dextérité du chirurgien. Celui-ci utilise un « joystick » (robot maître) qui permet de générer les commandes du robot esclave qui exécute les mouvements.

Nous proposons d’étudier en partie un robot de chirurgie mini-invasive conçu et réalisé par l’équipe **RobioSS** (Robotique, Biomécanique, Sport, Santé) de l’institut de recherche **CNRS Pprime** de l’Université de Poitiers

Objectif de l’étude : vérifier l’exigence de mobilité de l’instrument chirurgical.

Les mobilités de l’outil de chirurgie commandé par le robot doivent être identiques à celles d’un outil de chirurgie commandé manuellement par le chirurgien au cours d’une intervention mini-invasive classique.

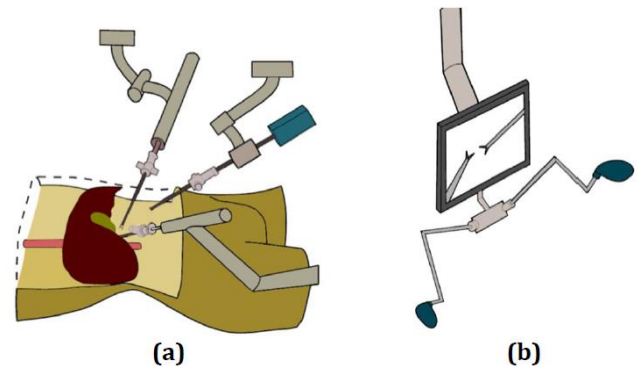


Figure 2 : Système de téléopération de chirurgie mini-invasive composé du robot esclave et de la station de commande

Paramétrage du mouvement à reproduire par le robot.

Lors d’une intervention mini-invasive classique, les instruments (voir figure 3) sont insérés dans le corps du patient par l’intermédiaire d’un trocart qui permet d’assurer la liberté de mouvement, tout en garantissant l’étanchéité avec le milieu extérieur.

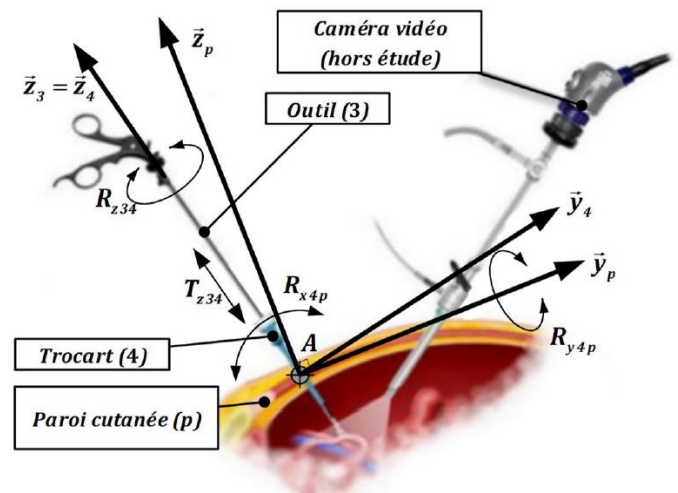


Figure 3 : Implantation de l’outil chirurgical et du trocart dans la paroi cutanée du patient ; représentation des mobilités. (Le plan $(A, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ n’est pas dans le plan de projection du schéma)

Définition des repères :

- Repère lié au patient (**p**) : $(A, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$, le point A étant le point d'insertion du trocart (**4**) à la surface du corps du patient et \vec{z}_p le vecteur directeur de la normale extérieure.
- Repère lié au trocart (**4**) : $(A, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$, le point A étant le point d'insertion du trocart (**4**) à la surface du corps du patient et \vec{z}_4 le vecteur directeur de l'axe du trocart (**4**).
- Repère lié à l'outil (**3**) : $(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, le point A étant le point d'insertion du trocart (**4**) à la surface du corps du patient et \vec{z}_3 le vecteur directeur de l'axe l'outil (**3**).

Du fait de l'élasticité de la paroi cutanée, le trocart peut s'incliner autour du point A, fixe par rapport au patient, autour des axes (A, \vec{x}_p) et (A, \vec{y}_p) . L'outil, lui, peut tourner dans le trocart autour de l'axe (A, \vec{z}_3) et translater dans la direction \vec{z}_3 .

Description des mobilités :

- Mobilités entre l'outil (**3**) et le trocart (**4**)
 - T_{z34} : Translation rectiligne de direction \vec{z}_3
 - R_{z34} : Rotation d'axe (A, \vec{z}_3)
 - Aucune autre mobilité possible
- Mobilités entre le trocart (**4**) et le patient (**p**)
 - R_{x4p} : Rotation d'axe (A, \vec{x}_4)
 - R_{y4p} : Rotation d'axe (A, \vec{y}_4)
 - Aucune autre mobilité possible

Notation :

Pour la suite de l'étude, on notera le torseur cinématique relatif à la liaison entre groupe fonctionnel **j** et le groupe fonctionnel **i**, décrivant la vitesse de **j** par rapport à **i** et écrit au centre de liaison M, dans la base B_i :

$$\{V_{j/i}\} = \left\{ \begin{array}{l} p_{ji}\vec{x}_i + q_{ji}\vec{y}_i + r_{ji}\vec{z}_i \\ u_{ji}\vec{x}_i + v_{ji}\vec{y}_i + w_{ji}\vec{z}_i \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} p_{ji} \\ q_{ji} \\ r_{ji} \end{array} \middle| \begin{array}{l} u_{ji} \\ v_{ji} \\ w_{ji} \end{array} \right\}_M$$

- Q1.** À partir de la description des mobilités, écrire les torseurs cinématiques $\{V_{4/p}\}$ et $\{V_{3/4}\}$. Les deux torseurs seront écrits au point de liaison A et dans la base liée au trocart (**4**). Donner le nom de chacune des deux liaisons $L(4/p)$ et $L(3/4)$.
- Q2.** En appliquant le principe de composition des vitesses, déduire de ce qui précède le torseur cinématique $\{V_{3/p}\}$ qui caractérisera les mouvements que le robot devra pouvoir transmettre à l'outil de chirurgie (**3**). Donner le nom de la liaison équivalente $L_{eq}(3/p)$ qui remplacerait l'assemblage des deux liaisons $L(4/p)$ et $L(3/4)$. On précisera également les éléments caractéristiques de cette liaison : axe, centre, ...

Proposition d'une architecture pour le Robot de chirurgie.

L'équipe **RobioSS** de l'institut de recherche **Pprime** (CNRS, Université de Poitiers) propose une architecture innovante, différente des solutions plus classiques, qui elles, sont basées autour d'une structure "épaule" – "coude" – "poignet".

Cette solution est bâtie à partir de trois liaisons élémentaires (deux liaisons "pivot" et une liaison "pivot glissant"), non parallèles.

Un schéma est donné dans les figures suivantes.

Le point **A** est le point central du trocart, et l'outil (**3**), comme pour une intervention sans l'assistance du robot, coulisse et tourne librement dans le guide du trocart.

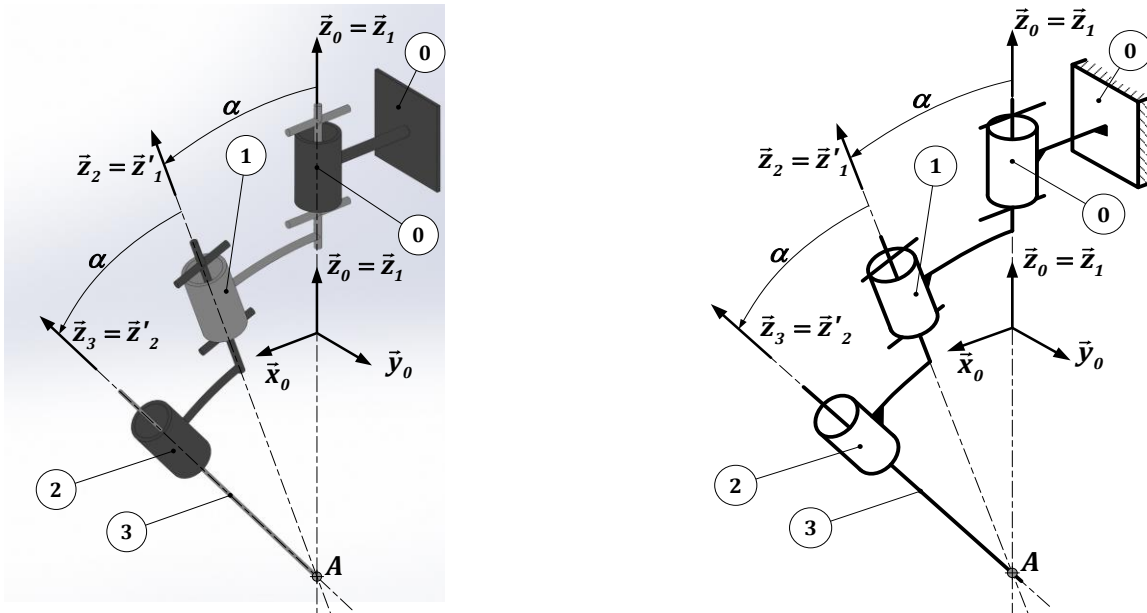


Figure 4 : Modèle cinématique de la solution architecturale proposée par l'équipe RobioSS de l'institut de recherche Pprime. Les schémas sont proposés pour une configuration particulière : $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = 0$ et $\theta_3 = 0$ (voir figures de définition des angles en annexes A5 et A6)

- Q3.** Écrire les torseurs cinématiques de chacune des liaisons, au point **A** et dans une base liée à la liaison ($\{V_{j/i}\}$ écrit dans la base B_j , B_i ou B'_i ; voir définition des bases en annexe). On fera apparaître dans l'écriture de ces torseurs les vitesses $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ et \dot{z}_{32} . (Voir figures de définition des angles en annexe et \dot{z}_{32} représente la vitesse de translation de l'outil (3) par rapport au bras (2), de direction $\vec{z}_3 = \vec{z}'_2$).
- Q4.** En utilisant le principe de composition des vitesses, déduire de ce qui précède le torseur cinématique $\{V_{3/0}\}$. Ce torseur sera écrit au point **A**, dans son expression la plus condensée et en fonction des vitesses $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_3$ et \dot{z}_{32} .

Ce torseur cinématique, exprimé dans la base B_3 ($\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$) est :

$$\{V_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha \cdot (\sin\theta_2 \cdot \sin\theta_3 - \cos\alpha \cdot \cos\theta_3 \cdot (1 + \cos\theta_2)) \cdot \dot{\theta}_1 - \sin\alpha \cdot \cos\theta_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ \sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\theta_3 \cdot (1 + \cos\theta_2) + \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_3) \cdot \dot{\theta}_1 + \sin\alpha \cdot \sin\theta_3 \cdot \dot{\theta}_2 \\ (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\theta_2) \cdot \dot{\theta}_1 + \cos\alpha \cdot \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{array} \right\}_{A, B_3} \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dot{z}_{32} \end{array}$$

- Q5.** Expliquez comment, à partir du torseur exprimé sous la forme condensée de la question 4, on aboutit à la forme donnée ci-dessus, dans la base B_3 ($\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3$). On ne demande pas de faire les calculs.

Étude d'une configuration particulière

On suppose que la position de référence de l'étude est celle décrite par la figure 5 :

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{4} ; \theta_2 = \frac{\pi}{4} \text{ et } \theta_3 = 0$$

Par construction (choix du concepteur) : $\alpha = 30^\circ$

Lorsque le robot est dans cette position, on suppose que le chirurgien ordonne un déplacement tel que le torseur cinématique est :

$$\{V_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \dot{\psi} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\}_{A, R_3} \quad \dot{\psi} \text{ et } \dot{z}_{32} \text{ sont supposés connus.}$$

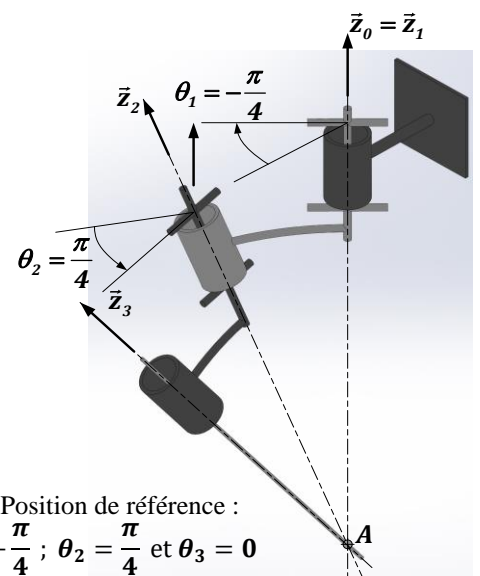


Figure 5 : Position de référence : $\theta_1 = -\frac{\pi}{4}$; $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ et $\theta_3 = 0$

Après application numérique, et à partir de la posture de départ étudiée, le torseur cinématique de commande du robot doit être alors :

$$\{V_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} -0,739.\dot{\theta}_1 - 0,500.\dot{\theta}_2 & \mathbf{0} \\ 0,354.\dot{\theta}_1 & \mathbf{0} \\ 0,573.\dot{\theta}_1 + 0,866.\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 & \dot{z}_{32} \end{array} \right\}_{A,R_3}$$

Q6. Montrer qu'il existe une et une seule solution pour les commandes moteurs $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et $\dot{\theta}_3$, à l'instant considéré, pour reproduire le mouvement désiré par le chirurgien.

Généralisation :

Q7. Expliquer pourquoi, à partir de l'étude de la configuration précédente, on peut raisonnablement faire l'hypothèse que l'architecture du robot proposée est correcte.

En réalité, il existe des positions singulières qui ne permettent pas d'avoir à chaque fois une solution de commande. Un algorithme de commande permet alors de les identifier et de prendre en compte ce type d'évènement pour néanmoins générer une commande satisfaisante.

Exemple de singularité :

- Position : $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = -\pi$ et on veut $\{V_{3/0}\} = \left\{ \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\psi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{z}_{32} \end{array} \right\}_{A,R_3}$

La détermination de la loi de commande est complexe puisqu'il faut déterminer les lois de commande des 4 axes du robot (trois rotations et une translation) en fonction de ce que veut le chirurgien.

Il est relativement facile de calculer les composantes de $\{V_{3/0}\}$ à partir de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, z_{32}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3$ et \dot{z}_{32} . En revanche, la loi inverse (on parle en robotique de commande inverse), celle qui intéresse le pilotage des moteurs, est beaucoup plus délicate à obtenir et dépasse le cadre de cette étude.

Estimation de l'accélération à imposer dans le moteur de l'axe 1 (M1).

Les exigences imposées par le cahier des charges précisent que le robot doit être capable de réaliser un demi-tour, autour de chacun de ses axes, en moins de **1 s**.

Cela signifie que le moteur **M1** doit être capable d'engendrer ce demi-tour à l'ensemble constitué des solides : **1, M2, 2, M3 et 3**. Le moteur **M1** prédéterminé est référencé : **FHA – 14 C** avec un coefficient de réduction (ratio) de **50**.

Il apparaît que, une des situations critiques envisageables est lorsque les deux bras du robot restent dans une configuration plane, complètement déployée, et que ce plan est, en position initiale, le plan horizontal. À partir de cette configuration initiale, on commande l'axe du bras **1** pour que l'ensemble décrive un demi-tour.

L'ensemble étudié est donc modélisable par un même solide rigide noté E_{plan} .

$E_{plan} = \{1, M2, 2, M3, 3\}$ lorsque l'ensemble reste en position plane

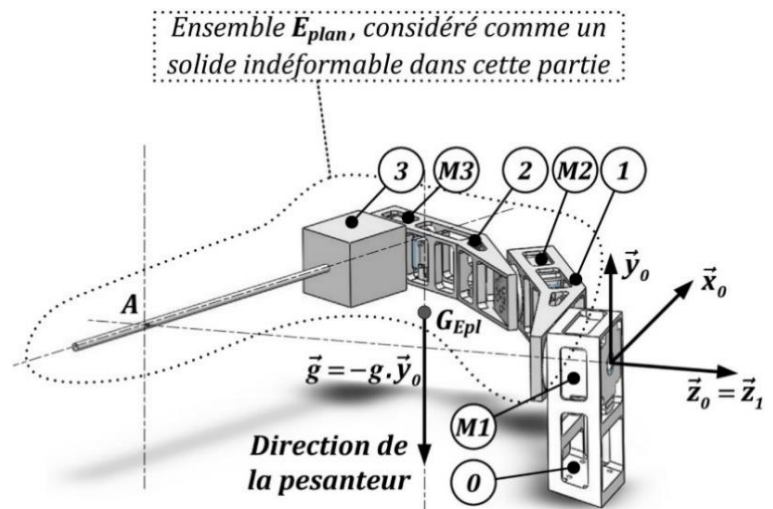


Figure 6 : Description de l'ensemble étudié, en position initiale : $\theta_1(t=0) = 0$ et $\forall t, \theta_2 = \theta_3 = 0$. Le centre de masse de l'ensemble E_{plan} est G_{Epl} .

Description analytique du mouvement étudié (Voir également le graphe de l'évolution de la vitesse $\theta_1(t)$, figure 7 et la visualisation du mouvement figure 8) :

- Le moteur **M3** est supposé bloqué : $\forall t, \theta_3 = 0$
- Le moteur **M2** est supposé bloqué : $\forall t, \theta_2 = 0$
(L'ensemble E_{plan} reste donc en configuration plane)
- Pour le moteur **M1** :
 - Pour $t_0 = 0 \text{ s}$: $\theta_1(t = 0) = 0$, $\dot{\theta}_1(t = 0) = 0$
 - Phase 1 : Pour $0 < t \leq t_1$: $\ddot{\theta}_1(t) = \ddot{\theta}_1$ (où $\ddot{\theta}_1$ est une constante positive, pour engendrer une rotation positive autour de l'axe (A, \vec{z}_1) , qui s'oppose à la pesanteur : voir figures géométrales en annexe).
 - Phase 2 : Pour $t_1 < t \leq t_2$: $\ddot{\theta}_1(t) = 0$ et $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_{1,max} = \omega_M$ (vitesse nominale du moto-réducteur : $N_M = 60 \text{ tr/min}$; voir document technique en annexe A8).
 - Phase 3 : Pour $t_2 < t \leq t_3$: $\ddot{\theta}_1(t) = -\ddot{\theta}_1$ (où $\ddot{\theta}_1$ est la même constante positive que pour la phase d'accélération entre les dates 0 et t_1).
 - Pour $t = t_3$: $\theta_1(t = t_3) = \pi \text{ rad}$; $\dot{\theta}_1(t = t_3) = 0$.

Pour respecter les exigences, il faut donc :

- $t_3 = 1 \text{ s}$
- $\theta_1(t = t_3) = \theta_{1,max} = \pi \text{ rad}$
- $\dot{\theta}_1(t = t_3) = 0 \text{ rad.s}^{-1}$
- Pour $t_1 < t \leq t_2$: $\ddot{\theta}_1(t) = 0$ et $\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_{1,max} = 6,28 \text{ rad.s}^{-1}$

Les figures suivantes décrivent le mouvement étudié dans cette partie.

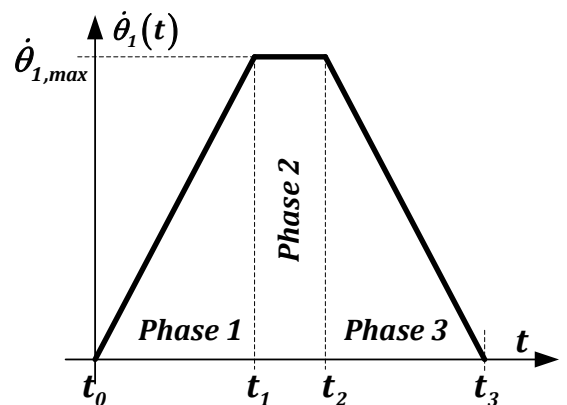
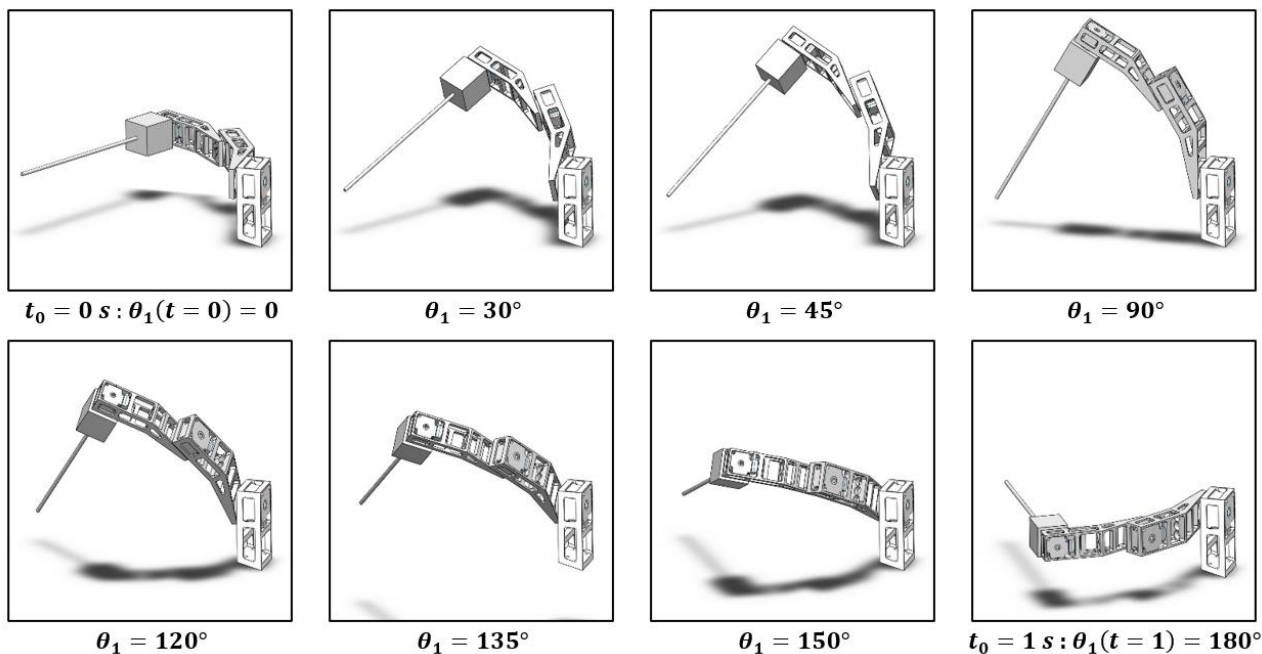


Figure 7 : Évolution de la vitesse de rotation de l'ensemble E_{plan} , par rapport au support fixe 0

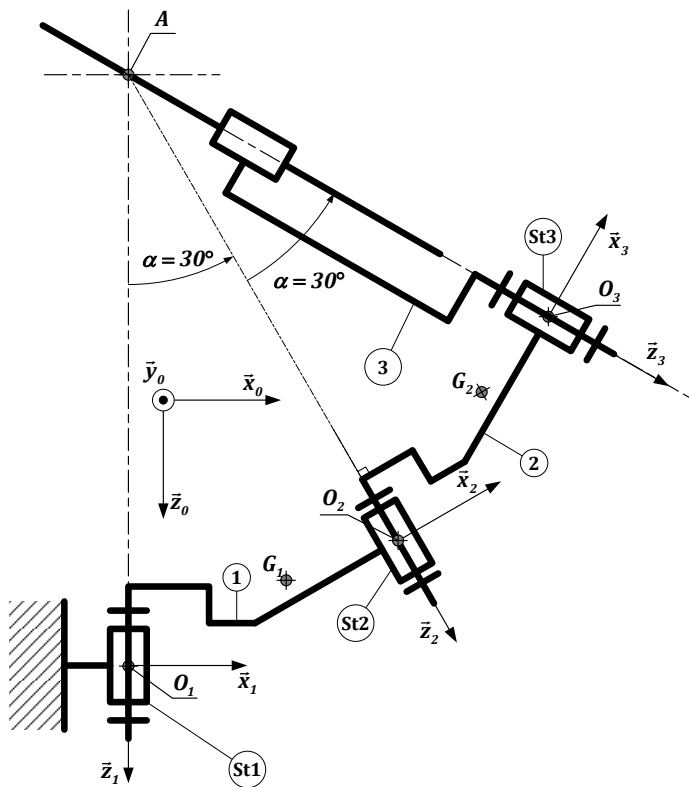


- Q8.** Etablir l'expression littérale donnant $\theta_{1,max}$ en fonction de $\dot{\theta}_{1,max}$, t_1 , t_2 et t_3 .
 Ecrire une relation simple donnant t_2 en fonction de t_1 et t_3 .
 Ecrire une relation simple donnant t_1 en fonction de $\dot{\theta}_{1,max}$ et $\ddot{\theta}_1$.
 Établir l'expression littérale de $\ddot{\theta}_1$, l'accélération durant la phase 1, en fonction de $\dot{\theta}_{1,max}$, $\theta_{1,max}$ et t_3 (on rappelle que pour la phase 3, la décélération a le même module que l'accélération en phase 1).

- Q9.** Calculer $\ddot{\theta}_1$, l'accélération qu'il faudra imposer au moteur **M1** pour réaliser le mouvement.

ANNEXES

Schéma cinématique du robot, en position plane, horizontale



Le schéma cinématique montre le robot dans une position très particulière, qui est la position initiale pour l'étude de la partie 3.

Le plan de représentation est le plan horizontal. La verticale ascendante est portée par \vec{y}_0 .

Le robot est déployé dans ce plan horizontal : (voir également, dans l'annexe suivante, les figures géométrales qui définissent les orientations des différents repères.) :

$$\theta_1 = 0 ; \theta_2 = 0$$

Données géométriques :

- A : point central du trocart
- O_1, O_2 et O_3 , centres des liaisons pivot des axes du robot : Ces trois points sont dans un même plan horizontal (situation initiale particulière de l'étude)

$$\vec{O_1A} = -r_1 \cdot \vec{z}_1 = -470 \cdot \vec{z}_1 \text{ (en mm)}$$

$$\vec{O_2A} = -r_2 \cdot \vec{z}_2 = -420 \cdot \vec{z}_2 \text{ (en mm)}$$

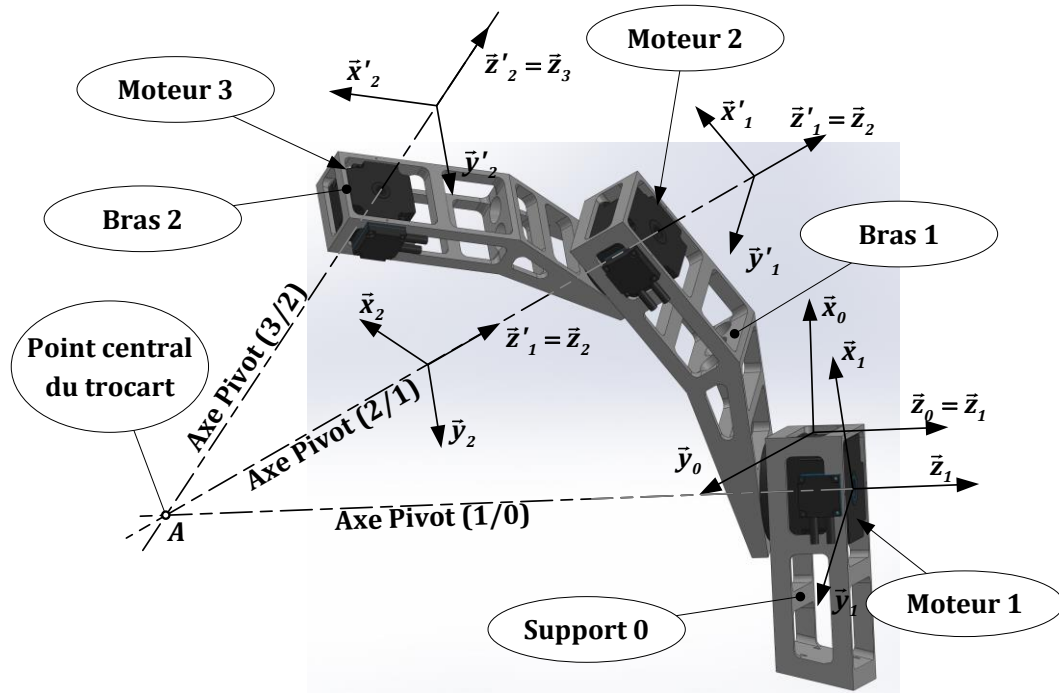
$$\vec{O_3A} = -r_3 \cdot \vec{z}_3 = -370 \cdot \vec{z}_3 \text{ (en mm)}$$

Figures géométrales : positions relatives des différentes bases.

Base B_1 par rapport à base B_0	Base B'_1 par rapport à base B_1	Base B_2 par rapport à base B'_1
Rotation du bras 1 par rapport au support supposé fixe : $\theta_1(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$	Position angulaire relative entre l'axe de la liaison pivot $L(1/0)$ et l'axe de la liaison pivot $L(2/1)$: $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}'_1) = (\vec{x}_1, \vec{x}'_1) = 30^\circ$	Rotation du bras 2 par rapport au bras 1 : $\theta_2(t) = (\vec{x}'_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}'_1, \vec{y}_2)$

Base B'_2 par rapport à base B_2	Base B_3 par rapport à base B'_2
Position angulaire relative entre l'axe de la liaison pivot $L(2/1)$ et l'axe de la liaison pivot $L(3/2)$: $\alpha = (\vec{z}_2, \vec{z}'_2) = (\vec{x}_2, \vec{x}'_2) = 30^\circ$	Rotation de l'ensemble outil 3 par rapport au bras 2 : $\theta_3(t) = (\vec{y}'_2, \vec{y}_3) = (\vec{x}'_2, \vec{x}_3)$

Vue en perspective du robot et bases associées



La vue en perspective est limitée à la représentation :

- d'un élément du support supposé fixe $\mathbf{0}$
- du moteur $\mathbf{1}$ actionnant le bras $\mathbf{1}$, du bras $\mathbf{1}$ et de son moteur $\mathbf{2}$ qui actionne le bras $\mathbf{2}$
- du bras $\mathbf{2}$ et de son moteur $\mathbf{3}$ qui actionne la rotation de l'outil $\mathbf{3}$, non représenté.

Exercice 4 : Roue Ez-wheel (extrait de Ccp MP 2013)

I. La roue autonome

Ez-Wheel SAS est une entreprise française de technologie innovante fondée en 2009. Elle propose une gamme de roues électriques "clé en main", 100% intégrées. La roue autonome ez-Wheel (prononcer "easy-wheel") propose une solution simple pour tracter des équipements de maintenance et de transport de charges, des véhicules légers et matériels médicaux (figure1). Le stator de la roue ez-Wheel est fixé sur le châssis de l'engin à déplacer et son rotor est assemblé directement sur sa roue.

La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, un contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur (figure1).

II. Mise en situation

Nous nous proposons, dans ce sujet, d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant (figure2). Pour ce genre d'application, où il est nécessaire de mettre en place deux roues autonomes sur le fauteuil, la commande des roues n'est pas aussi simple que pour des applications à une seule roue. En effet, en plus de gérer le mouvement d'avance du fauteuil, il faut également gérer ses changements de direction. Les deux ez-Wheel étant implantées sur chacune des deux roues arrière, le pilotage des deux roues est lié afin de maîtriser la direction du fauteuil. Chacune des deux roues est alors asservie par l'intermédiaire de capteurs mesurant la vitesse de rotation de l'arbre du moteur brushless.

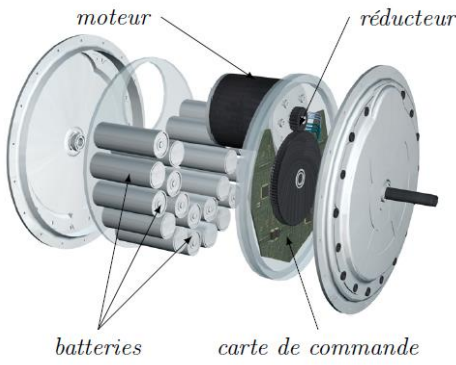


Figure 1 : Principaux éléments d'une roue ez-Wheel



Figure 2 : Prototype de fauteuil roulant équipé de deux ez-Wheel

Le fonctionnement du fauteuil motorisé désiré par la société ez-Wheel est le suivant : l'utilisateur fournit une commande au système via un joystick. La carte de commande génère alors un ordre au variateur qui distribue une énergie électrique adaptée au moteur électrique. L'énergie mécanique de rotation fournie par le moteur électrique est alors adaptée et transmise aux roues. Afin d'assurer l'asservissement en vitesse des roues (et donc du fauteuil), des capteurs permettent de mesurer la vitesse de rotation sur l'arbre de sortie du moteur.

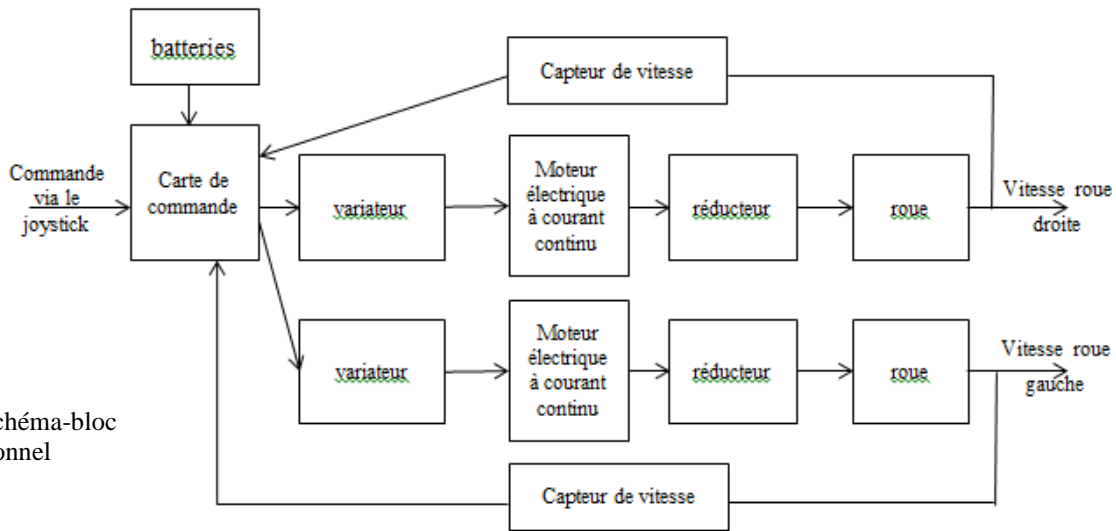


Figure 3 : schéma-bloc fonctionnel

Afin de commander le déplacement du fauteuil, l'utilisateur dispose d'un joystick (figure 4).

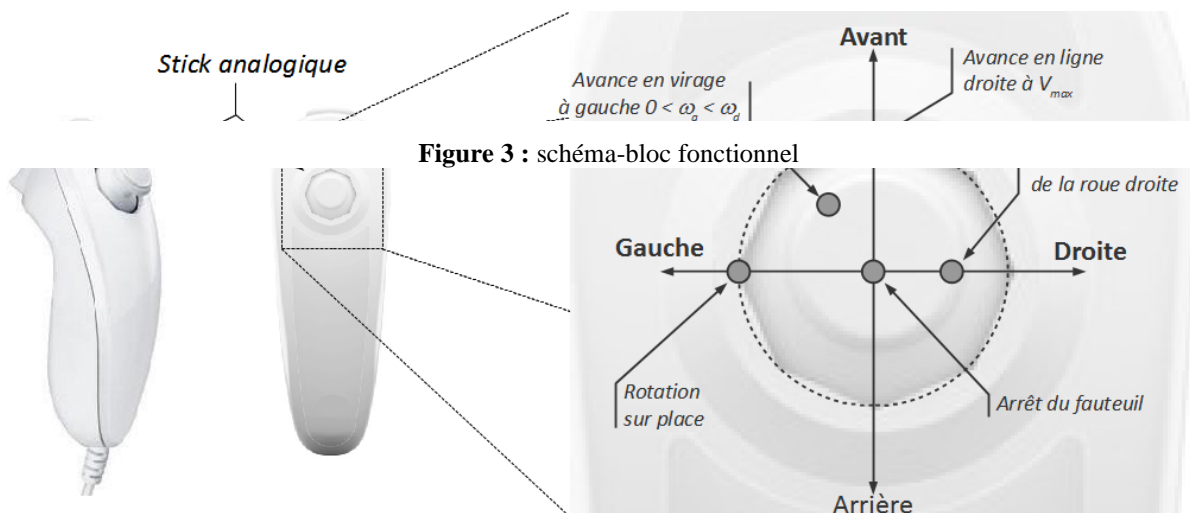


Figure 3 : schéma-bloc fonctionnel

Figure 4 : Consignes de commande des roues en fonction de la position de la manette de commande

Cette manette de contrôle permet de piloter deux grandeurs (figure 5 et figure 6) : La vitesse du fauteuil, notée $V(t) = \|\vec{V}(O_f, R_f/R_0)\|$ et Le rayon de courbure du fauteuil, noté $\rho(t)$. Les deux motoréducteurs ez-Wheel sont asservis en vitesse de rotation.

Objectif : Afin de vérifier les performances, relier les consignes en vitesse de rotation des deux moteurs et les consignes du joystick puis valider la capacité du fauteuil à franchir un obstacle.

III. Relation entre les consignes joystick et les consignes moteur

Les hypothèses de la modélisation du déplacement du fauteuil sont (figures 5 et 6) :

- Le mouvement du fauteuil sans les roues est un mouvement plan sur plan $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ par rapport au référentiel fixe R_0 . Le point O est le centre de courbure du mouvement du fauteuil ;
- Les deux roues arrière du fauteuil roulent sans glisser par rapport au référentiel fixe R_0 ;
- La roue arrière gauche, notée R_g , est en liaison pivot d'axe (O_g, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- La roue arrière droite, notée R_d , est en liaison pivot d'axe (O_d, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- Le rayon de courbure $\rho(t)$ est constant.

Notations :

- Référentiel fixe : $R_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- Référentiel lié au châssis du fauteuil : $R_f (O_f, \vec{x}_f, \vec{y}_f, \vec{z}_f)$ avec $\vec{z}_0 = \vec{z}_f$;
- Référentiel lié à la roue gauche : $R_g (O_g, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ avec $\vec{y}_f = \vec{y}_g$;
- Référentiel lié à la roue droite : $R_d (O_d, \vec{x}_d, \vec{y}_d, \vec{z}_d)$ avec $\vec{y}_f = \vec{y}_d$;
- $\vec{\Omega}(R_f/R_0) = \frac{d\beta}{dt} \vec{z}_0 = \dot{\beta} \vec{z}_0$;
- $\vec{\Omega}(R_g/R_f) = \omega_g \vec{y}_f = \frac{d\theta_g}{dt} \vec{y}_f = \dot{\theta}_g \vec{y}_f$;
- $\vec{\Omega}(R_d/R_f) = \omega_d \vec{y}_f = \frac{d\theta_d}{dt} \vec{y}_f = \dot{\theta}_d \vec{y}_f$;
- $\vec{OO}_f = -\rho \vec{y}_f$
- $\vec{O_dO_f} = \vec{O_fO_g} = \frac{a}{2} \vec{y}_f$ avec $a = 700 \text{ mm}$ la largeur du fauteuil ;
- I_g (respectivement I_d) est le point de contact entre la roue gauche (respectivement la roue droite) et le sol : $\vec{I_gO_g} = \vec{I_dO_d} = R \vec{z}_0$ avec R le rayon des roues arrière ;

Q1. Donner : La valeur de ρ et la relation entre ω_g et ω_d lorsque la trajectoire du fauteuil est une droite puis lorsque le fauteuil tourne autour de l'axe (O_f, \vec{z}_0) ;

Q2. Donner Les valeurs de ρ et ω_g lorsque le fauteuil tourne autour de l'axe (O_g, \vec{z}_0) .

Q3. Ecrire trois expressions de $\vec{V}(O_f, R_f/R_0)$:

- En fonction de R , a , ω_g et $\dot{\beta}$ en utilisant le roulement sans glissement au point I_g ;
- En fonction de R , a , ω_d et $\dot{\beta}$ en utilisant le roulement sans glissement au point I_d ;
- En fonction de ρ et $\dot{\beta}$.

Q4. En déduire les expressions de ω_g et ω_d en fonction de $V(t)$, de ρ et des données géométriques du fauteuil.

Ces vitesses exprimées représentent les consignes de vitesses de chacun des moteurs permettant le déplacement en virage du fauteuil équipé des roues ez-wheel.

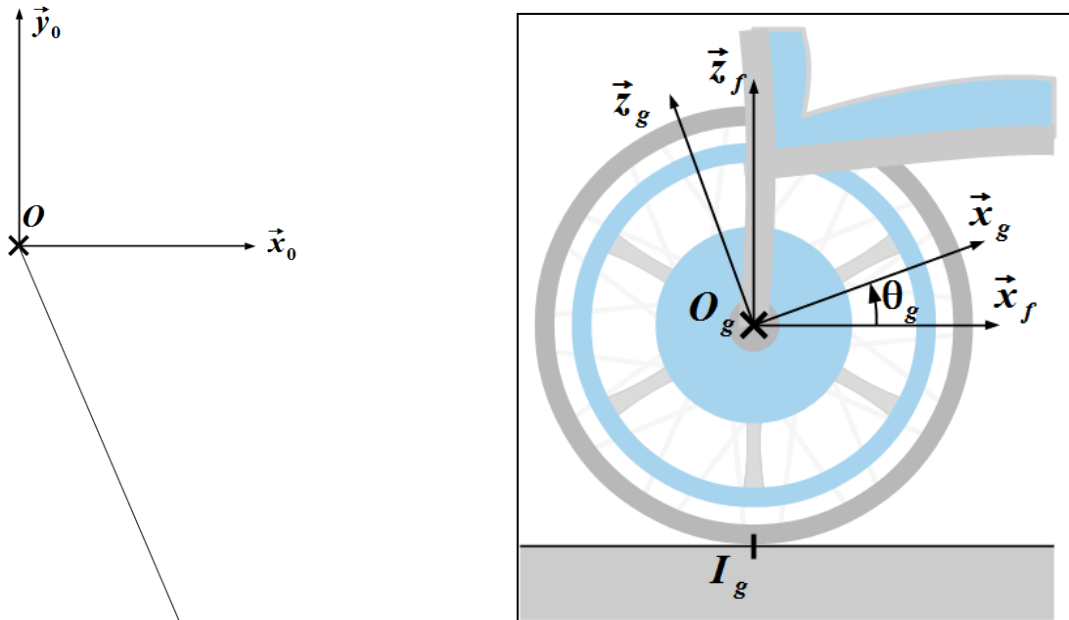


Figure 6 : Paramétrage de la roue gauche du fauteuil

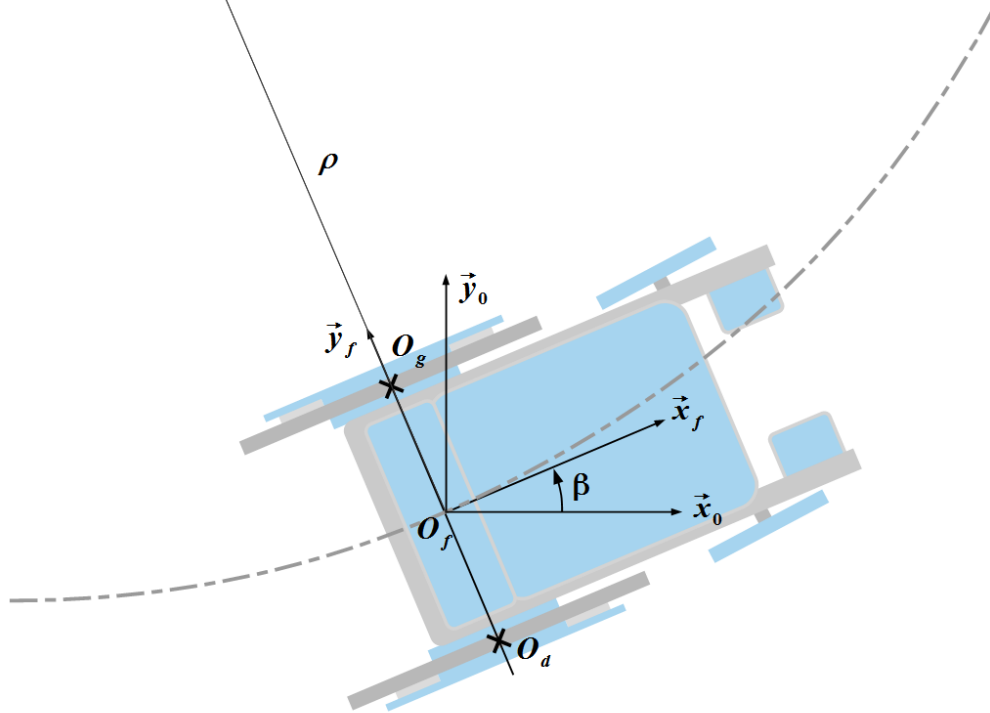


Figure 5 : Paramétrage du fauteuil en virage

Exercice 5 : vanne automatique

Objectif : déterminer la hauteur d'eau à partir de laquelle la vanne automatique représentée s'ouvre, permettant ainsi de maintenir constant le niveau d'eau dans un bassin.

La vanne a une forme rectangulaire de hauteur $b = 0,6 \text{ m}$ et de longueur $2L = 1 \text{ m}$ ($-L \leq y \leq L$).

La vanne est articulée par rapport au barrage fixe en A tel que $\vec{OA} = a \cdot \vec{z}$

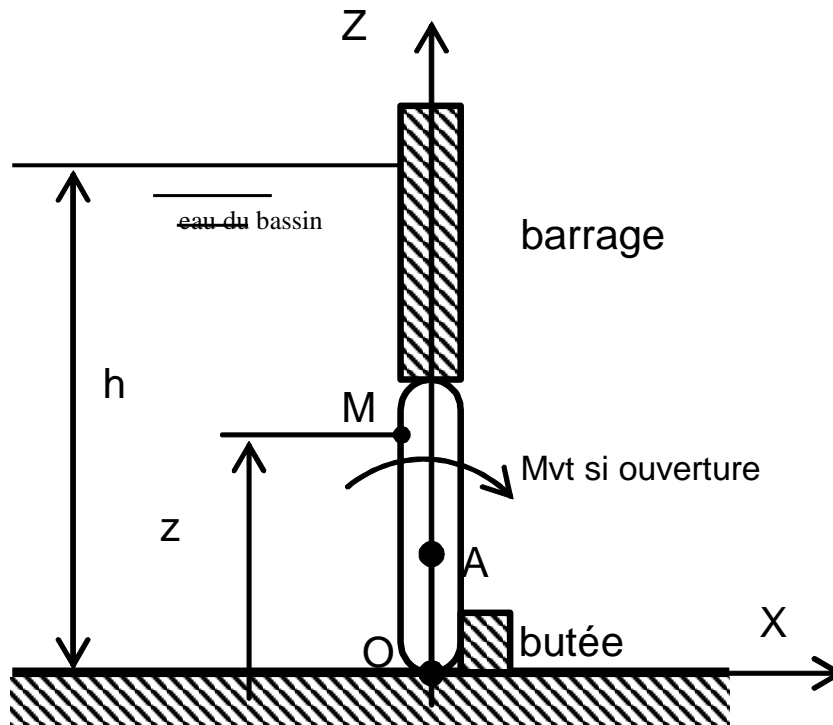
L'eau exerce sur la vanne une action mécanique définie par une densité surfacique d'effort : $f(M) = \rho_e \cdot g \cdot (h - z)$

où ρ_e est la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.

On donne : $\rho_e = 1 \text{ kg/dm}^3$ $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ $a = 0,27 \text{ m}$

Question 1 : Déterminer en O le torseur d'action mécanique exercée par l'eau sur la vanne.

Question 2 : Déterminer la position du centre de poussée de l'eau sur la vanne (le centre de poussée est tel que l'action de l'eau sur la vanne soit modélisable par un glisseur). En déduire à partir de quelle hauteur h la vanne s'ouvre. Faire l'application numérique.



Exercice 6 : embrayage moto (extrait PT 2006)

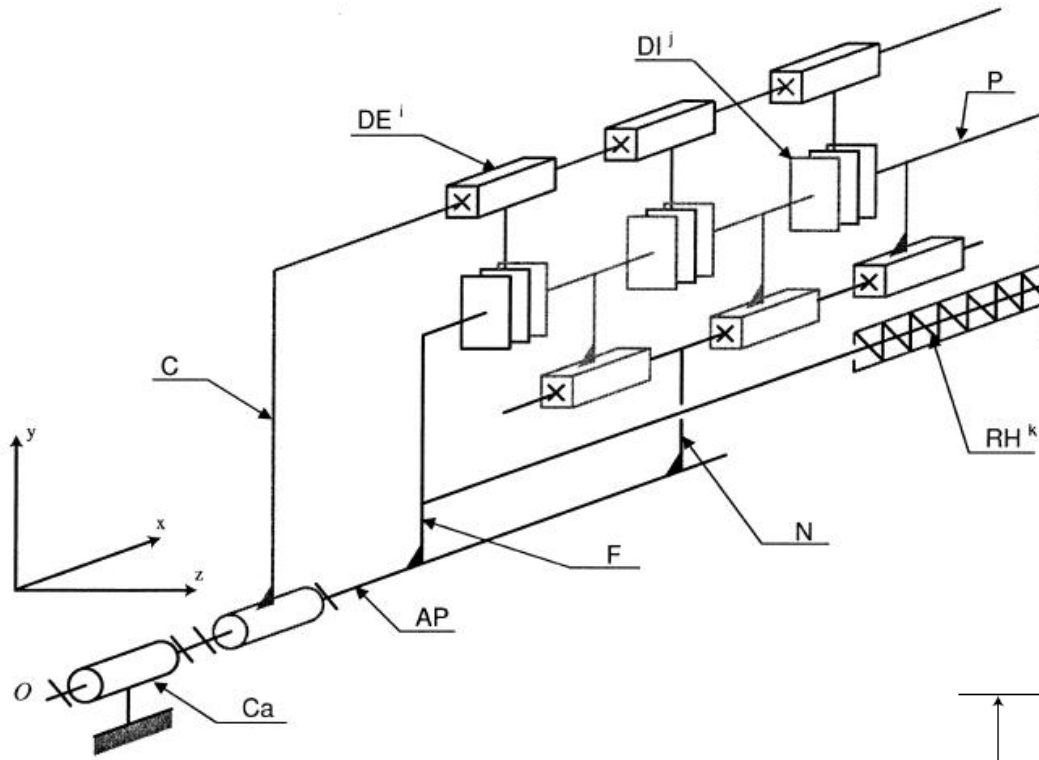
Objectif : Vérifier que l'embrayage de moto étudié peut transmettre la puissance du moteur à l'arbre primaire de boîte de vitesses. Le couple maxi à transmettre ici est de 147 N.m.

Principe de fonctionnement d'un embrayage multidisque

Un schéma d'architecture d'un embrayage multidisque classique est donné ci-dessous. On notera que, pour des raisons de lisibilité, seuls 5 disques ont été représentés. La cloche C est entraînée via un engrenage par le vilebrequin. Sur cette cloche C sont disposées des rainures dans lesquelles viennent s'insérer des disques garnis DE . Des disques métalliques DI sont intercalés entre les disques garnis DE . Les disques internes DI peuvent être considérés, dans une première approche, comme en liaison glissière avec la noix N , encastrée sur l'arbre primaire AP . Un effort presseur, obtenu grâce à la précontrainte de six ressorts hélicoïdaux RH , plaque les disques les uns contre les autres. Le couple est ainsi transmis par adhérence des disques externes DE aux disques internes DI , et donc globalement de la cloche C à l'arbre primaire AP de boîte.

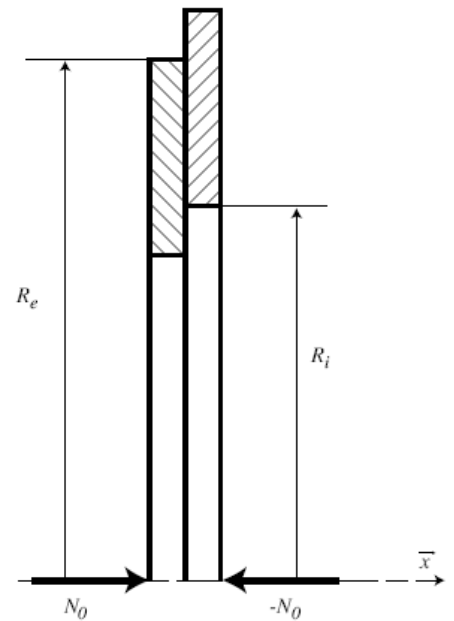
Le débrayage s'obtient en exerçant un effort extérieur sur la plaque de poussée P , dans la direction x . Cet effort est exercé par la tige de commande de débrayage, non représentée sur le schéma d'architecture.





: Schéma d'architecture d'un embrayage multidisque classique

On s'intéresse dans un premier temps au comportement d'une seule surface frottante. Les données géométriques sont définies sur la figure ci-contre. On note N_0 l'effort presseur exercé sur les surfaces en contact. L'embrayage tourne dans le sens positif.



Hypothèses :

On suppose une répartition de pression p uniforme entre les deux disques.

On se place à la limite du glissement, et on note f le coefficient d'adhérence entre disque interne $DI^i, i \in \{1; \dots; 7\}$, et disque externe $DE^j, j \in \{1; \dots; 8\}$.

Le coefficient d'adhérence entre un disque externe DE^j et le flasque F , et entre un disque externe DE^j et la plaque de poussée P , est également pris égal à f .

- Q1-** Donner l'expression de la pression p en fonction de R_e, R_i et N_0 .
- Q2-** Donner l'expression du couple C_0^1 maxi transmissible par une surface frottante, en fonction de f, R_e, R_i et N_0 . Cette expression peut se mettre sous la forme $C_0^1 = f \cdot R_{eq} \cdot N_0$, et on donnera l'expression du rayon équivalent R_{eq} .

L'effort normal N_0 est donné par l'ensemble des ressorts hélicoïdaux RH .

Données : chaque ressort hélicoïdal $RH^k, k \in \{1; \dots; 6\}$, a une raideur $K^h = 9 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$, une longueur à vide $l_0 = 39 \text{ mm}$, et une longueur en phase embrayée $l_1 = 24 \text{ mm}$.

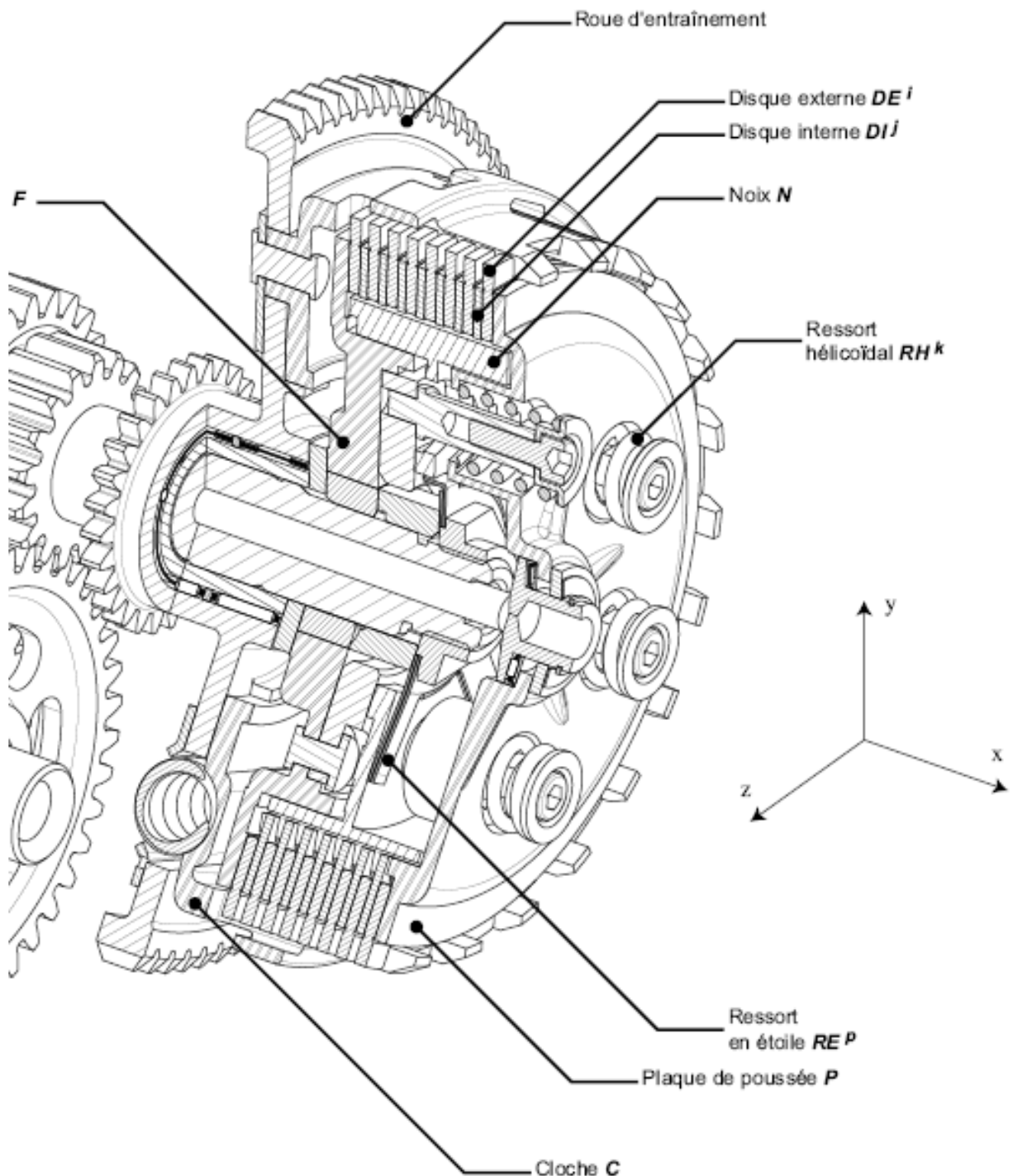
Hypothèses : on néglige l'effet du frottement dans les liaisons glissières liant les disques extérieurs DE à la cloche C et les disques intérieurs DI à la noix N . L'effort presseur exercé par les ressorts hélicoïdaux RH est alors intégralement transmis à travers l'empilage de disques.

- Q3-** Déterminer le nombre de surfaces frottantes noté n .
- Q4-** Donner l'expression de N_0 en fonction de K^h , L_0 et l_1 .
- Q5-** En déduire l'expression du couple maximal transmissible C_0^n par les n surfaces frottantes en fonction de n , f , R_{eq} , K^h , l_1 et l_0 .

Données : Dans la suite, on prendra $R_{eq} = 70\text{mm}$ et on considèrera un coefficient d'adhérence $f = 0,2$.

- Q6-** Donner la valeur numérique du couple maximal transmissible C_0^n . Conclure.

ANNEXE



Exercice 7: Exolift (extrait CCInp MP 2022)

Présentation

Exolift est un système d'aide à la montée d'échelle au sein d'un parc éolien. Dans une problématique d'entretien du parc éolien, les techniciens sont appelés à monter et descendre plusieurs fois par jour des échelles pouvant mesurer jusqu'à 80 mètres.

L'entreprise française Fixator, fabricant de treuils et de plateformes suspendues dans le domaine du bâtiment et des travaux publics (BTP) depuis plus de 90 ans, a conçu un système autonome d'aide à la montée, Exolift, qui fonctionne sur batterie, indépendamment de l'éolienne (site hors tension pendant la maintenance). Exolift est également un équipement qui minimise l'investissement initial pour les exploitants des parcs éoliens car il s'utilise sur une simple sangle installée à demeure sur l'échelle, réduisant le temps d'installation et le coût matériel.

Analyse structurelle

D'une manière générale, l'Exolift utilise le phénomène d'adhérence entre la sangle et un galet motorisé. La sangle étant fixée à l'échelle, lorsque le galet va tourner, l'ensemble Exolift va alors se déplacer le long de la sangle et supporter une partie du poids de l'utilisateur à la montée, comme à la descente (figure 1). Il est principalement constitué (figure 2) d'un cadre **1**, d'un panneau de commande **2**, d'une batterie **3**, d'un moteur électrique **4**, d'un réducteur avec renvoi d'angle **5** et d'un galet motorisé **6**. Le panneau de contrôle /commande permet à l'utilisateur d'obtenir des informations sur l'état du système (par le biais de 5 leds multicolores) et d'envoyer des ordres de commande. L'Exolift comporte également un axe dynamométrique **7**, permettant de mesurer l'action mécanique de l'utilisateur sur l'Exolift, et un capteur à effet Hall au niveau de l'arbre du moteur (uniquement pour des questions de sécurité).

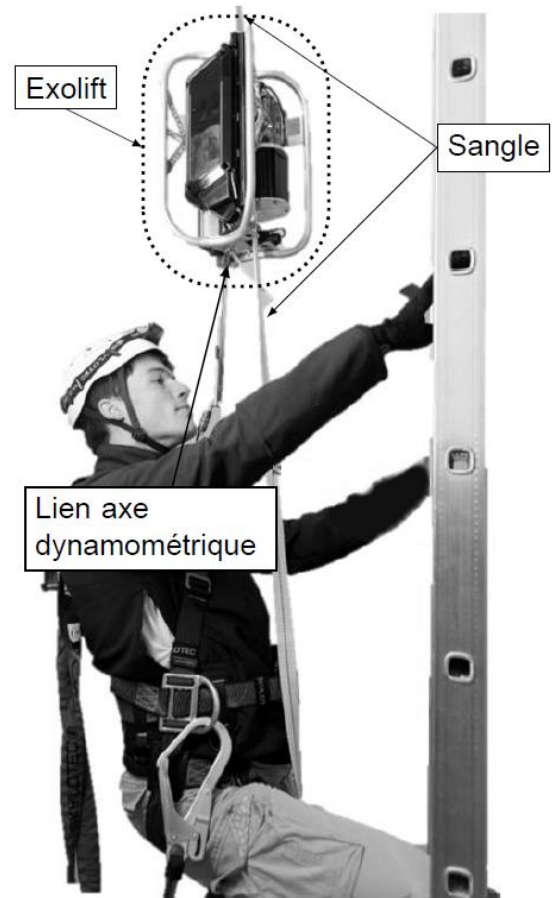


Figure 1 : Exolift utilisé sur une échelle

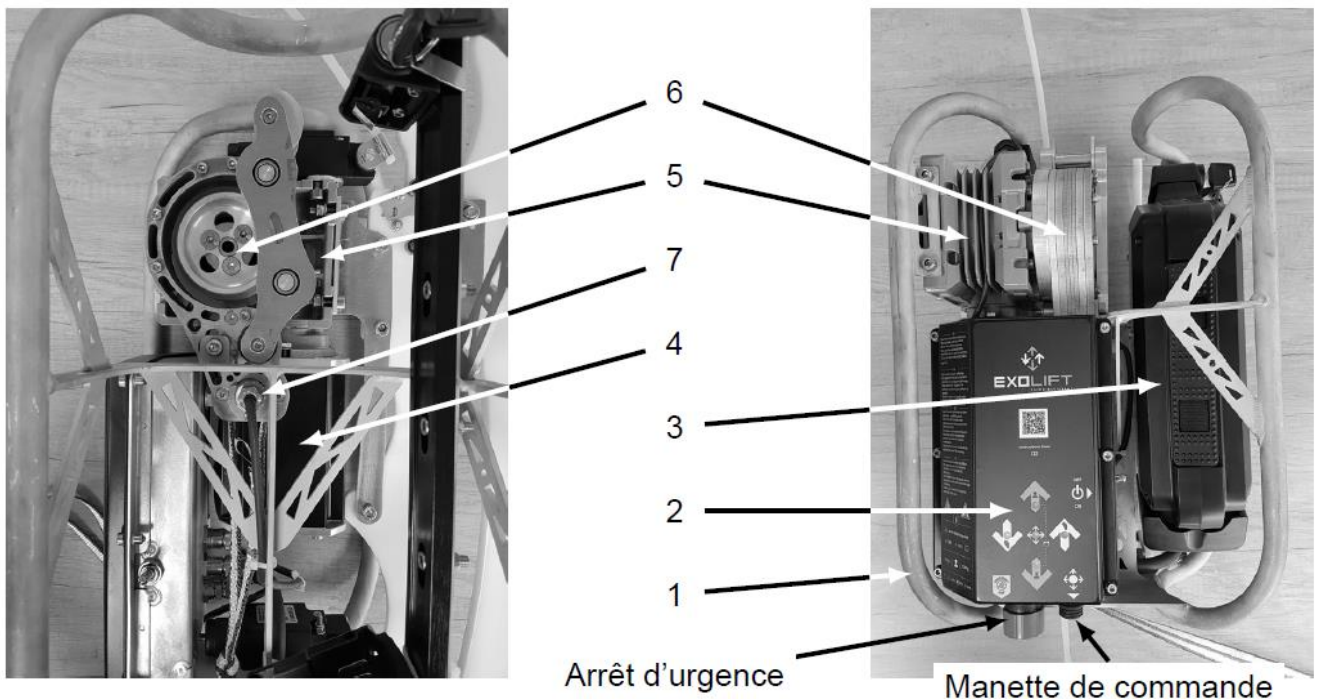


Figure 2 : À gauche, vue de l'Exolift suivant l'axe du galet (sans la batterie) ; à droite, vue de face avec la batterie

Objectif de l'étude : Assurer la sécurité du technicien

Une fois l'opération de pesée réalisée (nécessaire à l'adaptation de la puissance motrice au poids de l'utilisateur dans une première phase d'étalonnage) et l'action de montée/descente enclenchée par le technicien, l'Exolift va fournir la puissance nécessaire pour supporter une partie de la charge. Le moteur électrique transmet sa puissance mécanique de rotation à un galet par le biais d'un réducteur/renvoi d'angle. Par l'adhérence entre le galet et la sangle installée sur l'échelle, l'ensemble {Exolift + utilisateur} va se translater le long de l'échelle.

Hypothèses et notations

La figure 3 présente le paramétrage de l'étude.

- Les masses et inerties des galets de renvoi et de la sangle seront négligées.
- La base d'étude $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est orthonormée directe.
- L'étude se fera dans le sens de la montée à la vitesse constante V (le galet motorisé tourne alors dans le sens direct) par rapport à l'échelle considérée comme référentiel galiléen.
- Le galet, de rayon R_g , est en liaison pivot d'axe (O, \vec{y}) avec le corps de l'Exolift. Il est entraîné en rotation par l'ensemble moto-réducteur.
- Le contact galet/sangle se fait avec frottement de coefficient f .
- Toutes les autres liaisons sont supposées parfaites.
- $\vec{dF} = dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t}$ est la force élémentaire exercée par le galet sur l'élément de sangle d'angle élémentaire $d\theta$ où dF_n est la composante normale au contact et dF_t la composante tangentielle. Soit

$\{d\tau_{g \rightarrow s}\} = \left\{ \frac{d\vec{F}}{0} \right\}_M$ Le torseur des actions mécaniques élémentaires exercées par le galet motorisé sur l'élément de sangle d'angle élémentaire $d\theta$.

- Les forces \vec{T} et $\vec{T} + d\vec{T}$ correspondent respectivement aux actions mécaniques exercées par les brins mou et tendu de la sangle sur l'élément de sangle étudié. Ces forces sont normales aux sections droites de la sangle, paramétrées par les vecteurs unitaires \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .
- L'angle d'enroulement total de la sangle sur le galet, noté α , est assuré par la présence de deux galets de renvoi de centres respectifs A et B . Ces galets de renvoi sont en liaison pivot avec le corps de l'Exolift d'axes respectifs (A, \vec{y}) et (B, \vec{y}) .

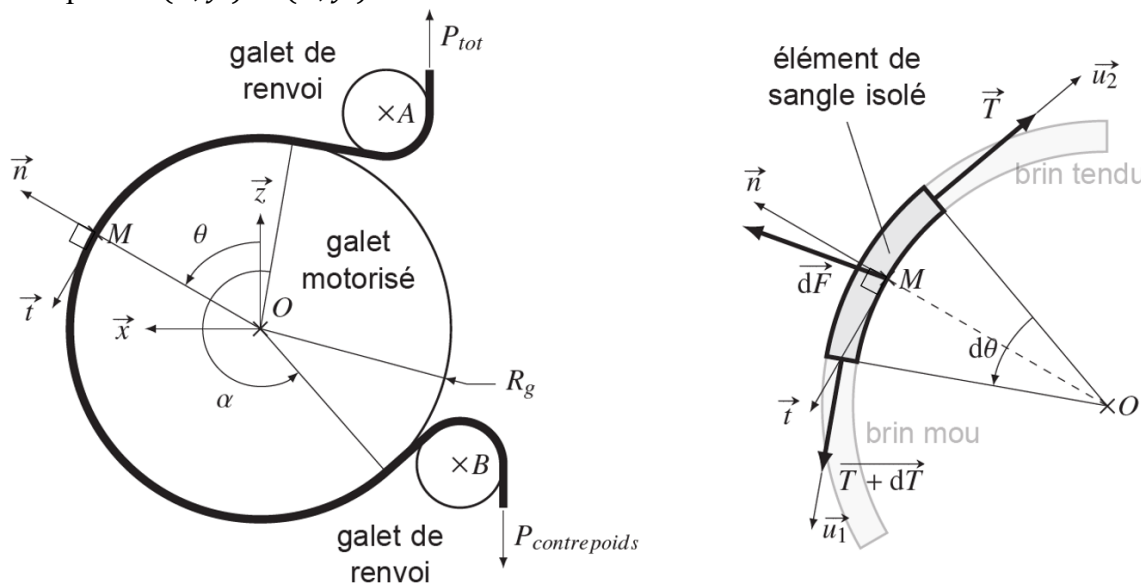


Figure 3 : Paramétrage local du contact galet/sangle

- Q1.** En isolant un galet de renvoi et la partie de la sangle en contact avec lui, montrer que le galet de renvoi ne modifie pas la valeur de la tension dans la sangle.
- Q2.** Montrer que le moment élémentaire des actions mécaniques du galet motorisé sur la sangle au point O s'écrit $\vec{dM}_O = R_g dF_t \vec{y}$.

Pour la **question 3**, on considère que la portion de sangle en contact avec le galet est indéformable. On note ω_s et ω_g les vitesses de rotation respectives de la portion de sangle et du galet par rapport à l'Exolift autour de l'axe (O, \vec{y}) . La suite de l'étude se fait à la limite d'adhérence entre la sangle et le galet.

- Q3.** Déterminer la vitesse de glissement au point M de la sangle par rapport au galet motorisé, notée $\overrightarrow{V_{M,s/g}}$, en fonction de ω_s et de ω_g . Justifier alors le sens de l'effort tangentiel dF_t .
- Q4.** D'après la loi de Coulomb et dans les hypothèses d'étude, donner la relation entre dF_n et dF_t .
- Q5.** En précisant le principe ou théorème appliqué sur l'élément de sangle, déterminer les relations qui relient les différents efforts aux paramètres du problème et en déduire l'expression des deux composantes élémentaires dF_n et dF_t .
- Q6.** Montrer qu'une linéarisation (développement limité) à l'ordre 1 permet d'obtenir le système linéaire suivant :
- $$\begin{cases} dF_n = T d\theta \\ dF_t = -T \end{cases}$$
- Q7.** En utilisant la relation obtenue à la **Q4**, déterminer l'expression de $T(\theta)$, tension dans la sangle à l'angle d'enroulement θ , en fonction du poids P_{tot} de l'ensemble à soulever appliqué à la sangle tel que $T(\theta = \theta_{min}) = P_{tot}$.
- Q8.** En déduire l'expression littérale du couple transmissible C_t par adhérence du galet sur la sangle à la limite de l'adhérence en fonction de R_g , P_{tot} , f et de α .

Les courbes de la figure 4 présentent les évolutions de la tension dans le brin mou de la sangle à la limite de l'adhérence pour différents efforts dans le brin tendu en fonction de l'angle d'enroulement total α . L'angle d'enroulement adopté par le constructeur est de 232° .

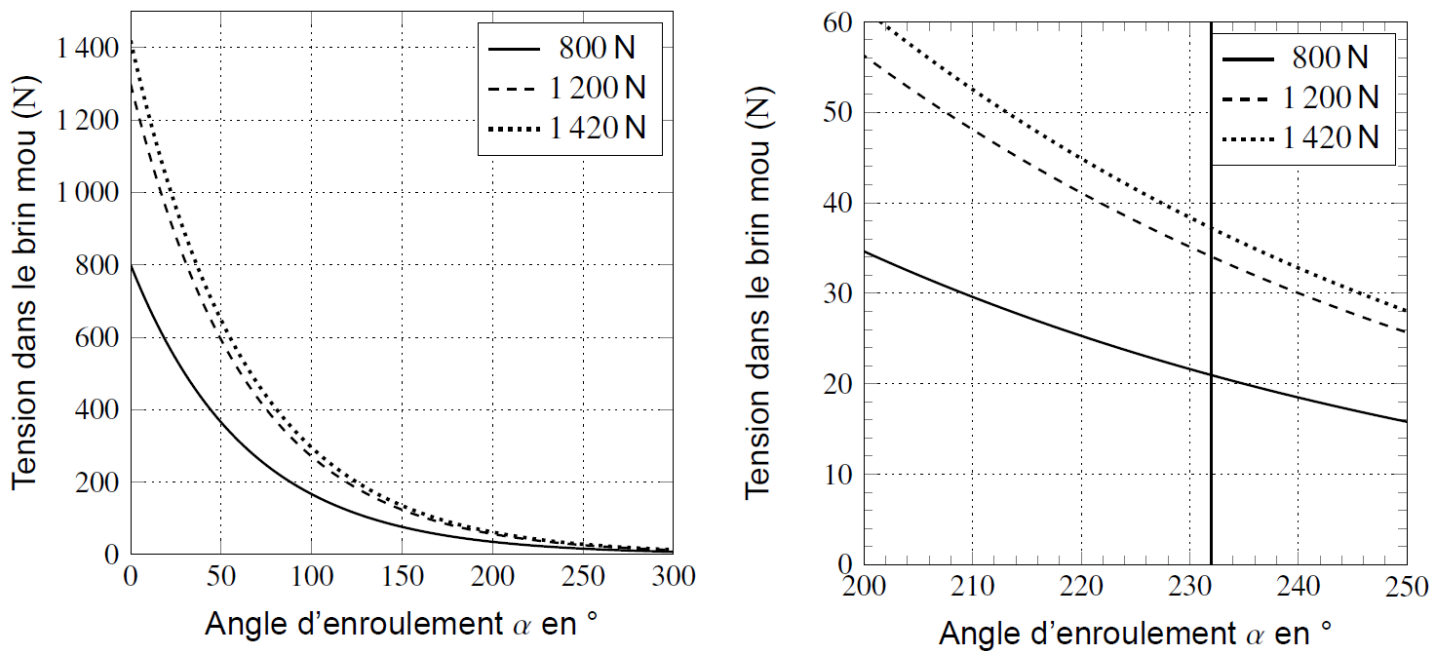


Figure 4 : Évolution de la tension du brin mou dans la sangle en fonction de l'angle d'enroulement de la sangle sur le galet pour différents efforts dans le brin tendu

- Q9.** À partir de la figure 4, justifier l'utilisation d'un contre-poids à fixer sur l'extrémité basse du brin mou de la sangle.

L'ensemble contre-poids est composé d'une portion de sangle, de longueur 2m et de masse linéique de $0,07 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$, et d'une masse de 4kg suspendue à cette portion de sangle.

- Q10.** Déterminer l'effort dans le brin mou de la sangle.
- Q11.** En déduire l'angle d'enroulement nécessaire au respect de l'exigence « le système accompagne un utilisateur équipé de masse de 130 kg maximum » sachant que l'Exolift a une masse de 12kg. Valider alors le choix de l'angle d'enroulement du constructeur.
- Q12.** Le constructeur a choisi d'utiliser un réducteur irréversible. Justifier ce choix vis-à-vis de la sécurité de l'utilisateur.

Exercice 8: capteur d'effort (extrait Mines MP 2008)

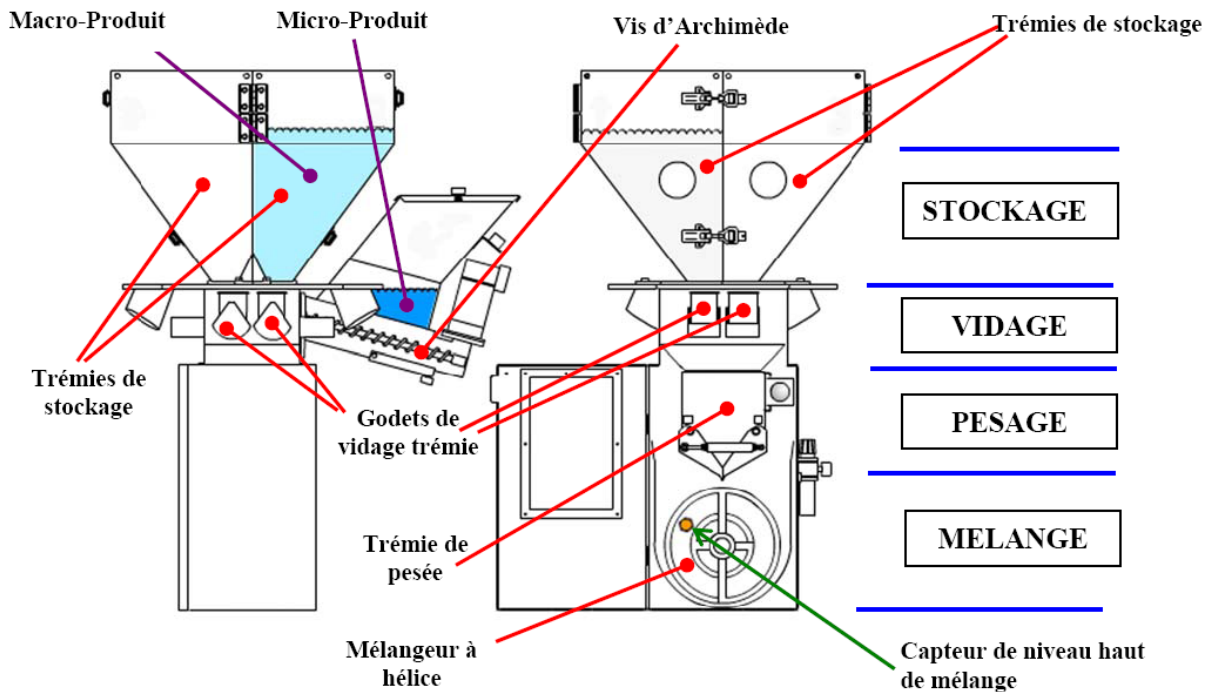
L'injection de matière plastique est une technique qui consiste à pousser de la matière plastique chauffée dans un moule afin de réaliser une pièce. La machine qui réalise cette opération est appelée « **presse à injecter** »



Exemple de produits réalisés : bacs translucides colorés

Doseur pondéral DPX

La matière plastique « première » sous forme de différents granulés (produits principaux : macro-produits et colorants : micro-produits) est conservée dans des silos de grande taille. Le transport de ces matières vers les presses est réalisé automatiquement au moyen de canalisations et d'aspirateurs dans des trémies de stockage situées au-dessus d'un **doseur pondéral** qui permet le **dosage et le mélange** des granulés.



Extrait du cahier des charges

Exigence technique	critères	valeurs
Mesurer le poids de granulés présents dans la trémie quel que soit leur « arrangement »	Précision	2%
	Position du centre de gravité	inconnue

Validation de l'exigence technique : Mesurer le poids de granulés

On souhaite mesurer le poids de la trémie de pesage, soit la résultante P du torseur :

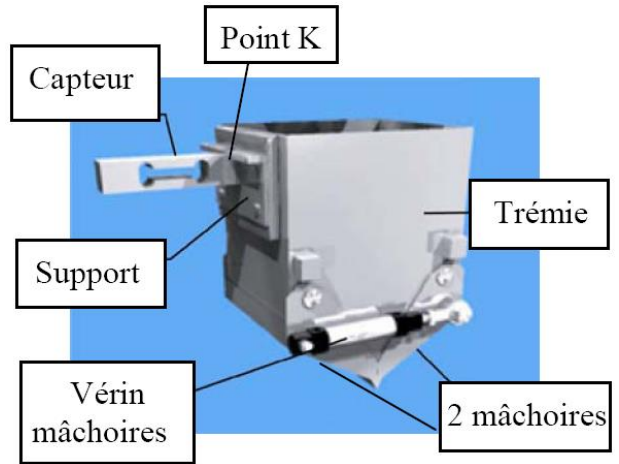
$$\{T_{\text{pesanteur} \rightarrow \text{trémie}}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ 0 \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_G \text{ avec } G : \text{centre de gravité de la trémie}$$

Un capteur visible sur la figure ci-contre supporte la trémie. Un de ses cotés est lié au bâti de la machine, son autre coté étant accroché en un point K à la trémie.

Lors de la chute des granulés, le **centre de gravité** de la masse des granulés occupe une **position variable et inconnue**.

Le torseur des actions mécaniques exercées par la trémie sur le capteur peut s'écrire :

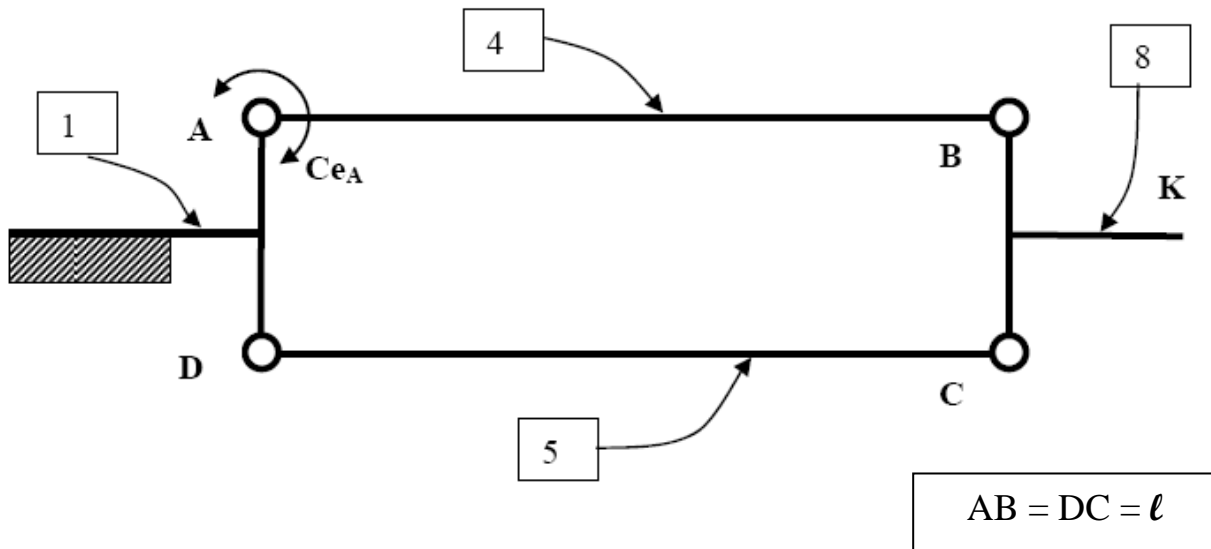
$$\{T_{\text{trémie} \rightarrow \text{capteur}}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ M_K \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_K$$



Le capteur réel peut être modélisé par une structure parallélogramme 4 barres liées par 4 liaisons pivots élastiques (voir figure donnée en annexe).

Pour que la mesure donnée par le capteur soit indépendante de la position de G , le comportement du capteur ne doit pas dépendre du moment M_K .

Pour cela on va étudier dans un premier temps un modèle simplifié (figure ci-dessous) dans lequel seule la liaison pivot en A est une liaison pivot élastique, les autres liaisons pivot en B, C, D étant parfaites.

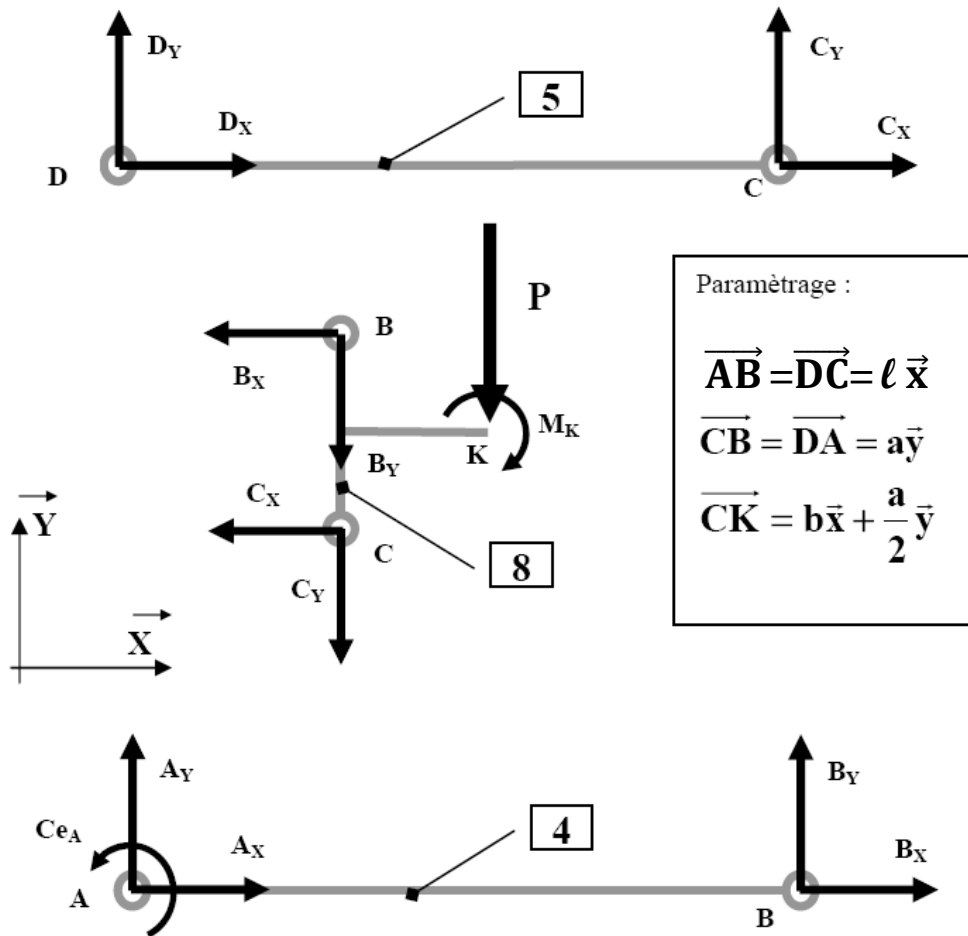


Le torseur de la liaison pivot élastique s'écrit : $\{T_{1 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} A_x \cdot \vec{x} + A_y \cdot \vec{y} \\ C_{eA} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A$

La technologie du capteur permet de mesurer C_{eA} . On souhaite donc vérifier qu'il existe une relation $P = f(C_{eA})$ indépendante de M_K .

Le problème est supposé plan. On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés par rapport aux autres actions mécaniques exercées.

La figure ci-dessous donne les Bilans d'Actions Mécaniques Extérieures à $\{5\}$, $\{8\}$ et $\{4\}$.



Q1- En isolant successivement $\{5\}$, $\{8\}$ et $\{4\}$, trouver la relation $P = f(Ce_A)$.

Le capteur d'efforts utilisé (cf annexe) est en réalité constitué de 4 zones rigides 1, 8, 4 et 5 reliées par 4 zones déformables 2, 3, 6 et 7 que l'on peut modéliser par quatre liaisons pivots élastiques. On retient un modèle d'étude plan et les torseurs d'efforts transmissibles dans chacune des liaisons pivots non parfaites peuvent s'écrire :

$$\{T_{1 \rightarrow 4}\}_{liaison3} = \begin{Bmatrix} A_x \cdot \vec{x} + A_y \cdot \vec{y} \\ C_{eA} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_A ; \quad \{T_{8 \rightarrow 4}\}_{liaison7} = \begin{Bmatrix} B_x \cdot \vec{x} + B_y \cdot \vec{y} \\ C_{eB} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_B ;$$

$$\{T_{8 \rightarrow 5}\}_{liaison6} = \begin{Bmatrix} C_x \cdot \vec{x} + C_y \cdot \vec{y} \\ C_{eC} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_C ; \quad \{T_{1 \rightarrow 5}\}_{liaison2} = \begin{Bmatrix} D_x \cdot \vec{x} + D_y \cdot \vec{y} \\ C_{eD} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_D$$

L'action de la trémie sur le capteur est modélisée par le torseur : $\{T_{trémie \rightarrow 8}\} = \begin{Bmatrix} -P \cdot \vec{y} \\ M_K \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}_K$

Des jauges de déformation, qui sont constituées de fins fils résistants collés dans la zone déformable 3, permettent de mesurer la valeur de Ce_A , ce qui permet de déterminer P .

Pour dimensionner le capteur il est donc nécessaire de déterminer la relation entre P et Ce_A dans le cas de cette deuxième modélisation beaucoup plus proche du capteur réel.

Hypothèse :

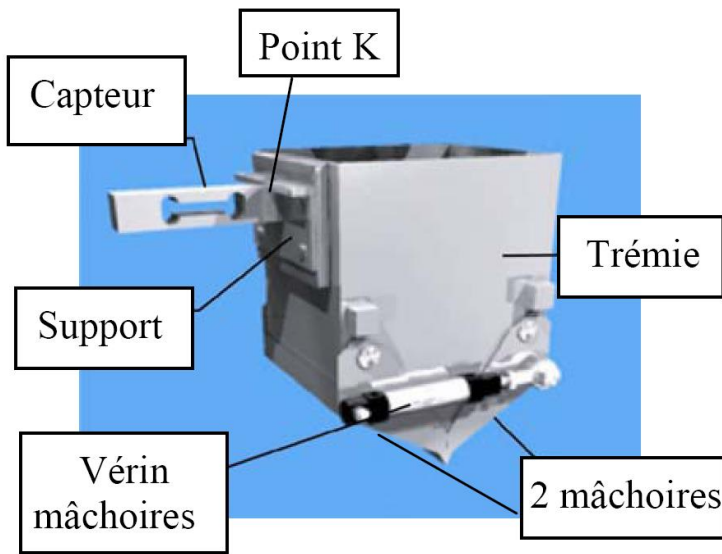
Les couples élastiques sont supposés proportionnels aux déformations élastiques en A, B, C et D.

On peut donc supposer que ces couples sont égaux : $Ce_A = Ce_B = Ce_C = Ce_D = C_e$

Q2- Déterminer la relation entre P et C_e pour cette nouvelle modélisation du capteur.

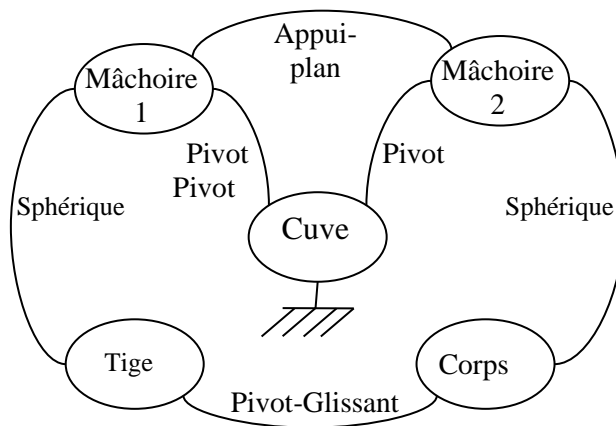
Etude d'une exigence non spécifiée : Vider la trémie de pesage

Sur les machines de petite capacité un dispositif à mâchoires, représenté ci-dessous, est retenu.

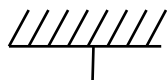


Les deux mâchoires sont en liaison pivot avec la cuve. En position fermée (figure de gauche) on modélise la liaison entre les deux mâchoires par une liaison appui plan. Un seul vérin actionne l'ouverture et la fermeture des mâchoires. La tige du piston du vérin et le corps du vérin sont respectivement en liaison sphérique avec chacune des deux mâchoires.

On donne le graphe de structure du dispositif étudié.

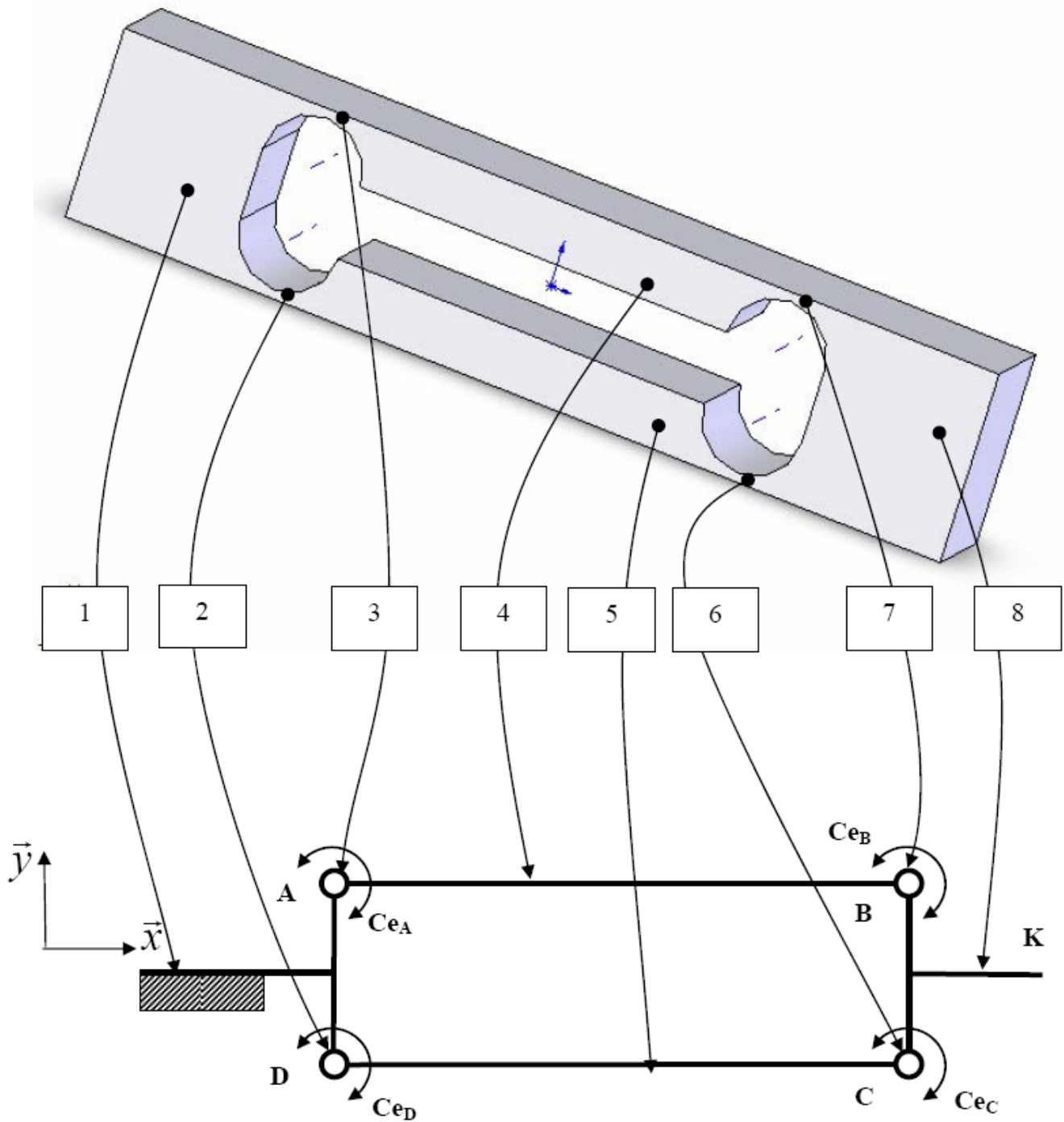


Q3- Compléter le schéma cinématique plan ci-dessous. il sera représenté dans la position « mâchoires fermées ».



ANNEXE

LE CAPTEUR D'EFFORTS ET SON MODELE PLAN 2D

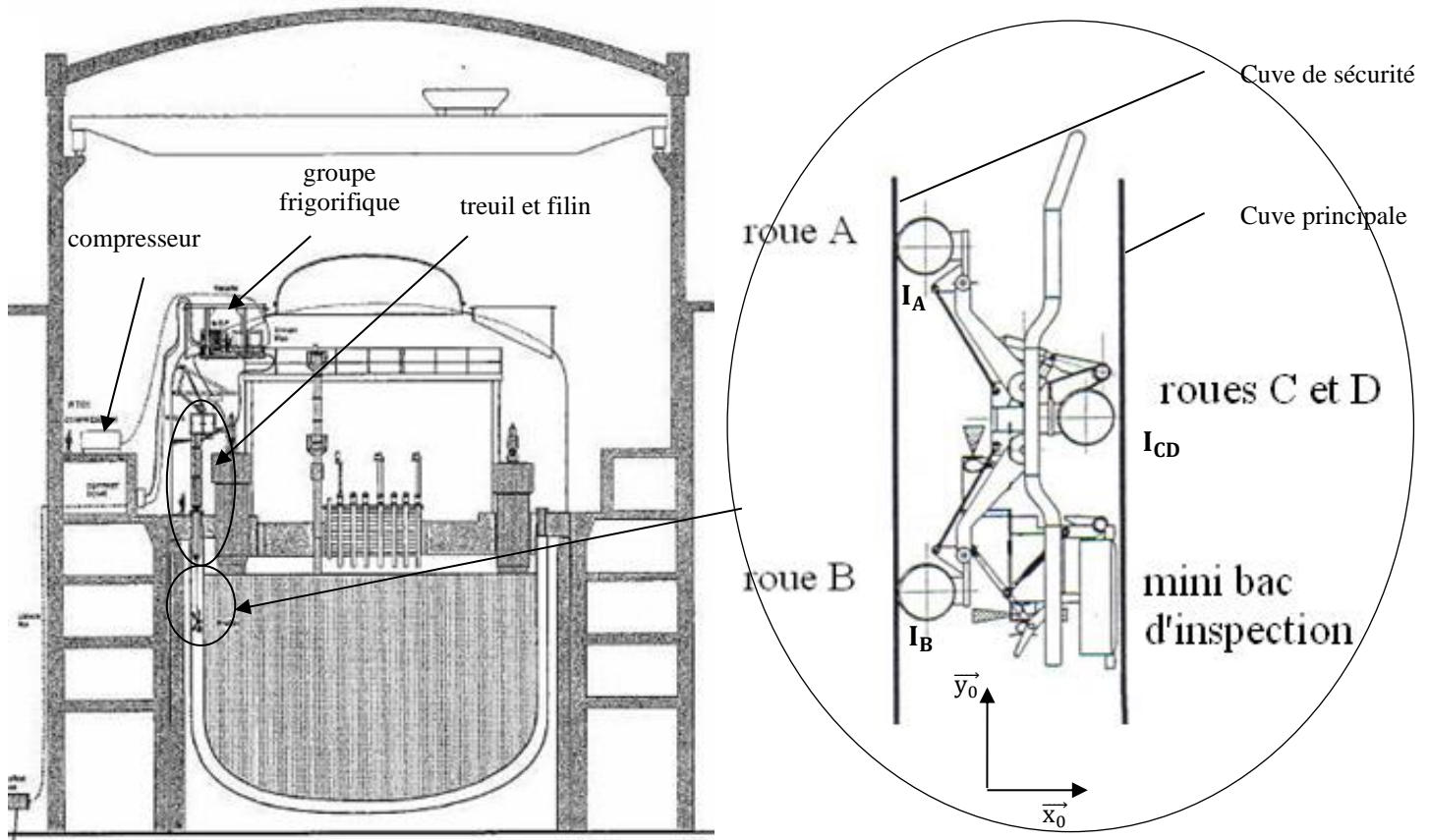


- 1 Partie rigide liée au bâti
- 8 Partie rigide liée à l'élément chargé (cuve) dont on veut mesurer le poids P
- 2 3 6 7 Parties déformables **identiques** modélisées par des liaisons pivots élastiques
- 4 5 Parties rigides modélisées par des barres

Exercice 9: robot MIR (extrait e3a MP 2012)

Ce robot permet l'inspection de cuves de réacteurs nucléaires.

Ce robot se déplace à l'aide de 4 roues motorisées (S_A , S_B , S_C et S_D) qui servent d'appui contre les parois de cuve (principale et de sécurité). Sur la partie inférieure, sont situés le mini bac d'inspection et son système de plaquage. Ce sous-ensemble constitue le dispositif d'inspection proprement dit.



Chaque module de déplacement est composé d'un corps, d'une roue, du motoréducteur de traction, du motoréducteur d'orientation et du potentiomètre d'orientation (photo ci-contre).

Le motoréducteur de traction permet la rotation de la roue pour faire avancer le robot. Le motoréducteur est composé :

- d'un moteur à courant continu ;
- d'une génératrice tachymétrique : cet instrument permet de mesurer la vitesse de la roue en générant une tension proportionnelle à la vitesse de rotation ;
- d'un réducteur dont le rapport de réduction est de 1/160.



Objectif : Vérifier les conditions d'adhérence et de maintien du robot contre les parois

Pour que l'engin soit en équilibre dans toutes les positions dans l'inter-cuve dans la zone verticale, il est nécessaire que la résultante des forces de frottement soit supérieure au poids de l'engin (1800 N). Les réactions des parois dépendent d'une part des efforts de plaquage appliqués sur les roues et d'autre part du coefficient de frottement entre roues et parois.

Modélisation des actions mécaniques :

Hypothèses :

- la symétrie permet de considérer le problème comme plan. En conséquence, les roues S_C et S_D seront considérées comme confondues (soit I_{CD} le point de contact des deux roues confondues avec la paroi) dans le même plan radial des cuves que les roues S_A et S_B ;
- on néglige les actions exercées par le filin de traction et par l'ombilical sur le robot ;

- les liaisons entre la paroi et les roues sont modélisées par des liaisons sphère-plan avec frottement ;
- les actions mécaniques entre la paroi et les roues \underline{S}_A et \underline{S}_B sont les mêmes (en valeur algébrique) ;
- les actions normales de la paroi sur les différentes roues sont égales aux efforts de plaquage et sont donc connues (norme de 1000 N) ;
- le poids du robot est de 1800 N.

Paramétrage :

- Soit $R_0(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe, avec G centre de gravité du robot (roues comprises) avec \vec{y}_0 verticale ascendante ;
- I_A (respectivement I_B) est le point de contact entre la paroi et la roue \underline{S}_A (respectivement \underline{S}_B) ;
- $\vec{GI}_A = -a \cdot \vec{x}_0 + b \vec{y}_0$;
- $\vec{GI}_B = -a \cdot \vec{x}_0 - b \vec{y}_0$;
- $\vec{GI}_{CD} = c \cdot \vec{x}_0$;
- $a = 385 \text{ mm}$ $b = 380 \text{ mm}$ $c = 315 \text{ mm}$;
- rayon de chacune des roues : $r = 90 \text{ mm}$

Q1. Réaliser un schéma représentant toutes les actions mécaniques qui s'exercent sur le robot par des vecteurs.

Détermination des actions mécaniques

- Q2.** A l'aide d'une seule équation du PFS, donner la relation entre les efforts tangentiels de frottement (les paramètres géométriques peuvent intervenir mais pas le poids).
- Q3.** Donner les expressions des efforts tangentiels de frottement en fonction du poids et des paramètres géométriques.

Vérification des conditions d'adhérence

Q4. Le constructeur garantit pour le coefficient de frottement, noté f_0 , entre les roues et la paroi une valeur égale à 0,5. Compte tenu des résultats précédents, indiquer si cette valeur de f_0 est suffisante.

Validation du choix du moteur

Le moteur peut transmettre un couple moteur de $0,35 \text{ N} \cdot \text{m}$. Le rendement de la transmission est de 0,9.

Q5. Le moteur convient-il ?

Exercice 10 : Roue Ez-wheel (extrait de Ccp MP 2013)

Etude du franchissement d'un obstacle

Le stator de la roue Ez-Wheel est fixé sur le châssis de l'engin et son rotor est assemblé directement sur la roue de l'engin.

Nous allons étudier cette roue autonome montée sur un fauteuil roulant. La figure ci-contre modélise la géométrie du fauteuil :

$$h = 800 \text{ mm} \quad l = 200 \text{ mm} \quad e = 400 \text{ mm}$$

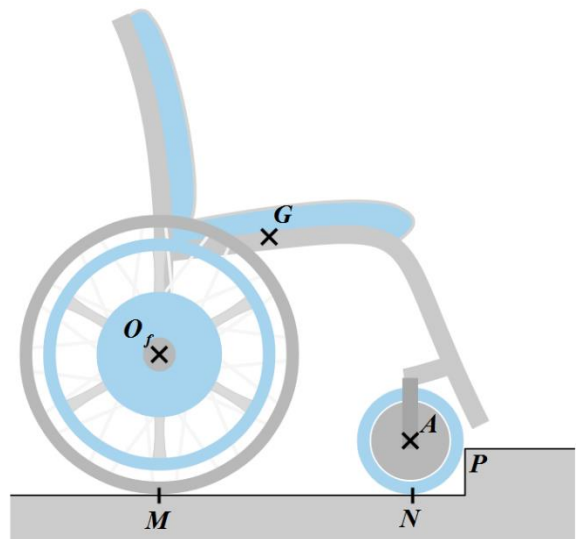
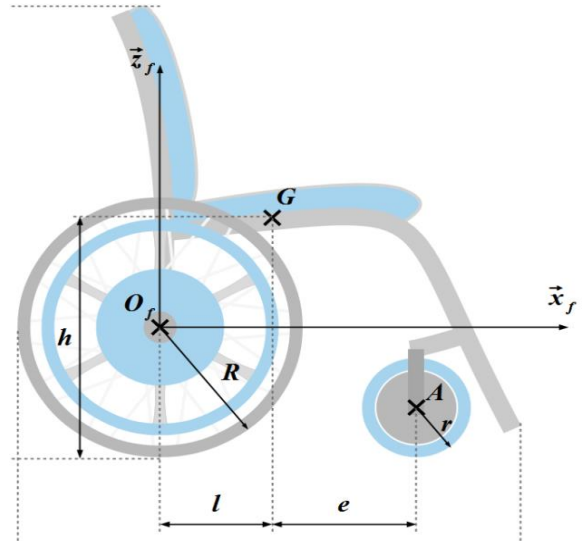
$$R = 400 \text{ mm} \quad r = 150 \text{ mm}$$

Lors de ses déplacements en extérieur, la personne sera amenée à franchir différents obstacles, notamment des bordures au niveau des passages piétons. Même si de nombreuses communes adoptent de plus en plus de passages abaissés pour faciliter le passage des fauteuils roulants, de nombreux passages restent encore réalisés avec des bordures classiques qui ont une hauteur d'environ 10 cm par rapport au niveau de la route.

La figure ci-contre représente le fauteuil en position de franchissement d'obstacle.

Les hypothèses d'étude de cette partie sont :

- le problème est plan ce qui revient à prendre en compte une seule roue avant et une seule roue arrière ;
- la roue avant est décollée du sol (pas de contact en N) et sont en contact avec le trottoir en P avec :
 $\vec{NP} = r' \vec{x}_f + d \vec{z}_f \quad d = 100 \text{ mm}$
 $r' = \sqrt{r^2 - (r - d)^2} \approx 141 \text{ mm}$
- les liaisons entre le sol et les roues en M et P sont modélisées par des liaisons sphère-plan avec frottement ;
- le coefficient de frottement sec en M et P vaut $f = 0,8$;
- l'ensemble étudié $S = \{\text{Fauteuil motorisé} + \text{Utilisateur}\}$ a une masse notée $M = 150 \text{ kg}$;
- la roue arrière est en liaison pivot d'axe (O_f, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- la roue avant est en liaison pivot d'axe (A, \vec{y}_f) par rapport au châssis du fauteuil ;
- les liaisons autres que les liaisons roue/sol sont considérées comme étant parfaites ;
- étant donné les faibles accélérations lors de cette phase de franchissement, une étude statique sera menée.



- Q5.** Sur le document réponse, représenter toutes les actions mécaniques qui s'exercent sur S par des vecteurs. Quel est le nombre d'inconnues, peut-on résoudre en isolant seulement le fauteuil ?
- Q6.** En isolant la roue avant, écrire l'équation du PFS qui relie les composantes de l'action en P et les paramètres géométriques.
- Q7.** En isolant S, écrire les deux équations du théorème de la résultante statique. En utilisant l'équation de la question précédente, donner une équation reliant les actions mécaniques en M, le poids et les paramètres géométriques.
- Q8.** En isolant S, écrire l'équation du PFS qui relie les composantes de l'action en M, le poids et les paramètres géométriques.
- Q9.** A partir des deux équations des deux questions précédentes, montrer que le franchissement de l'obstacle est possible.
- Q10.** Donner numériquement le couple moteur transmis à une roue, permettant de franchir l'obstacle. Expliciter la démarche.

La notice technique d'une version directement utilisable (roue avec pneu) est donnée ci-dessous.

ezW10R/W



Caractéristiques techniques

Diamètre	400 mm
Type de bandage	4x10 - Pneu route
Vitesse	0 à 15 km/h
Effort de poussée	-
Performance nominale	250 W à 10 km/h
Vitesse de pointe	18 km/h
Capacité batterie	240 Wh
Option(s)	-

- ✓ roue autonome ez-Wheel® ezW10R/W - Série 10"
- ✓ développée pour un usage en extérieur pour tous les milieux
- ✓ adaptée pour :
 - chariots de livraisons
 - chariots urbains
 - drones terrestres
 - (...)

Spécificités des composants

Moteur



Technologie	BLDC PM
Transmission	Hélicoïdale - 1 étage
Durée de vie indicative*	5 000 h / 15 000 km 1 500 000 starts/stops
Vitesse nominale	135 rpm (10 km/h)
Puissance nominale	250 W (S1 à 10 km/h)
Couple de pointe	52 Nm

Batterie



Électrochimie	Ni-MH long life
Énergie	240 Wh
Durée de vie indicative*	5-8 ans
Mode de recharge	Chargeur
Temps de charge minimum*	2h30 (pour 90%)

Interface



Câblée	-
Wireless	LR WPAN 2.4 GHz IEEE 802.15.4

Conditions d'utilisation



Températures	-20 à +60 °C
Indice IP	IP54
Période de maintenance*	5 ans

La roue peut être utilisée en intérieur ou en extérieur, sur une large gamme de températures. Les composants (y compris la batterie) ne nécessitent aucune inspection, ni maintenance sur toute la durée de vie du produit.

Poids



Poids de la roue	14.5 kg
Charge verticale maximale	150 kg par roue (sur une pente de 10%)

L'assemblage robuste permet à la roue de supporter de fortes charges et de résister à des contraintes de chocs et vibrations sévères.

Les produits ez-Wheel sont garantis 1 an à compter de la date d'achat et 2 ans contre les vices de fabrication. Consultez les conditions générales de vente pour plus d'informations.

Une adaptation du réducteur est nécessaire compte tenu du couple calculé précédemment.

Q11. Déterminer le facteur correctif de réduction à prévoir pour utiliser cette roue dans le cas du fauteuil roulant étudié. En déduire la vitesse de pointe de notre fauteuil équipé.

Exercice 11: Robot Roméo (extrait E3a MP 2018)

Roméo est un robot humanoïde en développement destiné à devenir un véritable assistant des personnes en perte d'autonomie.

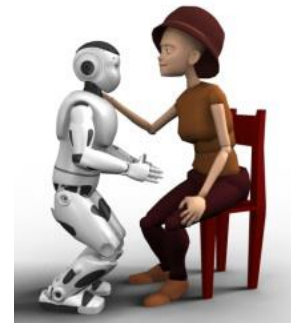


Le prototype mesure 1,43 m. Il est composé au total de 32 Moteurs à courant continu répartis dans 4 catégories de puissances différentes (11, 20, 60 et 150 W)

Concernant sa motricité, il est doté de :

- 4 actionneurs au niveau du cou ;
- 6 actionneurs dans chaque jambe ;
- 7 actionneurs dans chaque bras ;
- 1 articulation élastique passive sur chaque pied.

On s'intéresse à la validation statique de l'exigence de maintien en position de genuflexion.



L'articulation du genou est particulièrement sollicitée lorsque le robot a les genoux fléchis. La personne qui s'appuie sur l'épaule augmente le couple nécessaire au niveau des genoux pour maintenir une posture stable du robot. Il est nécessaire d'estimer ce couple dans la position la plus défavorable et de vérifier si le robot et ses moteurs pourront supporter une telle charge. On pourrait montrer que c'est l'articulation du genou qui est la plus sollicitée.

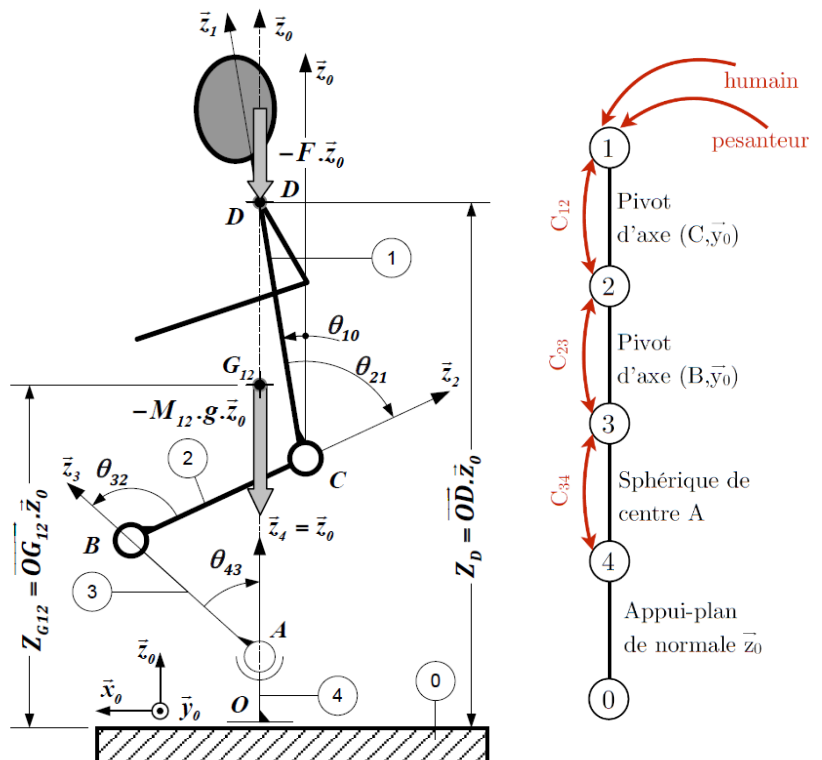
Hypothèses, modélisation, paramétrage et notation :

Dans cette partie, on suppose l'étude modélisable dans le plan de projection sagittal

- On considère le problème plan.
- On suppose que le robot est en position limite d'équilibre : seule la jambe gauche est sollicitée et le pied droit du robot est à la limite du décollement
- La force exercée par le patient sur le robot est modélisée par un glisseur de résultante $\vec{F} = -F\vec{z}_0$ appliquée au point D .
- L'étude est menée pour la position de genuflexion maximale du scénario envisagé, soit pour une cote du point D de : $Z_D = \vec{OD} \cdot \vec{z}_0 = 900 \text{ mm}$.
- Les points D et G_{12} sont supposés, dans ce modèle plan, à l'aplomb des articulations de la cheville

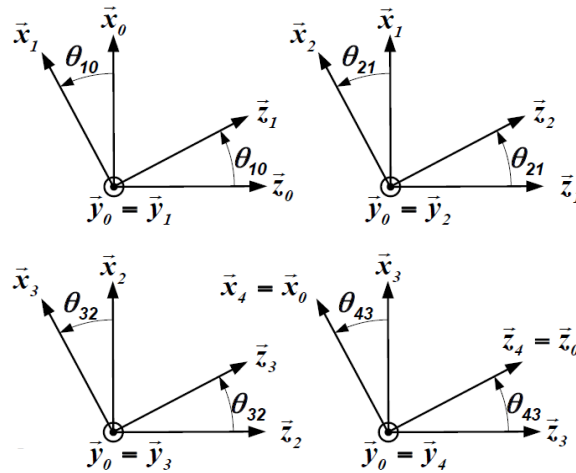
Les solides retenus sont :

- 0 : sol. On lui associe le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$;
- 1 : tronc + bras + tête. On lui associe le repère $\mathcal{R}_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$;
- 2 : cuisses. On lui associe le repère $\mathcal{R}_2 = (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$;
- 3 : tibias. On lui associe le repère $\mathcal{R}_3 = (A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$;
- 4 : pieds. On lui associe le repère $\mathcal{R}_4 = (O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4) = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.



Données géométriques :

- $\vec{OA} = l_4 \vec{z}_0$ avec $l_4 = 67$ mm ;
- $\vec{AB} = l_3 \vec{z}_3$ avec $l_3 = 290$ mm ;
- $\vec{BC} = l_2 \vec{z}_2$ avec $l_2 = 320$ mm ;
- $\vec{CD} = l_1 \vec{z}_1$ avec $l_1 = 485$ mm ;
- $\vec{OD} = Z_D \vec{z}_0$ avec $Z_D = 900$ mm ;
- $\vec{OG}_{12} = Z_{G12} \vec{z}_0$ avec $Z_{G12} = 550$ mm ;
- $\theta_{21} = -73^\circ$; $\theta_{32} = 106^\circ$; $\theta_{43} = -44^\circ$;
 $\theta_{10} = 10^\circ$.



Détermination du couple au genou

On note C_{32} le couple qu'exerce le tibia 3 sur la cuisse 2 permettant le maintien de la posture.
On note G_{12} le centre de masse du sous-ensemble $E_{12} = \{1,2\}$ et M_{12} sa masse : $M_{12} = 32$ kg.
L'effort du patient vaut $F = 150$ N.

Q1. A l'aide d'une étude statique dans le plan sagittal dont on détaillera la démarche, établir l'expression littérale du couple C_{32} nécessaire au niveau du genou pour maintenir cette posture sous charge. Réaliser l'application numérique.

Ce couple est créé par le motoréducteur implanté dans l'articulation du genou, dont les caractéristiques nécessaires à l'étude sont données ci-contre.

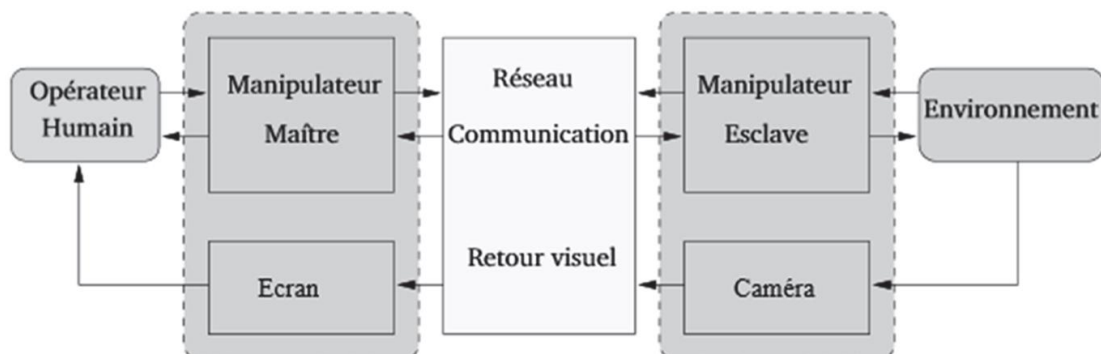
Couple de calage du moteur (N·m)	2,5
Rapport de transmission du réducteur r_{32}	95,91
Rendement du réducteur η	1

Le couple de calage pour un servomoteur est la quantité maximale de couple lorsque l'arbre (rotor) ne tourne pas et que les enroulements (stator) sont sous tension maximale admissible.

Q2. Calculer le couple délivré par le moteur et le comparer au couple de calage. Conclure quant à la capacité du robot à rester en position de genuflexion face au patient en appui sur son épaule.

Exercice 12: Téléchirurgie robotisée (extrait Cc inp PSI 2015)

La téléopération consiste à mettre en relation deux manipulateurs robotisés appelés communément maître et esclave. Le manipulateur maître permet au chirurgien de donner sa consigne de déplacement à l'aide d'un levier de commande tandis que l'esclave l'exécute au contact de l'environnement (l'organe à opérer). Les deux sous-systèmes échangent des informations de déplacement et d'effort au travers d'un ou plusieurs canaux de communication. Un retour visuel est également mis en place en parallèle à ce dispositif.



Le manipulateur maître étudié ici est constitué de :

- **une interface** (mécanisme de HOEKEN) permettant de transformer le mouvement de translation imposé par l'opérateur en mouvement de rotation (voir figure 4) ;
- **un variateur analogique** asservi en courant permettant au moteur de restituer un couple précis ;
- **un moteur rotatif** pour générer un retour d'effort sur l'opérateur humain ;
- **un capteur de position** (codeur incrémental) pour mesurer la consigne de position.

Sa constitution complexe associée à une boucle de commande rétro-actionnée permet un retour d'effort (on parle d'une commande haptique) pour que le chirurgien, situé à distance, « ressent » les efforts qu'il devrait percevoir en opérant sur place sans robot esclave (qui doit être à retour haptique lui aussi). La précision du geste chirurgical est grandement améliorée par ce retour haptique par rapport aux générations de robots chirurgicaux unilatéraux (l'information n'allant que du maître vers l'esclave).

Pour répondre à certaines exigences de linéarité (facilitant et améliorant la commande haptique) du cahier des charges, On ne s'intéresse ici qu'à la recherche des lois entrées/sorties :

géométrique

et

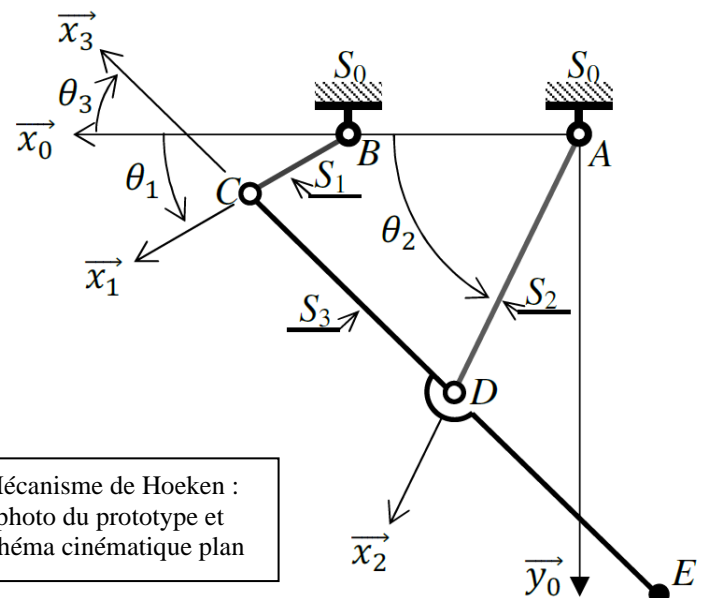
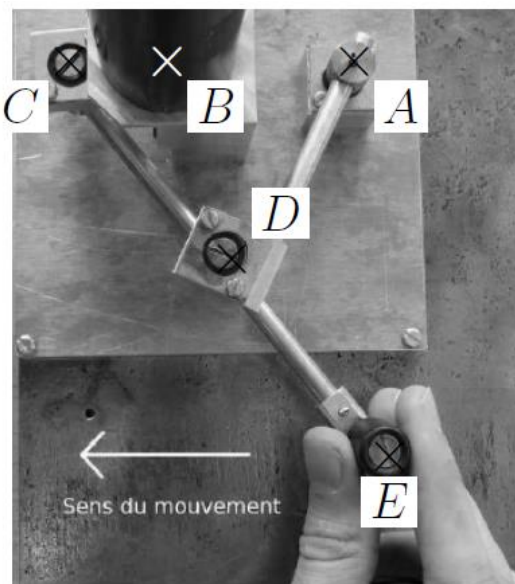
statique

«requirement» Mouvement rectiligne
Id = "1.2.1.2" Text = "Le mouvement du bouton de commande doit être rectiligne : amplitude $Y_{max}-Y_{min} = 0,5 \text{ mm}$ maxi taux de variation $dY/dX < 2 \%$ "

«requirement» Linéarité couple/effort
Id = "1.3.2.2" Text = "L'effort ressenti par le chirurgien doit être indépendant de la position de l'organe de commande : couple/effort = constante $\pm 1 \%$ "

«requirement» Linéarité déplacement
Id = "1.2.1.3" Text = "La relation entre les déplacements du bouton de commande et du corps d'épreuve du capteur de position doit être linéaire à 99 %"

Modélisation, paramétrage et notations :



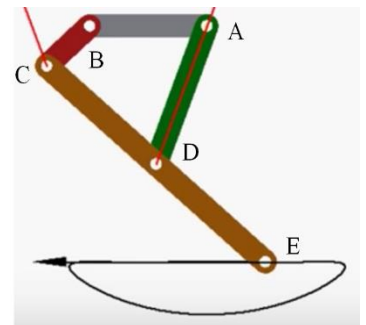
Solide	Repère associé	Paramètres géométriques
S_0 (bâti AB)	$\mathcal{R}_0(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$	$\vec{AB} = L_0 \vec{x}_0$ avec $L_0 = 50$ mm
S_1 (barre BC)	$\mathcal{R}_1(B, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_0)$	$\vec{BC} = L_1 \vec{x}_1$ avec $L_1 = 25$ mm $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$
S_2 (barre AD)	$\mathcal{R}_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_0)$	$\vec{AD} = L_2 \vec{x}_2$ avec $L_2 = 62,5$ mm $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$
S_3 (barre CDE)	$\mathcal{R}_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$	$\vec{ED} = \vec{DC} = L_2 \vec{x}_3$ $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$

- On notera $\left\{ T_{S_i \rightarrow S_j} \right\} = \begin{pmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{pmatrix}_{(P, B_0)}$ l'expression au point P, en projection dans la base B_0 , du torseur de l'action mécanique exercée par le solide S_i sur le solide S_j ; toutes les inconnues seront exprimées dans la base B_0 .
- L'action mécanique exercée par le moteur sur S_1 sera modélisée par un couple $C_m(t) \vec{z}_0$.
- L'action mécanique exercé par l'opérateur sur S_3 sera modélisée par une force $F(t) \vec{x}_0$ appliquée au point E.
- L'accélération de la pesanteur sera représentée par le vecteur $\vec{g} = -g\vec{z}_0$
- Les inerties des solides en mouvement et les frottements dans les guidages seront négligés.

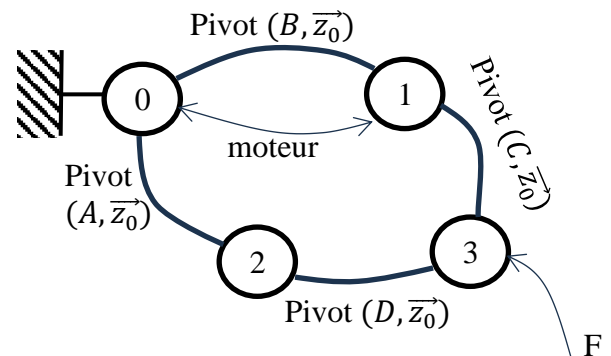
Q1. En développant une fermeture géométrique en projection dans la base du repère R_0 , donner une relation algébrique reliant les paramètres L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3 .

Q2. De même, exprimer le vecteur position du point E (\vec{AE}) dans la base du repère R_0 en fonction de L_0, L_1, L_2, θ_1 et θ_3 .

La loi entrée/sortie géométrique consiste à résoudre le système d'équations permettant d'obtenir le déplacement du point E en fonction de l'angle de rotation θ_1 du moteur et des différentes longueurs du mécanisme. Ce qui n'est pas trivial. Une simulation numérique permet d'obtenir la trajectoire de E dans R_0 qui présente une partie quasi rectiligne (figure ci-contre) conformément au diagramme des exigences du prototype étudié.



Q3. En vous aidant du graphe de liaisons ci-contre sur lequel ont été ajoutées les actions mécaniques extérieures ; proposez (sans résoudre) une démarche de résolution permettant d'établir la relation entre C_m et F donnée ci-dessous.



Q4. Réalisez les calculs nécessaires pour obtenir les équations scalaires issues de vos applications du Principe Fondamental de la Statique. Ces équations feront intervenir les inconnues des liaisons du mécanisme. La résolution finale menant à l'équation ci-dessous n'est pas demandée.

Loi entrée/sortie statique :

$$C_m(t) = \frac{L_1 F}{\sin(\theta_2 - \theta_3)} (\sin(\theta_1) \sin(\theta_2 + \theta_3) - 2 \cos(\theta_1) \sin(\theta_2) \sin(\theta_3))$$