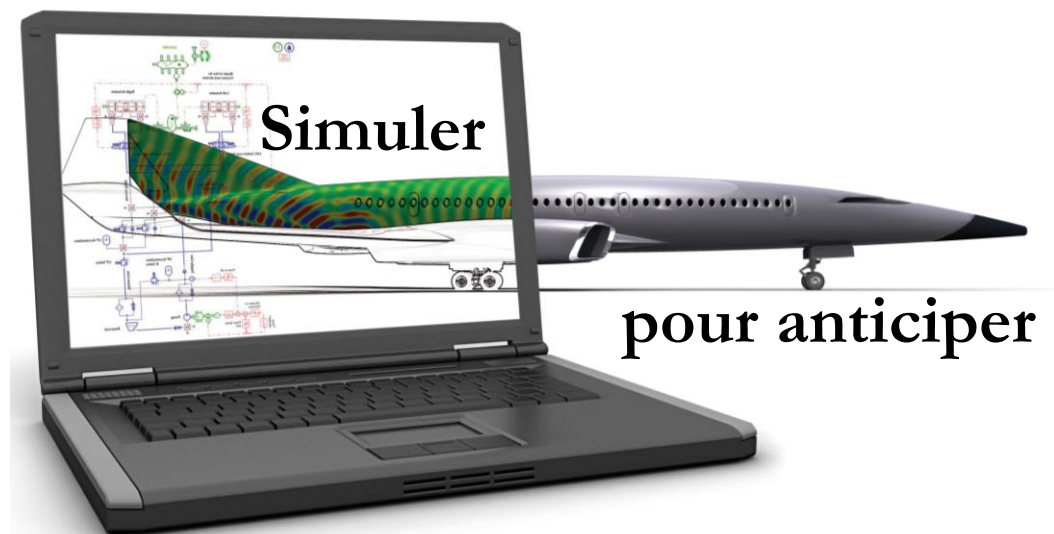


Dynamique des solides

extraits du référentiel de 2nde année

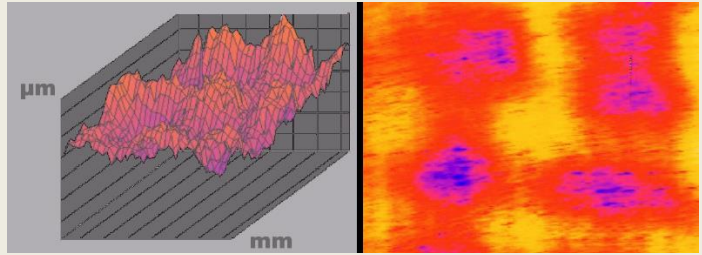
Compétence visée	Savoir-faire associé
Proposer un modèle de connaissance et de comportement	Déterminer le torseur dynamique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, par rapport à un autre solide
Proposer une démarche de résolution	Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
	Proposer une méthode permettant la détermination d'une inconnue de liaison
Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique	Choisir une méthode pour déterminer la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre
	Déterminer les inconnues de liaison ou les efforts extérieurs spécifiés dans le cas où le mouvement est imposé
	Déterminer la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus



Sciences Industrielles de l'Ingénieur
 2^{ème} année de CPGE
 Lycée Claude Fauriel

Illustration du cours : rugosimètre tridimensionnel à grande vitesse (extraits du concours Mines-Ponts 2006)

La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques (longueur, orientation, perpendicularité...). La figure ci-dessus représente un relevé rugosimétrique tridimensionnel d'une partie d'une aube de turbine de haute précision (à droite en fausses couleurs).



La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal et des données (algorithmes informatiques), qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables, représentatives des caractéristiques physiques de la surface analysée.

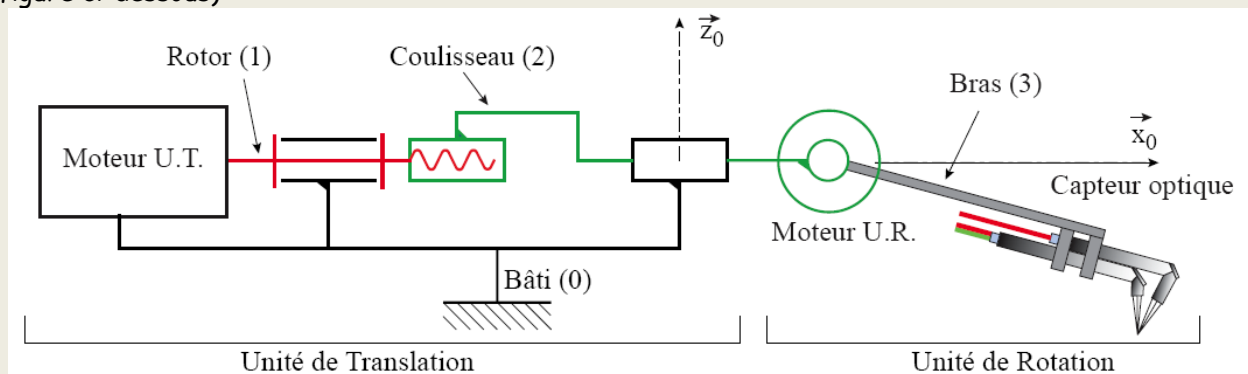
De la conjonction des caractéristiques techniques du capteur et du traitement numérique vont découler les qualités essentielles du rugosimètre : sa rapidité ; sa résolution ; sa précision ; son amplitude de mesure. Lorsque l'ensemble est suffisamment rapide, il peut être utilisé pour réaliser des relevés de surface (z fonction de (x, y) , ou « mesure 3D ») et non plus simplement des profils linéaires (z fonction de x , ou « mesure 2D »).

Le principe d'un capteur opto-mécanique (association d'un capteur optique et d'un capteur mécanique) a été retenu, pour ce prototype. Il est décrit succinctement ci-après :

Le principe d'un capteur opto-mécanique (association d'un capteur optique et d'un capteur mécanique) a été retenu, pour ce prototype. Il est décrit succinctement ci-après :

- un capteur optique assure une résolution verticale comparable à celle des meilleurs capteurs mécaniques actuels (< 10 nm). Ce capteur, de faible amplitude de lecture ($20 \mu\text{m}$), permet une mesure rapide des hautes fréquences spatiales (variations rapides) des profils rugosimétriques ;
- un asservissement mécanique vertical à grande amplitude (environ 10 mm) permet à la tête optique de suivre les moyennes et basses fréquences spatiales (variations plus lentes) des profils. Un second capteur donne la position verticale de la tête optique.

Le profil complet sera obtenu par la somme des signaux fournis par les deux capteurs. Le déplacement vertical du capteur optique est assuré par une Unité de Rotation (U.R.) portée par le coulisseau (2) (figure ci-dessous) :

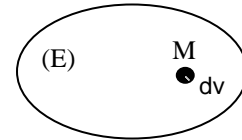


Ce capteur opto-mécanique est lui-même déplacé au-dessus de la surface à mesurer par une Unité de Translation (U.T.) à vitesse régulée, ce qui permet d'obtenir un « profil 2D », z fonction de x . La vitesse de déplacement visée par ce prototype est de $20 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans sa future version 3D, une seconde U.T. de direction (\vec{y}) permettra de donner une image de la surface par une juxtaposition de profils 2D : on « scanner » la surface.

Les calculs d'avant-projet doivent permettre de dimensionner les différents composants qui seront utilisés et de définir certains paramètres de réglages (paramètres d'asservissement ...). Les calculs prévisionnels visent, dans un premier temps, à déterminer les équations dynamiques qui permettront de déterminer les couples moteurs (minimum) des différents actionneurs en fonction des caractéristiques géométriques, massiques et inertielles des pièces ainsi que des conditions d'utilisation.

1 - Cinétique :

1.1 – Rappels :



- masse d'un système matériel : $m_E = \iiint_E \rho(M) dv$ avec $dv =$ volume élémentaire en M
 $\rho(M) =$ masse volumique en M

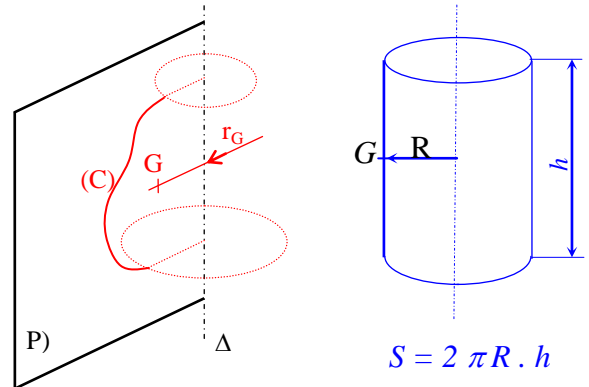
- centre de gravité (de masse, d'inertie) G : $\int_E \overrightarrow{GM} dm = \vec{0} \Rightarrow m_E \overrightarrow{OG} = \int_E \overrightarrow{OM} dm$

Remarque : si E est un solide indéformable, alors G est fixe dans tout repère lié à E.

Premier théorème de Guldin :

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane C tournant autour d'un axe Δ de son plan P, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

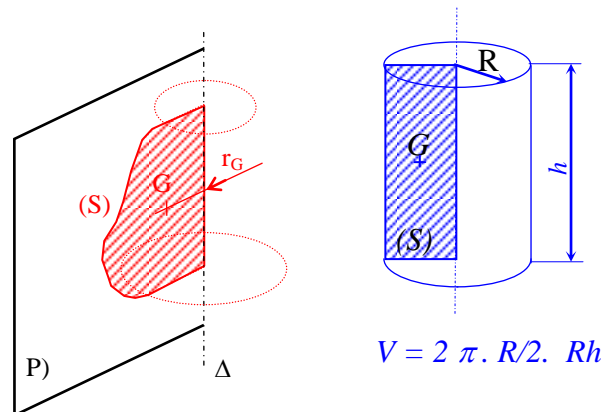
$$S = 2 \pi r_G L$$



Deuxième théorème de Guldin :

Le volume engendré par une surface S plane tournant autour d'un axe Δ de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité.

$$V = 2 \pi r_G S$$



Remarque : ces 2 théorèmes permettent de trouver des surfaces, des volumes ou la position de centres de gravité.

1.2 - Principe de conservation de la masse :

E est à masse conservative si, $\forall t_1$ et t_2 , $m(E, t_1) = m(E, t_2)$

Conséquence : soient E un ensemble matériel en mouvement / repère R

et $\vec{f}(M, t)$ un champ de vecteurs défini en tout point M de E, continûment différentiable par rapport à t (vitesse, accélération...),

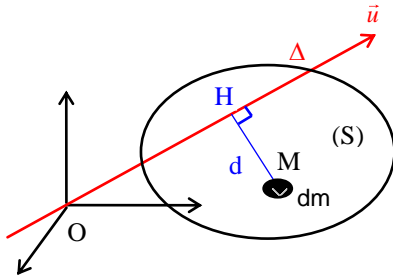
le principe de conservation de la masse permet d'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left[\int_E \vec{f}(M, t) dm \right]_R = \int_E \left[\frac{d\vec{f}(M, t)}{dt} \right]_R dm$$

1.3 - Opérateur d'inertie d'un solide :

1.3.1 - Moments d'inertie d'un solide :

- par rapport à un axe Δ :



H = projection orthogonale de $M \in S$ sur $\Delta = (O, \vec{u})$

$$I(S, \Delta) = \int_S \overline{MH}^2 dm = \int_S d^2 dm = I_{O_u}(S)$$

d = distance de M à l'axe Δ unité: $kg.m^2$

- par rapport à un point A : $I_A(S) = \int_S \overline{AM}^2 dm$

Soit M de coordonnées x, y, z dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

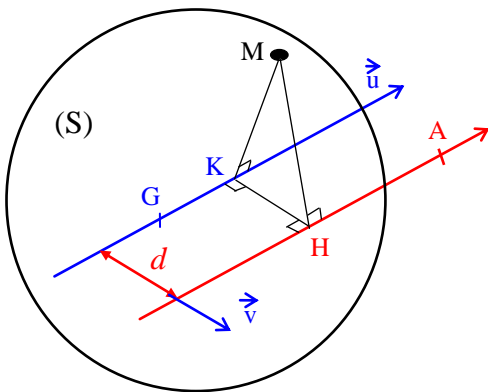
$$I_O(S) = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

$$I_{O_x}(S) = \int_S (y^2 + z^2) dm$$

Si le moment d'inertie, proportionnel au carré de la distance à l'axe de rotation, est faible, le solide atteint rapidement sa vitesse de rotation nominale autour de cet axe \Rightarrow nécessité de diminuer l'inertie des solides en rotation (moteurs, ...).

L'inertie peut être utile pour réguler des mouvements (volants d'inertie).

1.3.2 - Théorème de Huygens :



Soit un axe \vec{u} passant par le centre de gravité G d'un solide S et un axe parallèle à la distance d passant par le point A. On cherche la relation entre $I_{G_u}(S) = I_{A_u}(S)$

$$I_{A_u}(S) = \int_S \overline{HM}^2 dm = \int_S (\overline{HK} + \overline{KM})^2 dm$$

$$= \int_S \overline{HK}^2 dm + \int_S \overline{KM}^2 dm + \int_S 2 \overline{HK} \cdot \overline{KM} dm$$

$$= m d^2 + I_{G_u}(S) + 2 \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KM} dm$$

$$+ 2 \int_S \overline{HK} \cdot \overline{KG} dm + 2 \int_S \overline{HK} \cdot \overline{GM} dm + 2 d \vec{v} \cdot \int_S \overline{GM} dm$$

or $\int_S \overline{GM} dm = \vec{0}$ par définition du centre de gravité

d'où $I_{A_u}(S) = I_{G_u}(S) + m d^2$

1.3.3 - Matrice d'inertie d'un solide en O (préciser le repère R !) : (ou tenseur d'inertie)

$$I_O(S) = \begin{pmatrix} I_{Ox} & -P_{Oxy} & -P_{Oxz} \\ -P_{Oxy} & I_{Oy} & -P_{Oyz} \\ -P_{Oxz} & -P_{Oyz} & I_{Oz} \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_R$$

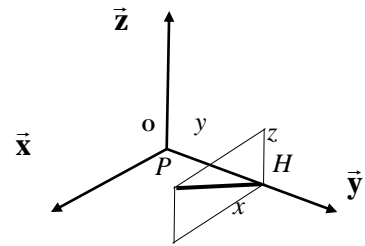
avec $P_{Oxy} = \int xy dm =$ produit d'inertie / plan Oxy

et $I_{Ox} = \int (y^2 + z^2) dm =$ moment d'inertie / Ox

L'opérateur étant linéaire, il est représentable par une matrice réelle symétrique. Cette matrice d'inertie du solide S écrite au point O et dans la base B ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) est souvent notée :

$$[I_{(O,S)}] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_B$$

Avec $\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$



moments d'inertie :

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm \quad / \text{axe } (O, \vec{x})$$

$$B = \int_S (z^2 + x^2) dm \quad / \text{axe } (O, \vec{y})$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2) dm \quad / \text{axe } (O, \vec{z})$$

produits d'inertie :

$$D = \int_S yz \cdot dm \quad / \text{axes } (O, \vec{y}), (O, \vec{z})$$

$$E = \int_S zx \cdot dm \quad / \text{axes } (O, \vec{z}), (O, \vec{x})$$

$$F = \int_S xy \cdot dm \quad / \text{axes } (O, \vec{x}), (O, \vec{y})$$

On montre que le moment d'inertie du solide S par rapport à un axe \vec{u} passant par O s'écrit :

$$I_{Ou}(S) = \vec{u} \cdot \mathbf{I}_O(S) \vec{u}$$

et

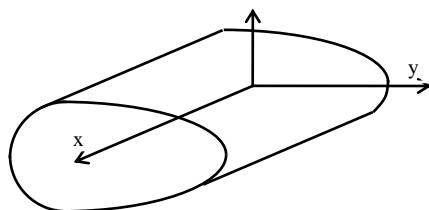
$$P_{Ouv}(S) = \vec{u} \cdot \mathbf{I}_O(S) \vec{v}$$

1.3.4 - Trièdre principal d'inertie :

La matrice d'inertie étant symétrique et réelle, il existe un repère R' dans lequel la matrice est diagonale. Ce repère est appelé repère principal d'inertie et les 3 axes, directions principales d'inertie. Les moments d'inertie A', B' et C' sont les moments principaux d'inertie de S en O.

1.3.5 - Propriétés de la matrice d'inertie :

Si un solide possède un plan de symétrie (par exemple, le plan Oxy), alors les produits d'inertie P_{Oxz} et P_{Oyz} sont nuls (démonstration: on calcule les produits d'inertie pour $z > 0$ et pour $z < 0$: la somme des 2 s'annulent). La matrice a alors la forme suivante :



$$\begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

l'axe perpendiculaire à ce plan (donc z) est principal d'inertie.

Si l'axe Oz est un axe de révolution (**Attention : pas un axe de symétrie !**), alors les moments d'inertie I_x et I_y sont égaux et les trois produits d'inertie sont nuls et la matrice d'inertie a l'allure ci-contre.

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{-, -, z}$$

De plus $A = C/2 + \int_{P \in S} z^2 \cdot dm$ donc on calculera tout d'abord C, puis $\int_{P \in S} z^2 \cdot dm$, pour en déduire

A au lieu de calculer A à partir de sa définition (calcul trop long !).

Remarque : La base sera toujours liée au solide ainsi l'exploitation des symétries matérielles est aisée et les termes de la matrice sont constants dans le temps.

Matrice d'inertie en G du cylindre de masse m , de rayon R et hauteur h , d'axe (G, z) :

$$\begin{pmatrix} m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{-,-,z}$$

Matrice d'inertie en G d'un parallélépipède de masse m , de côtés a , b et c :

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Si S se compose de plusieurs solides élémentaires et si les matrices correspondant aux solides élémentaires sont définies au même point et dans la même base :

$$[\mathbf{I}_{(O,S)}]_{\mathbf{B}} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{I}_{(O,S_i)}]_{\mathbf{B}} \quad (\text{même point et même base})$$

Si le solide possède une forme creuse, la matrice associée à cette forme sera affectée du signe moins.

1.3.6 - Théorème de Huygens :

Ce théorème donne la relation existant entre $\mathbf{I}_G(S)$, matrice d'inertie du solide S au centre de gravité G , et $\mathbf{I}_P(S)$, matrice d'inertie en un point P quelconque tel que $\overrightarrow{PG} = x \vec{x} + y \vec{y} + z \vec{z}$

$$\mathbf{I}_P(S) = \mathbf{I}_G(S) + \begin{pmatrix} m(y^2+z^2) & -mxy & -mxz \\ -mxy & m(x^2+z^2) & -myz \\ -mxz & -myz & m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Donc, la matrice d'inertie en un point quelconque P est la somme de la matrice d'inertie exprimée en G et de la matrice d'inertie en G « du point P affecté de la masse totale ».

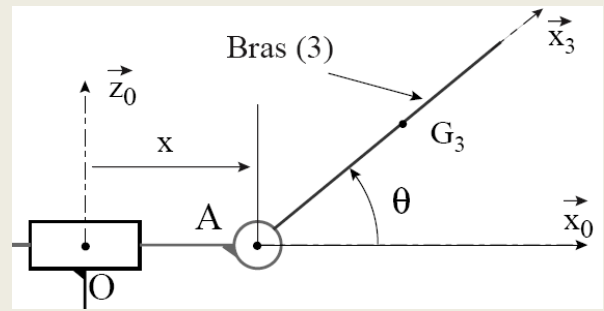
Remarques :

- les moments d'inertie sont minimaux lorsqu'ils sont calculés par rapport à des axes passant par G .
- (y^2+z^2) représente le carré de la distance entre les axes (P , \vec{x}) et (G , \vec{x})
- les composantes du vecteur \overrightarrow{PG} doivent nécessairement être exprimées dans la base du solide, puisque la matrice d'inertie est toujours exprimée dans la base associée au solide.

Inertie de l'ensemble (3) :

- masse : $m_3 = 8g$
- centre d'inertie (G_3) : $\overrightarrow{AG_3} = r \cdot \overrightarrow{x_3}$ avec $r = 27,5\text{mm}$
- matrice d'inertie en (A) :

$$I(A,3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(A, \overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})}$$



Détermination de la matrice d'inertie de l'ensemble (3) en son centre de gravité G_3 par application du théorème de Huygens :

$$I(G_3,3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})} - m_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B - m_3 \cdot r^2 & -D \\ -E & -D & C - m_3 \cdot r^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_3}, \overrightarrow{y_3}, \overrightarrow{z_3})}$$

1.4 - Torseur cinétique (ou torseur des quantités de mouvement) d'un système matériel E par rapport au repère R :

1.4.1 – Définition :

$$\mathbf{C}(E/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{p}(E/R) = \int_E \vec{V}(M/R) dm \\ \vec{\sigma}(A, E/R) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R) dm \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \text{résultante cinétique ou quantité de mvt} \\ = \text{moment cinétique en A de E/R} \end{array}$$

d'après le principe de conservation de la masse :

$$\vec{p}(E/R) = \int_E \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_R dm = \frac{d}{dt} \left[\int_E \overrightarrow{OM} dm \right]_R = \frac{d}{dt} [m\overrightarrow{OG}]_R = m \vec{V}(G/R)$$

Relation entre les moments cinétiques en deux points A et B :

$$\vec{\sigma}(B, E/R) = \vec{\sigma}(A, E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge m \vec{V}(G/R)$$

1.4.2 - Cas du solide indéformable S :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}(A, S/R) &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}] dm \\ &= \left(\int_S \overrightarrow{AM} dm \right) \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \int_S (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}) dm \\ &= m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \vec{X} \end{aligned}$$

Calculons le vecteur \vec{X} :

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y\omega_z - z\omega_y \\ z\omega_x - x\omega_z \\ x\omega_y - y\omega_x \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_x(y^2 + z^2) - xy\omega_y - xz\omega_z \\ -xy\omega_x + \omega_y(x^2 + z^2) - zy\omega_z \\ -xz\omega_x - zy\omega_y + \omega_z(x^2 + y^2) \end{vmatrix}$$

d'où

$$\mathbf{C}_{(S/R)} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}(G \in S/R) \\ \mathbf{A} \left\{ \vec{\sigma}(A, S/R) = m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \mathbf{I}_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R) \right\} \end{array} \right\}$$

Cas particuliers : * A en G $\Rightarrow \vec{\sigma}(G, S/R) = \mathbf{I}_G(S) \vec{\Omega}(S/R)$

* A ∈ S et fixe dans R $\Rightarrow \vec{\sigma}(A, S/R) = \mathbf{I}_A(S) \vec{\Omega}(S/R)$

1.4.3 – Remarques importantes :

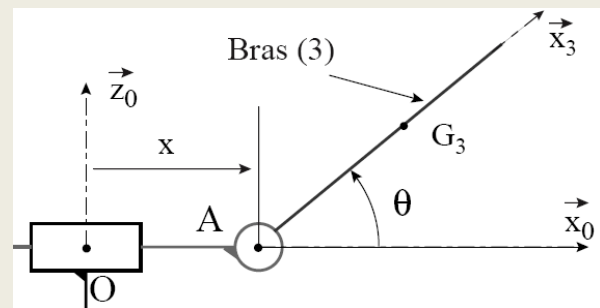
$$\vec{\sigma}_{A(S/R)} = [\mathbf{I}_{(A,S)}]_{B_S} \cdot (\vec{\Omega}_{S/R})_{B_S} + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}_{A \in S/R}$$

- A est quelconque
- la matrice et le vecteur vitesse de rotation doivent être écrits dans la même base B_S , base liée au solide (sinon on changera de base le vecteur vitesse de rotation et pas la matrice ...)
- la base B_S est liée au solide car les symétries matérielles permettent de simplifier la matrice et, de plus, ses termes sont constants dans le temps (plus simple pour la future dérivation)
- on pourra trouver 3 bases différentes dans l'écriture d'un même moment cinétique :
 $\vec{\sigma}_{A(2/0)} = M \vec{x}_4 + \dots$ B_2 liée au solide 2, B_0 base liée à la référence (galiléenne),
 B_4 base de projection.

Moment cinétique de l'ensemble (3) :

- masse : $m_3 = 8g$
- centre d'inertie (G_3) : $\overrightarrow{AG_3} = r \cdot \vec{x}_3$ avec $r = 27,5mm$
- matrice d'inertie en (A) :

$$I(A, 3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$



Détermination du moment cinétique de l'ensemble (3) en son centre de gravité G_3 .

Première solution : utiliser le théorème de Huygens pour déplacer la matrice d'inertie au point G_3

Précédemment nous avons trouvé :

$$I(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B - m_3 \cdot r^2 & -D \\ -E & -D & C - m_3 \cdot r^2 \end{bmatrix}_{(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$$

Donc $\vec{\sigma}_{G_3(3/0)} = [\mathbf{I}_{(G_3, 3)}]_{B_3} \cdot (\vec{\Omega}_{3/0})_{B_3} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B - m_3 \cdot r^2 & -D \\ -E & -D & C - m_3 \cdot r^2 \end{bmatrix}_{(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)} = \begin{bmatrix} -F \cdot \dot{\theta} \\ (B - m_3 \cdot r^2) \cdot \dot{\theta} \\ -D \cdot \dot{\theta} \end{bmatrix}_{(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$

Deuxième solution : calculer le moment cinétique au point A (car matrice donnée en A) puis utiliser la relation de Varignon

Puisque le point A n'est pas fixe :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A(3/0) &= [I(A,3)] \cdot \vec{\Omega}(3/0) + m_3 \cdot \overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{V}(A,3/0) \\ &= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{B_3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_3} + m_3 \cdot r \cdot \vec{x}_3 \wedge \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \\ &= -F \cdot \dot{\theta} \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \vec{y}_3 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3\end{aligned}$$

$$\text{Or } \vec{V}(G_3,3/0) = \vec{V}(A,3/0) + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overrightarrow{AG_3} = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 \wedge r \cdot \vec{x}_3 = \dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3$$

Donc la relation de Varignon donne :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_{G_3}(3/0) &= \vec{\sigma}_A(3/0) + \overrightarrow{G_3A} \wedge m_3 \cdot \vec{V}_{G_3}(3/0) \\ &= -F \cdot \dot{\theta} \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \vec{y}_3 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - r \cdot \vec{x}_3 \wedge m_3 \cdot (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3) \\ &= -F \cdot \dot{\theta} \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - \cancel{m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta}) \vec{y}_3 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 + \cancel{r \cdot m_3 \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta} \cdot \vec{y}_3 - r^2 \cdot m_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_3 \\ &= -F \cdot \dot{\theta} \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - r^2 \cdot m_3 \cdot \dot{\theta}) \vec{y}_3 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3\end{aligned}$$

Ces deux calculs montrent qu'il est nécessaire de bien réfléchir avant de choisir une méthode ...

1.5 - Torseur dynamique (ou torseur des quantités d'accélération) d'un système matériel E par rapport au repère R :

1.5.1 – Définition :

$$\mathcal{D}(E/R) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{A}}(E/R) = \int_E \vec{\Gamma}(M/R) dm \\ \vec{\delta}(A, E/R) = \int_E \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R) dm \end{array} \right. \begin{array}{l} = \text{résultante dynamique de E/R} \\ = \text{moment dynamique en A de E/R} \end{array}$$

d'après le principe de conservation de la masse : $\vec{\mathcal{A}}(E/R) = m \vec{\Gamma}(G/R)$

donc la résultante dynamique est la dérivée par rapport au temps de la résultante cinétique.

Relation entre les moments dynamiques entre deux points A et B :

$$\vec{\delta}(B, E/R) = \vec{\delta}(A, E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge m \vec{\Gamma}(G/R)$$

1.5.2 - Relation entre moment cinétique et moment dynamique pour un solide indéformable S :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\vec{\sigma}(A, S/R) \right]_R &= \frac{d}{dt} \left[\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R) dm \right]_R = \int_S \frac{d}{dt} \left[\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/R) \right]_R dm \\ &= \int_S (\vec{V}(M/R) - \vec{V}(A/R)) \wedge \vec{V}(M/R) dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R) dm\end{aligned}$$

soit:
$$\bar{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}(A,S/R) \right]_{\mathbf{R}} + m \bar{\mathbf{V}}(A/R) \wedge \bar{\mathbf{V}}(G/R)$$

Cas particuliers :

- * A en G $\Rightarrow \bar{\delta}(G,S/R) = \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}(G,S/R) \right]_{\mathbf{R}}$
- * Solide S en translation $\Rightarrow \bar{\delta}(G \in S/R) = \bar{\mathbf{0}}$ mais $\bar{\delta}(M \in S/R) \neq \bar{\mathbf{0}}!$
- * A fixe dans R $\Rightarrow \bar{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt} \left[\bar{\sigma}(A,S/R) \right]_{\mathbf{R}}$

Remarques : Comme il n'existe pas de formule simple pour le calcul du moment dynamique d'un solide, on calcule en général le moment cinétique puis on dérive.
Le calcul du moment dynamique au centre d'inertie ou en un point fixe de R étant plus simple, il vaut mieux d'abord calculer ce type de moment puis utiliser la relation liant les moments d'un torseur (relation de Varignon) pour le calculer en un autre point.

Si le système est plan (Oxy), $\bar{\sigma}$ et $\bar{\delta}$ sont portés par \bar{z} :

$$\bar{\sigma}(A,S/R) = m \underbrace{\overrightarrow{AG} \wedge \bar{\mathbf{V}}(A \in S/R)}_{// \bar{z}} + \underbrace{I_A(S)}_{I_{ax} \omega \bar{z} \text{ car xy est plan de symétrie}} \bar{\Omega}(S/R) = \sigma \bar{z}$$

$$\bar{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt} \underbrace{\left[\bar{\sigma}(A,S/R) \right]_{\mathbf{R}}}_{\dot{\sigma} \bar{z}} + m \underbrace{\bar{\mathbf{V}}(A/R) \wedge \bar{\mathbf{V}}(G/R)}_{// \bar{z}}$$

1.5.3 – Remarques importantes :

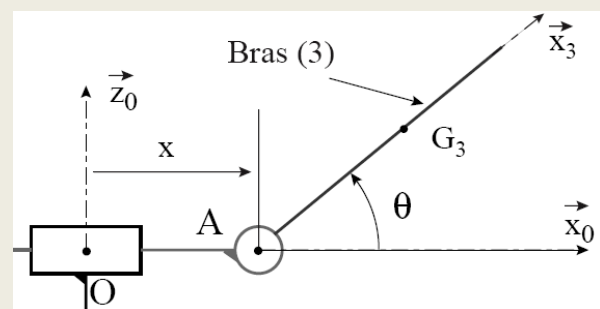
$$\bar{\delta}_{A(S/R)} = \left(\frac{d}{dt} \bar{\sigma}_{A(S/R)} \right)_{\mathbf{R}} + m \cdot \bar{\mathbf{V}}_{A/R} \wedge \bar{\mathbf{V}}_{G/R}$$

- A est quelconque
- $\bar{\mathbf{V}}_{A/R} = \left(\frac{d}{dt} O\bar{A} \right)_{\mathbf{R}}$ vitesse de A dans R, cf cinématique du point.
- Attention, il existe des situations où $\bar{\mathbf{V}}_{A/R} \neq \bar{\mathbf{V}}_{A \in S/R}$: par exemple, si A est un point de contact entre deux pièces avec condition de roulement sans glissement.
- Le point G appartient forcément au solide alors $\bar{\mathbf{V}}_{G/R} = \bar{\mathbf{V}}_{G \in S/R}$

Moment dynamique de l'ensemble (3) :

- masse : $m_3 = 8g$
- centre d'inertie (G_3) : $\overrightarrow{AG_3} = r \cdot \bar{x}_3$ avec $r = 27,5mm$
- matrice d'inertie en (A) :

$$I(A,3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(A, \bar{x}_3, \bar{y}_3, \bar{z}_3)}$$



Détermination du moment dynamique de l'ensemble (3) en son centre de gravité G_3 .
Au centre de gravité, nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}_{G_3(3/0)} &= \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{G_3(3/0)} \right]_{R_0} \\
&= \left[\frac{d}{dt} (-F \cdot \dot{\theta} \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - r^2 \cdot m_3 \cdot \dot{\theta}) \vec{y}_3 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3) \right]_{R_0} \\
&= -F \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_3 + F \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}_3 + (B \cdot \ddot{\theta} - r^2 \cdot m_3 \cdot \ddot{\theta}) \vec{y}_3 - D \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - D \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_3 \\
&= \left. \begin{array}{l} -F \cdot \ddot{\theta} - D \cdot \dot{\theta}^2 \\ B \cdot \ddot{\theta} - r^2 \cdot m_3 \cdot \ddot{\theta} \\ F \cdot \dot{\theta}^2 - D \cdot \ddot{\theta} \end{array} \right|_{R_3}
\end{aligned}$$

Détermination du moment dynamique de l'ensemble (3) au point A.

Le point A n'étant pas fixe, nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{\delta}_{A(3/0)} &= \left[\frac{d}{dt} \vec{\sigma}_{A(3/0)} \right]_{R_0} + m_3 \cdot \vec{V}_{A/R_0} \wedge \vec{V}_{G/R_0} \\
&= \left[\frac{d}{dt} (-F \cdot \dot{\theta} \vec{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \vec{y}_3 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3) \right]_{R_0} + m_3 \cdot \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \wedge (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3) \\
&= \left. \begin{array}{l} -F \cdot \ddot{\theta} - D \cdot \dot{\theta}^2 \\ B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot (\ddot{x} \cdot \sin \theta + \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta) + m_3 \cdot \dot{x} \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \\ -D \cdot \ddot{\theta} + F \cdot \dot{\theta}^2 \end{array} \right|_{R_3} \\
&= \left. \begin{array}{l} -F \cdot \ddot{\theta} - D \cdot \dot{\theta}^2 \\ B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \cdot \sin \theta \\ -D \cdot \ddot{\theta} + F \cdot \dot{\theta}^2 \end{array} \right|_{R_3}
\end{aligned}$$

1.5.4 - Éléments cinétiques d'un ensemble E de n solides S_i en mouvement / R :

$$\mathbf{C}(E/R) = \sum_{i=1}^n \mathbf{C}(S_i/R) \qquad \mathbf{D}(E/R) = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}(S_i/R)$$

Remarques importantes :

- Pour les torseurs, attention de calculer les moments au même point pour tous les solides.
- Il est interdit de déterminer le centre de gravité de l'ensemble pour éviter cette somme !!!

2 - Principe Fondamental de la Dynamique : (PFD)

2.1 – Énoncé :

Il existe au moins un espace-temps *galiléen* tel que, pour tout ensemble matériel E, le torseur dynamique de E dans cet espace est constamment égal au torseur des efforts extérieurs appliqués à E :

$$\mathbf{D} (E/R_g) = \mathbf{T} (Ext \rightarrow E)$$

2.2 - Référentiels galiléens :

Espace - temps = repère à 3 dimensions (longueur en mètre) + chronologie (temps en seconde)

espaces galiléens approchés :

* *repère de Copernic* (centre d'inertie du système solaire + 3 directions stellaires) → étude des fusées interplanétaires

* *repère lié au centre d'inertie de la terre* + 3 directions stellaires → étude du mouvement des corps restant au voisinage de la terre ou expériences de longue durée

* *repère lié à la terre* → mécanismes étudiés en laboratoire

On montre que tout repère R en translation rectiligne uniforme / R_g est aussi galiléen.

2.3 - Théorème de la résultante dynamique : (TRD)

$$m_E \vec{\Gamma} (G, E/R_g) = \vec{R} (Ext \rightarrow E)$$

Une force de 1 Newton provoque une accélération de 1 m/s^2 au centre d'inertie d'un ensemble matériel de 1 kg.

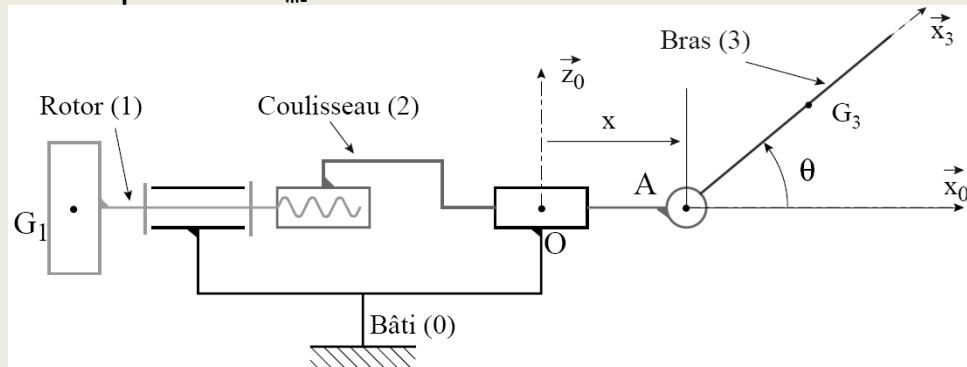
2.4 - Théorème du moment dynamique : (TMD)

$$\vec{\delta} (A, E/R_g) = \vec{M}_A (Ext \rightarrow E)$$

Remarque : En prenant A en un point fixe de R_g ou au centre d'inertie G de E, le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique d'où les théorèmes du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(A, E/R_g)]_{R_g} = \vec{M}(A, Ext \rightarrow E) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}(G, E/R_g)]_{R_g} = \vec{M}(G, Ext \rightarrow E)$$

Détermination du couple moteur C_{m1}



La figure ci-dessus présente le schéma et le paramétrage qui sera utilisé pour cette partie de l'étude. Ce système comporte quatre pièces :

Le bâti (0) : On associe à cette pièce le repère $(R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$ que l'on considère galiléen :

Le rotor (1) :

- moment d'inertie selon l'axe (O, \vec{x}_0) noté J_1 avec $J_1 = 10^{-6} \text{ kg.m}^2$;
- centre d'inertie (G_1) , avec $\vec{OG}_1 = -a \cdot \vec{x}_0$;
- la liaison pivot (L0/1), dont le paramètre angulaire est $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, présente un frottement visqueux de coefficient f_1 , créant un moment $\vec{M}_{O0 \rightarrow 1} = -f_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \vec{x}_0$ ($f_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Nm / (rd.s}^{-1})$)
- un moteur (M_1) gère le mouvement de rotation de (1) par rapport à (0). Le couple moteur appliqué sur (1) est noté : $\vec{C}_{moteur1 \rightarrow 1} = C_{m1} \cdot \vec{x}_0$

Le coulisseau (2) :

- masse : m_2 avec $m_2 = 2 \text{ kg}$;
- centre d'inertie (G_2) ,
- la liaison hélicoïdale (L1/2) (supposée parfaite) possède un pas noté (pa) ($pa = 0,5 \text{ mm/tour}$). Ce pas est à droite (sens classique) ;
- la liaison glissière (L0/2), dont le paramètre de position (translation) est noté (x) : $\vec{OA} = x \cdot \vec{x}_0$, présente un frottement visqueux de coefficient f_2 , créant une force : $\vec{F}_{0 \rightarrow 2} = -f_2 \cdot \dot{x} \cdot \vec{x}_0$ ($f_2 = 5 \text{ N / (m.s}^{-1})$)

L'ensemble (3) :

- masse : $m_3 = 8 \text{ g}$;
- centre d'inertie (G_3) : $\vec{AG}_3 = r \cdot \vec{x}_3$;
- matrice d'inertie en (A) : $I(A, 3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$
- la liaison pivot (L2/3), de paramètre angulaire $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$, présente un frottement visqueux de coefficient f_3 , créant un moment : $\vec{M}_{A2 \rightarrow 3} = -f_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$
- un moteur (M_3) gère la rotation de l'ensemble (3) par rapport à (2). Le couple moteur appliqué sur (3) est noté : $\vec{C}_{moteur3 \rightarrow 3} = C_{m3} \cdot \vec{y}_0$
- un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^\circ$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur (M_3) n'est pas alimenté. Ce système d'équilibrage exerce sur l'ensemble (3) un couple de rappel noté : $\vec{C} = C_r \cdot \vec{y}_0$, avec $C_r = -(K_{\text{tors}} \cdot \theta + C_0)$. Le terme C_0 permet d'équilibrer le moment en (A) créé par l'action de pesanteur sur (3) lorsque ($\theta = 0^\circ$).

Quelle stratégie pour trouver C_{m1} ?

La détermination de C_{m1} impose d'écrire le **TMD projeté sur** (O, \vec{x}_0) à « au moins » (1).

En isolant seulement (1), cette équation ne fera pas intervenir les inconnues de liaison avec le bâti (pivot parfaite), mais il faudrait au préalable déterminer le couple transmis par la liaison hélicoïdale sur \vec{x}_0 !

En isolant (1+2), il n'est plus nécessaire de déterminer le moment transmis par l'hélicoïdale (action intérieure), mais cette équation nécessitera de déterminer au préalable le moment transmis par la glissière avec le bâti et le moment transmis par (3) au point A ...

En isolant (1+2+3), il n'y a plus que le moment transmis par la glissière, mais il faudrait calculer trois moments dynamiques : celui de (1), de (2) et de (3) ...

Nous allons donc **isoler seulement (1)** et déterminer au préalable le moment transmis par la liaison hélicoïdale ; pour déterminer ce moment noté L_{12} , nous allons **isoler (2+3) et écrire le TRD** projeté sur (\vec{x}_0) . Cette équation permettra de trouver X_{12} - la composante sur (\vec{x}_0) de cette hélicoïdale - dont nous déduirons L_{12} par l'intermédiaire du pas de la liaison.

Remarque : en écrivant le TRD / (\vec{x}_0) à seulement (2), il aurait fallu déterminer au préalable la résultante sur (\vec{x}_0) de la liaison pivot en A (notée x_{32}).

Isolons (2+3) :

Bilan d'Action Mécanique Extérieure :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \{T(1 \rightarrow 2)\} &= \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{hélicoïdale parfaite, pas à droite} \\ \bullet \quad \{T(0 \rightarrow 2)\} &= \begin{Bmatrix} -f_2 \cdot \dot{x} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)} \quad \text{glissière de coefficient de frottement visqueux } f_2 \\ \bullet \quad \{T(\text{poids} \rightarrow 3)\} &= \begin{Bmatrix} -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ m_3 \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta \cdot \vec{y}_0 \end{Bmatrix}_A \\ \bullet \quad \{T(\text{poids} \rightarrow 2)\} &= \begin{Bmatrix} -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2} \end{aligned}$$

Écrivons le Théorème de la Résultante Dynamique projeté sur (\vec{x}_0) :

$$\sum \vec{F}(\text{ext} \rightarrow 2+3) \cdot \vec{x}_0 = (m_2 \cdot \vec{\Gamma}(G_2, 2/0) + m_3 \cdot \vec{\Gamma}(G_3, 3/0)) \cdot \vec{x}_0$$

Avec $\vec{\Gamma}(G_2, 2/0) = \vec{\Gamma}(A, 2/0) = \ddot{x} \cdot \vec{x}_0$ solide en translation

$\vec{\Gamma}(G_3, 3/0) = \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_3$ d'après un calcul précédent de $\vec{V}(G_3, 3/0)$

Soit $X_{12} - f_2 \cdot \dot{x} = ((m_2 + m_3) \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{z}_3 - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{x}_3) \cdot \vec{x}_0$

$$\boxed{X_{12} = f_2 \cdot \dot{x} + (m_2 + m_3) \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta}$$

Isolons (1) :

Bilan d'Action Mécanique Extérieure :

- $\{T(2 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -X_{12} & -L_{12} \\ -Y_{12} & -M_{12} \\ -Z_{12} & -N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$ hélicoïdale parfaite, pas à droite
- $\{T(0 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & -f_1 \cdot \dot{\varphi} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}_0, \vec{y}_i, \vec{z}_i)}$ pivot de coefficient de frottement visqueux f_1
- $\{T(\text{poids} \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_1}$
- $\{T(M_1 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{m1} \cdot \vec{x}_0 \end{Bmatrix}_{\forall M}$

Écrivons le Théorème du Moment Dynamique projeté sur (O, \vec{x}_0) :

$$\sum \vec{M}(0, ext \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = \vec{\delta}_0(1/0) \cdot \vec{x}_0$$

Avec $\vec{\delta}_0(1/0) \cdot \vec{x}_0 = J_1 \cdot \ddot{\varphi}$ solide en rotation autour d'un axe fixe / R_g

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi} = C_{m1} - f_1 \cdot \dot{\varphi} + \left(\overrightarrow{OG_1} \wedge (-m_1 g \vec{z}_0) \right) \cdot \vec{x}_0 - L_{12}$$

Or la liaison hélicoïdale donne : $v_{1/2} = + \frac{p_a}{2\pi} \cdot \omega_{1/2}$ et $L_{12} = - \frac{p_a}{2\pi} \cdot X_{12}$ Attention au paramétrage : $v_{1/2} = + \frac{p_a}{2\pi} \cdot \omega_{1/2} \Leftrightarrow -\dot{x} = + \frac{p_a}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}$

Soit
$$C_{m1} = - \frac{p_a}{2\pi} X_{12} - f_1 \cdot \frac{2\pi}{p_a} \cdot \dot{x} - J_1 \frac{2\pi}{p_a} \cdot \ddot{x}$$

Finalement nous obtenons :

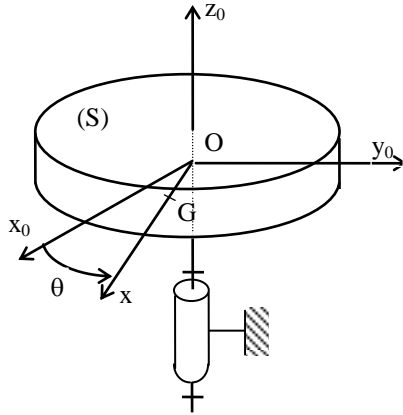
$$C_{m1} = - \frac{p_a}{2\pi} \cdot \left(f_2 \cdot \dot{x} + (m_2 + m_3) \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta \right) - f_1 \cdot \frac{2\pi}{p_a} \cdot \dot{x} - J_1 \frac{2\pi}{p_a} \cdot \ddot{x}$$

Remarque : cette équation différentielle est appelée « équation de mouvement » (cf cours « Énergétique ») car elle détermine les paramètres de mouvement du mécanisme $(x(t), \theta(t))$ en fonction des efforts appliqués (indépendamment des inconnues de liaison).

3 - Équilibrage dynamique:

L'étude est réalisée dans le cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe: roue de voiture, rotor de moteur, montage d'usinage sur un tour... Le mauvais équilibrage crée des vibrations (donc de l'usure), du bruit. Origine de ce phénomène et comment y remédier ?

3.1 - Étude dynamique:



Solide S de masse m , de centre de gravité G.
 R_0 lié au bâti et R lié à S tel que :

$$(\vec{x}_0, \vec{x}) = \theta \text{ et } \vec{OG} = a \vec{x}$$

S en liaison pivot d'axe $O\vec{z}_0$ / bâti S_0

$$\mathcal{I}_O(S) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_R$$

Le solide S est lancé en rotation tel que $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \omega$

Équation du mouvement de S ?

Bilan des actions extérieures à S :

$$\mathcal{J}(\text{pes} \rightarrow S) = G \{ -mg \vec{z}_0 ; \vec{0} \} \text{ et } \mathcal{J}(S_0 \rightarrow S) = O \{ X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} ; L \vec{x} + M \vec{y} \}$$

S étant en liaison pivot d'axe vertical avec le bâti, on applique le théorème du moment dynamique en O en projection sur \vec{z}_0 :

$$\vec{\delta}_O(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = (\vec{OG} \wedge -mg \vec{z}_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_O(S/R_0) \cdot \vec{z}_0] \Rightarrow \vec{\sigma}_O(S/R_0) \cdot \vec{z}_0 = \text{Constante}$$

$$\text{or } \vec{\sigma}_O(S/R) = \mathcal{I}_O(S) \vec{\Omega}(S/R_0) = (-E \vec{x} - D \vec{y} + C \vec{z}) \dot{\theta} \Rightarrow C \dot{\theta} = \text{Constante} = C \cdot \omega$$

Le rotor tourne donc à vitesse constante

Efforts de liaison ?

* théorème de la résultante: $m \vec{\Gamma}(G \in S/R_0) = -mg \vec{z}_0 + X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z}$

$$\text{or } \vec{\Gamma}(G \in S/R_0) = a \ddot{\theta} \vec{y} - a \dot{\theta}^2 \vec{x} = -a\omega^2 \vec{x}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} X = -a\omega^2 \\ Y = 0 \\ Z = mg \end{cases}$$

* théorème du moment dynamique: $\vec{\delta}_O(S/R_0) = \frac{d}{dt} [\vec{\sigma}_O(S/R_0)] = (-E \vec{y} + D \vec{x}) \dot{\theta}^2 = L \vec{x} + M \vec{y} + mga \vec{y}$

$$\text{d'où } \begin{cases} L = D\omega^2 \\ M = -E\omega^2 - mga \end{cases}$$

La liaison pivot supporte donc des efforts dépendant de ω^2 et de θ (en projection sur R_0 , on obtient des termes proportionnels à $\sin\theta$ et $\cos\theta$) qui engendrent des vibrations.

Il faut essayer d'éliminer ces vibrations néfastes au fonctionnement (cf roues de voiture) en "équilibrant" le solide.

3.2 – Conditions d'équilibrage :

Il faut donc rendre les efforts sur le palier indépendants de la position et de la vitesse de rotation du solide

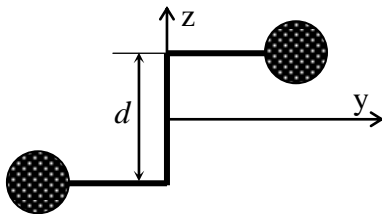
3.2.1 – Équilibrage statique :

on annule a \Rightarrow **G \in axe de rotation.**

3.2.2 – Équilibrage dynamique :

on annule D et E \Rightarrow **l'axe de rotation doit être principal d'inertie.**

Exemple :



Ce solide, en rotation autour de l'axe z , est équilibré statiquement ($G \in$ axe de rotation) mais pas dynamiquement : yz est plan de symétrie donc x est principal d'inertie mais pas z

Ce solide, en rotation autour de (G, \bar{x}) est équilibré statiquement et dynamiquement.

3.3 – Réalisation pratique :

On équilibre un solide par ajout de matière (*masselottes sur les jantes de roues de voiture*) ou enlèvement de matière (*perçage sur vilebrequin*).

Soient S_i deux masselottes de masse m_i fixées en P_i de coordonnées x_i, y_i, z_i dans R .

Posons : $S' = S + S_1 + S_2$

3.3.1 – Équilibrage statique :

$$(m + m_1 + m_2) \overrightarrow{OG'} = m \overrightarrow{OG} + m_1 \overrightarrow{OP_1} + m_2 \overrightarrow{OP_2}$$

$$G' \in \text{axe de rotation} \Rightarrow 0 = m a + m_1 x_1 + m_2 x_2 \quad (1)$$

$$0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 \quad (2)$$

3.3.2 – Équilibrage dynamique :

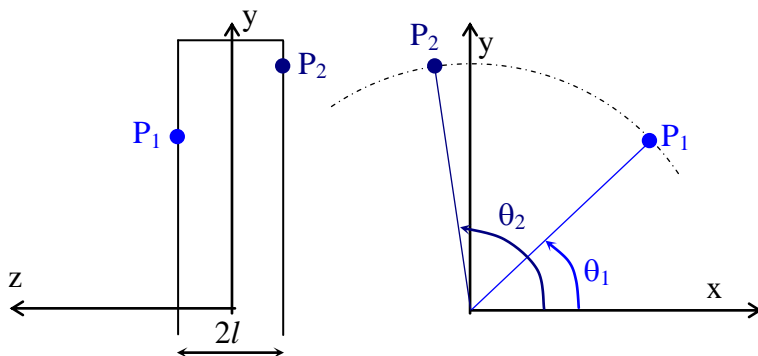
$$\text{Produits d'inertie nuls} \Rightarrow D' = D + m_1 y_1 z_1 + m_2 y_2 z_2 = 0 \quad (3)$$

$$E' = E + m_1 x_1 z_1 + m_2 x_2 z_2 = 0 \quad (4)$$

On obtient 4 équations à 8 inconnues (m_i, x_i, y_i, z_i) donc une infinité de solutions.

Remarque: dans le cas général, une seule masselotte (ou un seul perçage) ne suffit pas
 $m_2 = 0$: $(2) \Rightarrow y_1 = 0$ et $(3) \Rightarrow D = 0$ d'où contradiction

3.3.3 – Roue de véhicule : on fixe deux masselottes sur la jante de chaque côté de la roue de rayon r .



$$m a + m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \quad (1)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 \quad (2)$$

$$D + m_1 y_1 l - m_2 y_2 l = 0 \quad (3')$$

$$E + m_1 x_1 l - m_2 x_2 l = 0 \quad (4')$$

$$(1) + l \times (4') \Rightarrow m_1 x_1 = -\frac{E + m a l}{2l}$$

$$(2) + l \times (3') \Rightarrow m_1 y_1 = -\frac{D}{2l}$$

d'où

$$\tan \theta_1 = \frac{D}{E + m.a.l}$$

et

$$m_1 = -\frac{D}{2.l.r.\sin \theta_1}$$

Dans la pratique, D, E et a sont inconnus : les équilibreuses utilisent des capteurs (placés à 90°) qui mesurent les efforts sur les paliers.