

Exercice 1 : moments d'inertie et matrices d'inertie élémentaires

- Q1 :** Déterminer le moment d'inertie autour de son axe, d'un cylindre de révolution d'axe (O, \vec{z}) , de rayon R , de hauteur h et de masse m .
- Q2 :** Déterminer le moment d'inertie d'une sphère de rayon R , de masse m par rapport à son centre O puis par rapport à un diamètre Δ quelconque.
- Q3 :** Déterminer la matrice d'inertie en G d'un cylindre de rayon R , de hauteur h , de masse m et d'axe (G, z)
- Q4 :** Déterminer la matrice d'inertie en G d'un parallélépipède de masse m et de côtés a, b, c .

Exercice 2 : matrice d'inertie d'un vilebrequin

Le vilebrequin est un dispositif mécanique qui permet, par l'intermédiaire d'une bielle, la transformation du mouvement linéaire rectiligne du piston en un mouvement de rotation continu, et inversement. Présent dans la plupart des moteurs à piston il assure la transmission de l'énergie de combustion du carburant dans les cylindres en énergie mécanique disponible sur l'arbre moteur. C'est l'élément principal du système bielle-manivelle



Figure 1 : ensemble vilebrequin et 4 pistons avec bielle d'un moteur thermique 4 cylindres

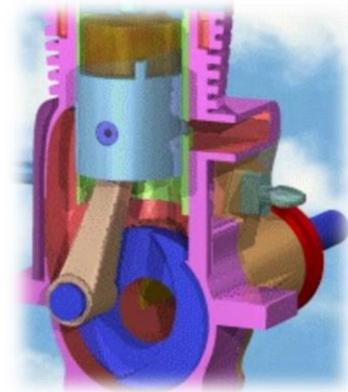
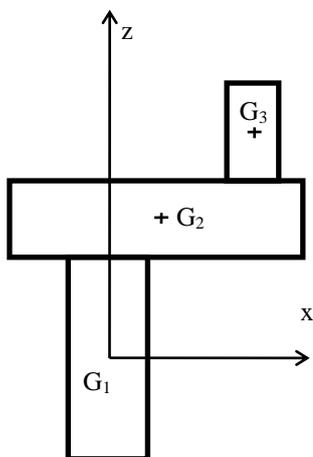


Figure 2 : Système bielle manivelle (vilebrequin) d'un moteur mono cylindre de modélisme



Soit un vilebrequin simplifié constitué de trois cylindres de révolution S_1 , S_2 et S_3 , d'axes parallèles à (G_1, \vec{z}) :

Solide S_i : centre d'inertie G_i , masse m_i , rayon R_i , hauteur h_i

Coordonnées des G_i : $G_1(0, 0, 0)$ $G_2(a_2, 0, c_2)$ $G_3(a_3, 0, c_3)$

- Q1 :** Le vilebrequin ayant un mouvement de rotation autour de l'axe (G_1, \vec{z}) , déterminer le moment d'inertie de ce solide suivant cet axe.
- Q2 :** Déterminer la matrice d'inertie du vilebrequin en G_1

Exercice 3 : inertie du robot de chirurgie mini-invasive (extrait E3a mp 2019)

Moment d'inertie du bras 1.

L'extrait de plan de définition du bras 1, figure 1 ci-dessous, définit la géométrie du bras 1 relativement au repère lié au solide $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$. La figure 2 montre une vue en perspective du bras 1 et situe cette perspective relativement au repère R_1 et à la base galiléenne $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

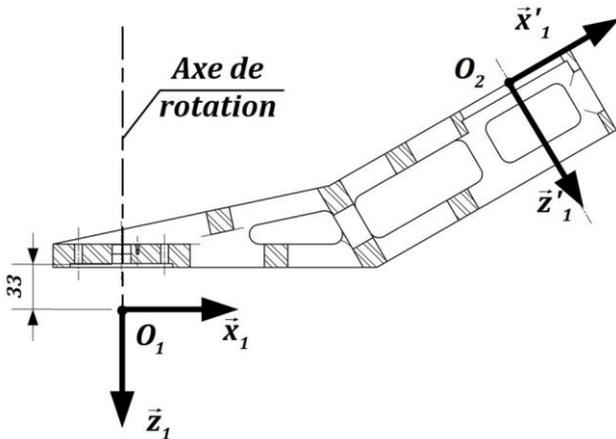


Figure 1 : Extrait du dessin de définition du bras 1

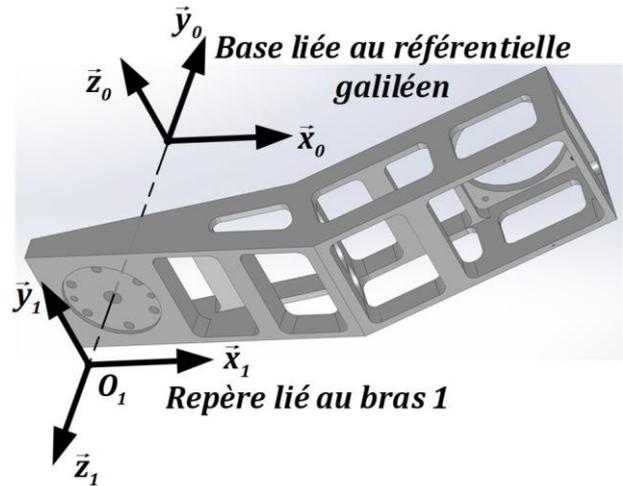


Figure 2 : Vue en perspective du bras 1 (avec $\theta_1 = 0^\circ$)

La matrice d'inertie du bras 1 a été estimée à partir de son modèle numérique, réalisé à l'aide d'un modèleur 3D. Elle a été exprimée dans la base $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et au point O_1 .

$$\bar{I}(O_1, 1) = \begin{pmatrix} 2,7 \cdot 10^{-3} & 0 & 40,0 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 10,4 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 40,0 \cdot 10^{-3} & 0 & 8,4 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}_{B_1} \quad (\text{en } kg \cdot m^2)$$

Q1 : Expliquez pourquoi deux des produits d'inertie de $\bar{I}(O_1, 1)$ du bras 1 sont nuls.

Q2 : Déduire de la matrice $\bar{I}(O_1, 1)$, la valeur numérique du moment d'inertie noté J_1 du solide 1 autour de l'axe de rotation (O_1, \vec{z}_1).

Moment d'inertie du moteur M2.

L'image figure 3 montre un modèle géométrique numérique de l'assemblage du bras 1 et du moteur M2.

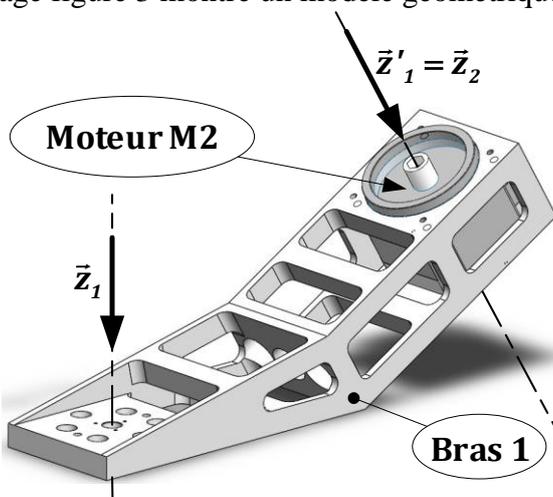


Figure 3 : Vue 3D de l'assemblage du bras 1 et du moteur M2 (image issue d'un modèle numérique réalisé sur modèleur 3D)

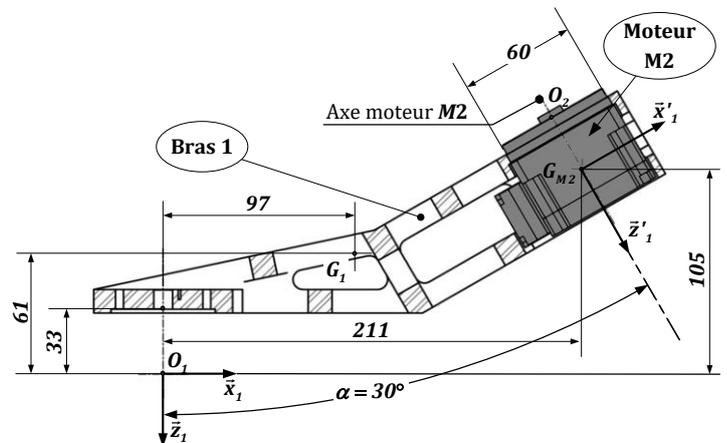


Figure 4 : Dessin de l'assemblage du bras 1 et du moteur M2

On suppose que le moteur M2 est modélisable, du point de vue inertiel, par une masse ponctuelle. La masse de ce moteur est $m_{M2} = 600 \text{ g}$.

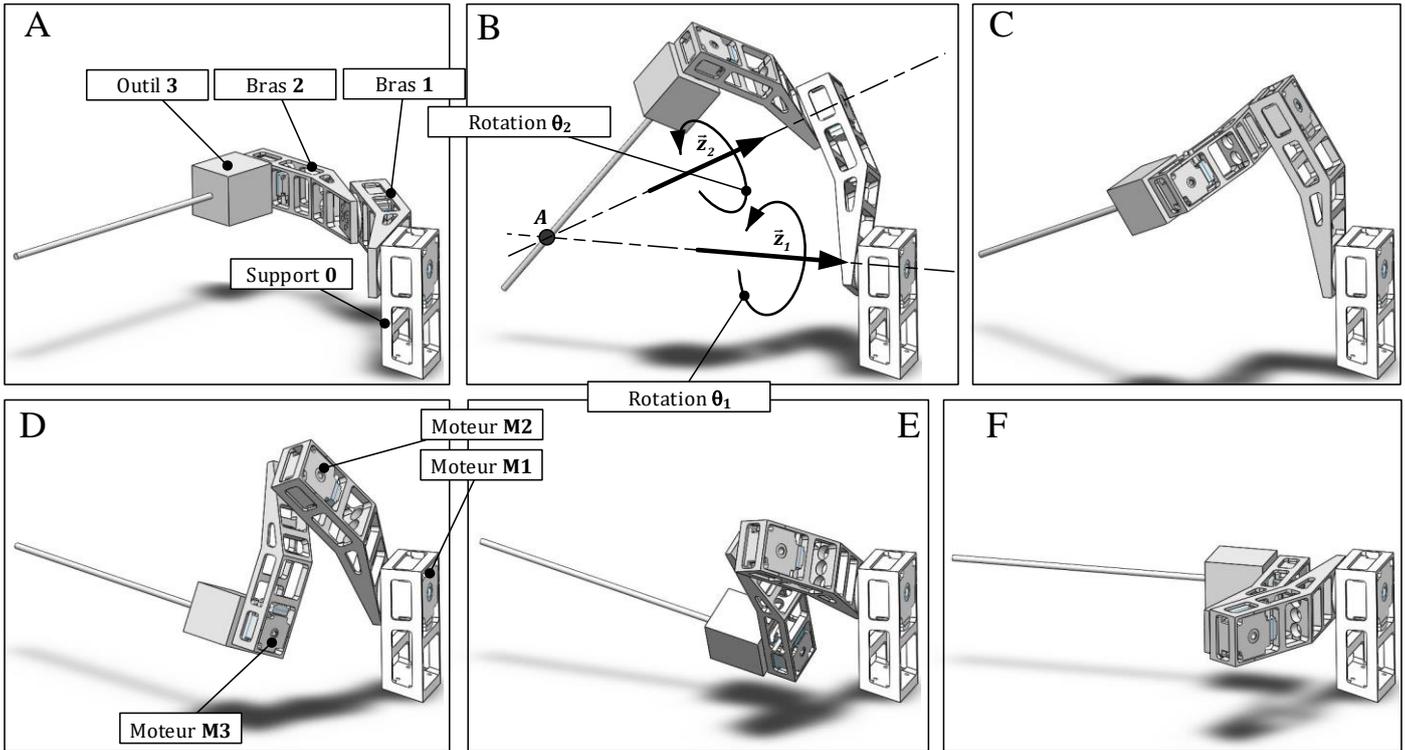
Après implantation dans le bras 1, la position du centre de masse G_{M2} du moteur M2 est donnée par :

$$\vec{O_1 G_{M2}} = x_{1M2} \cdot \vec{x}_1 + z_{1M2} \cdot \vec{z}_1 = 211 \cdot \vec{x}_1 - 105 \cdot \vec{z}_1 \text{ (en mm)}$$

Q3 : Justifier l'hypothèse simplificatrice de masse ponctuelle pour le moteur M2.

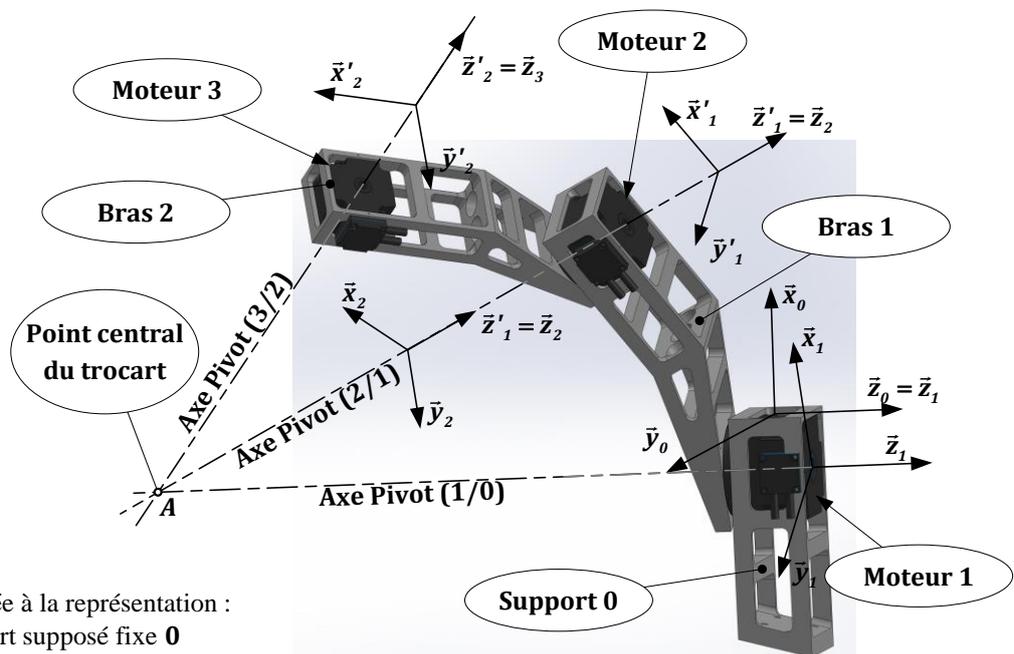
Q4 : Donner l'expression du moment d'inertie noté J_{M2} du moteur M2 autour de l'axe de rotation (O_1, \vec{z}_1) en fonction de la masse m_{M2} et des composantes du vecteur $\vec{O_1 G_{M2}}$ et faire l'application numérique.

Q5 : Dans quelles configurations instantanées (A, B, C, D, E ou F) de la figure ci-dessous l'inertie de l'ensemble du robot autour de l'axe (O_1, \vec{z}_1) est-elle maximale et minimale ? On considèrera les moteurs M2 et M3 arrêtés.



ANNEXE

Vue en perspective du robot et bases associées



La vue en perspective est limitée à la représentation :

- d'un élément du support supposé fixe 0
- du moteur 1 actionnant le bras 1, du bras 1 et de son moteur 2 qui actionne le bras 2
- du bras 2 et de son moteur 3 qui actionne la rotation de l'outil 3, non représenté.

Exercice 4 : calculs d'éléments dynamiques d'une éolienne domestique

Soit $R(O, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un repère lié au support $\mathbf{0}$ d'une éolienne supposé galiléen.

• La girouette $\mathbf{1}$, de moment d'inertie I par rapport à l'axe (O, \bar{z}) , est en liaison pivot d'axe (O, \bar{z}) avec le support $\mathbf{0}$.

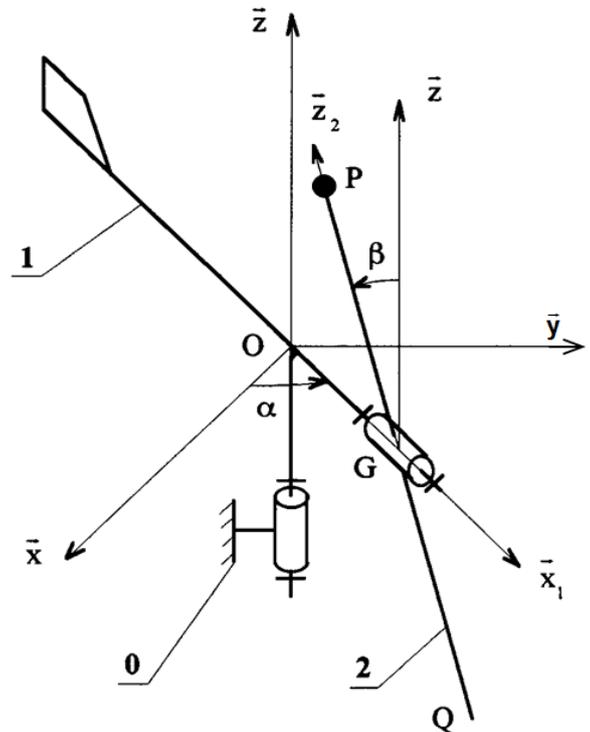
Soit $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z})$ un repère lié à la girouette $\mathbf{1}$. On pose $\alpha(t) = (\bar{x}, \bar{x}_1) = (\bar{y}, \bar{y}_1)$. Le solide $\mathbf{1}$ possède une symétrie par rapport au plan (O, \bar{x}_1, \bar{z}) .

• L'hélice $\mathbf{2}$, de centre d'inertie G , de masse M , est en liaison pivot d'axe (G, \bar{x}_1) avec la girouette $\mathbf{1}$. On donne $\overline{OG} = a \bar{x}_1$.

Soit $R_2(G, \bar{x}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ un repère lié à l'hélice $\mathbf{2}$. On pose $\beta(t) =$

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (\bar{z}, \bar{z}_2) \text{ et } I_G(2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2}.$$

• Un balourd $\mathbf{3}$ fixe par rapport à $\mathbf{2}$, de masse m , modélise un déséquilibre de l'hélice en rotation, représenté par une masse ponctuelle en P . On pose $\overline{GP} = b \bar{z}_2$,



Q1 : Déterminer les torseurs cinématiques de $\mathbf{1}$ en O et de $\mathbf{2+3}$ en P par rapport au repère R .

Q2 : Donner la forme de la matrice d'inertie de la girouette $\mathbf{1}$ en O dans la base du repère R_1 puis déterminer la projection sur l'axe \bar{z} du moment cinétique en O de la girouette $\mathbf{1}$ dans son mouvement par rapport au repère R .

Q3 : Déterminer les torseurs cinétiques en O de l'hélice $\mathbf{2}$ et du balourd $\mathbf{3}$ dans leur mouvement par rapport au repère R .

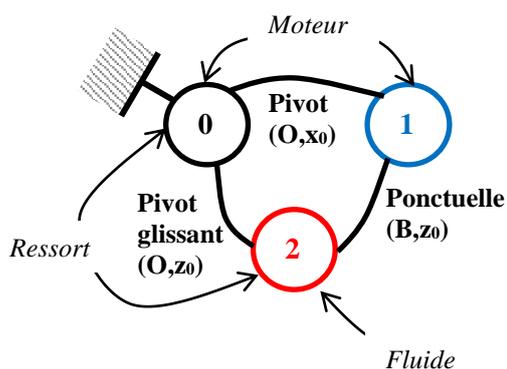
Q4 : Déterminer la projection sur l'axe \bar{z} du moment dynamique en O de la girouette $\mathbf{1}$ dans son mouvement par rapport au repère R .

Q5 : Déterminer la projection sur l'axe \bar{z} du moment dynamique en O de l'hélice $\mathbf{2}$ dans son mouvement par rapport au repère R .

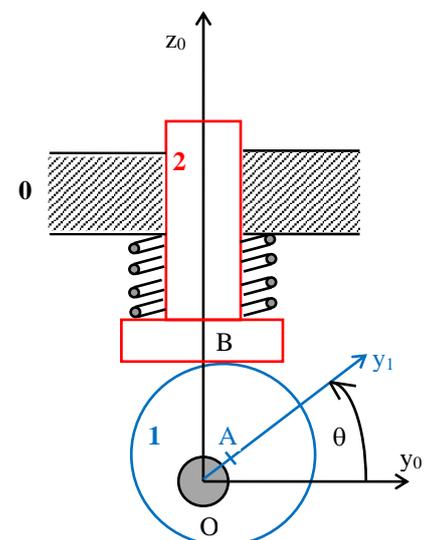
Q6 : Déterminer la projection sur l'axe \bar{x}_1 du moment dynamique en O du balourd $\mathbf{3}$ dans son mouvement par rapport au repère R .

Exercice 5 : équation de mouvement simple par PFD

Le mécanisme de pompe ci-contre est composé d'un excentrique $\mathbf{1}$ ($OA = e$ et rayon R), animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (O, \bar{x}_0) horizontal et d'un piston $\mathbf{2}$ en liaison pivot glissant d'axe vertical avec le bâti $\mathbf{0}$. Le piston $\mathbf{2}$ est maintenu en contact ponctuel en B avec l'arbre $\mathbf{1}$ par un ressort.



Croquis et Graphe des actions mécaniques :



Paramétrage et hypothèses :

- Les liaisons sont supposées sans frottement.
- L'action de la pesanteur est négligée.
- Soient I le moment d'inertie de **1** par rapport à (O, \vec{x}_0) et m la masse de **2**.
- Le ressort de raideur k est toujours comprimé (maintien du contact en B).
- Pour $\theta = 0$, l'effort de compression est F_0 .
- Le moteur exerce un couple $C(t)$ sur l'arbre **1** et le fluide exerce sur le piston un glisseur d'axe (O, \vec{z}_0) dont la résultante est connue $F(t)$.

Q1 : Préciser les formes et expressions des torseurs d'action mécanique s'exerçant sur **1** et sur **2**.

Q2 : Par application du PFD, déterminer l'équation du mouvement. Elle ne devra pas comporter d'inconnue de liaison.

Exercice 6 : équations de Mouvement complexes de la station de mesures topo (extrait Centrale mp 2017)

I. Présentation

La mesure topographique permet de réaliser la cartographie tridimensionnelle d'un terrain par mesure de l'altitude de points précis. Les mesures topographiques peuvent être réalisées au moyen de trois systèmes optiques :

- le théodolite, qui permet de réaliser des pointages visuels sur une mire, règle comportant des graduations régulière positionnées verticalement par un opérateur au niveau du point à mesurer ;
- le tachéomètre, qui est identique dans son fonctionnement au théodolite mais mesure la distance via le renvoi d'un faisceau laser par un prisme optique ;
- la station totale, qui est un tachéomètre doté d'un système de communication et d'acquisition des mesures sans fil, ce qui permet la réalisation de mesures en continu.

Dans une station totale, les deux axes d'azimut et d'élévation, motorisés et asservis en position angulaire, poursuivent en continu le prisme rétro-réfléchissant déplacé par l'opérateur : dès que ce dernier s'immobilise au point (P) qu'il a choisi pour effectuer une mesure, le système de visée recale le faisceau au centre du prisme (cette opération dure moins d'une seconde) et informe l'opérateur qui peut alors déclencher la mesure à distance. La station totale Leica tcra 1103 est principalement composée de trois ensembles rigides en mouvements relatifs : le bâti **0**, la fourche d'azimut **1** et le bloc optique **2** (Figures 1 et 2).

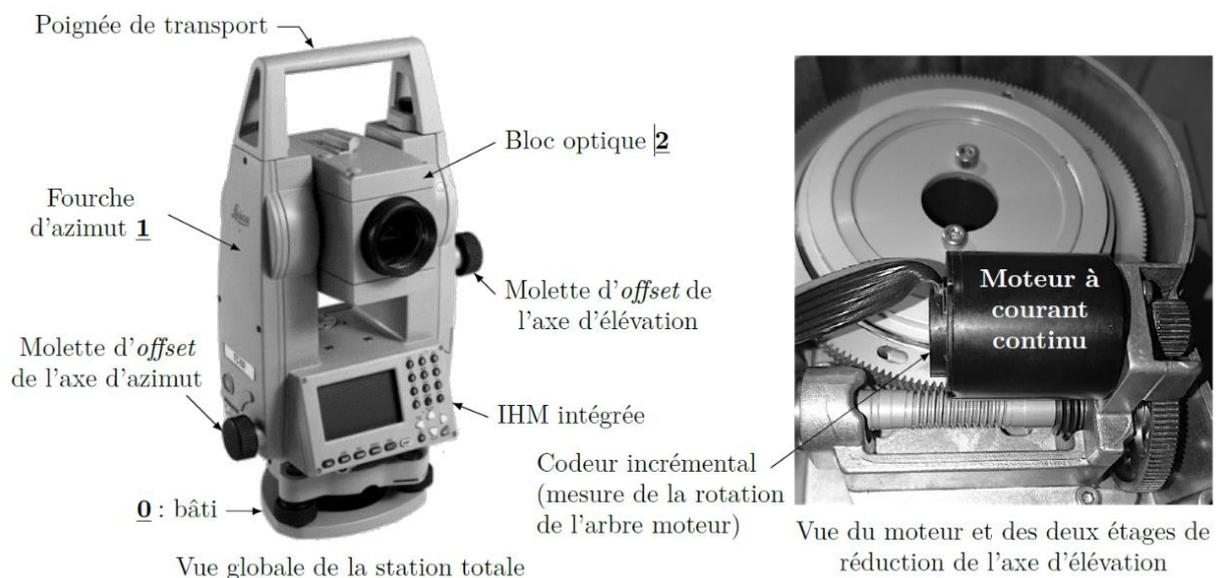


Figure 1 : photographies de la station totale Leica tcra 1103

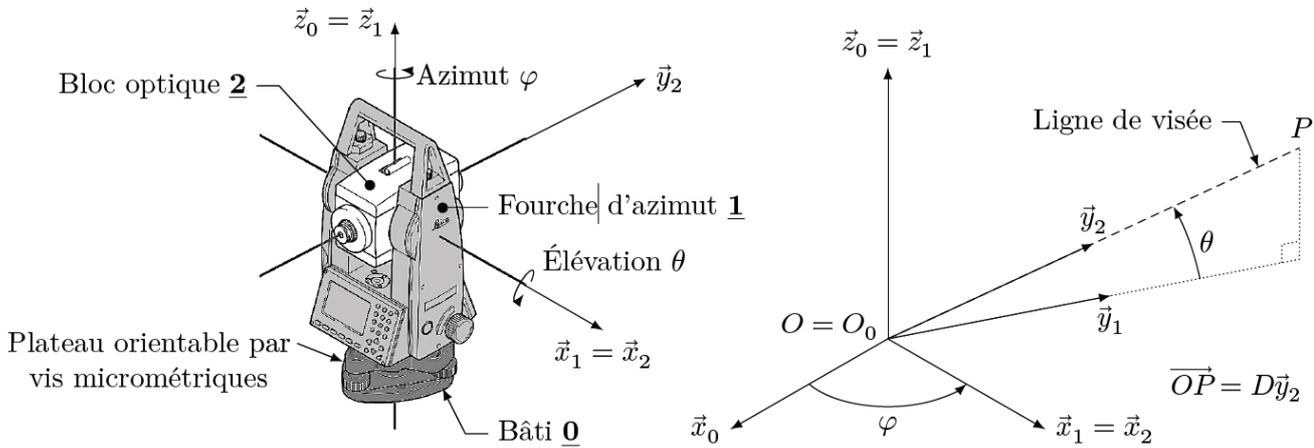


Figure 2 : Éléments de l'appareil de mesure topographique et grandeurs déterminées

II. Etude partielle de l'exigence : « la motorisation doit assurer un suivi du prisme optique rétro-réfléchissant »

Objectif : Développer un modèle de simulation afin de mettre en œuvre une synthèse des lois de commande permettant de réaliser des mesures en continu avec une précision conforme aux attentes des géomètres.

Le modèle choisi pour l'étude dynamique est fourni figure 3. Dans ce modèle, la fourche d'azimut 1 ainsi que le bloc optique 2 sont en mouvements relatifs par rapport au bâti 0, supposé fixe par rapport à la terre. Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au bâti 0 est galiléen. L'accélération de la pesanteur \vec{g} est selon la verticale terrestre locale (Figure 4).

On note : $\theta(t)$ l'angle d'élévation tel que $\theta(t) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ et $\varphi(t)$ l'angle d'azimut tel que $\varphi(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$

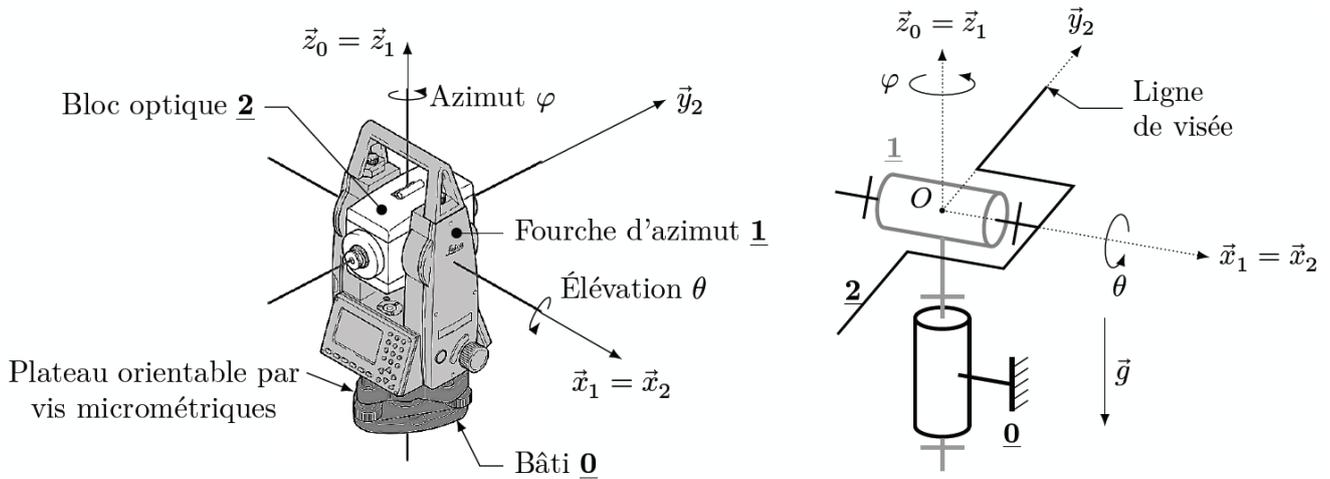


Figure 3 : Modèle géométrique de la partie mécanique de la station totale

Grandeurs	Fourche d'azimut 1	Bloc optique 2
Repère associé $R_i(O; \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$R_1(O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$	$R_2(O; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
Masse M_i	M_1	M_2
Centre d'inertie G_i	$G_1 \equiv O$	$G_2 \equiv O$
Matrice d'inertie $\mathbf{I}(O, i)$ exprimée dans la base $b_i(\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$	$\begin{bmatrix} J_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z1} \end{bmatrix}_{b_1}$	$\begin{bmatrix} J_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z2} \end{bmatrix}_{b_2}$

Figure 4 : Données géométriques et cinétiques associés aux deux pièces mobiles

Les deux axes asservis en azimut (angle φ) et en élévation (angle θ) comportent chacun un réducteur de vitesse à deux étages et à rattrapage de jeu (voir photo de droite figure 1) : un engrenage à dentures droites de rapport ρ_{1a} (respectivement ρ_{2a}) suivi d'un engrenage à roue et vis sans fin de rapport ρ_{1b} (respectivement ρ_{2b}).

Les pertes en effort (dus aux frottements) au niveau des axes des liaisons pivots sont modélisées par des facteurs de perte k_1 et k_2 (grandeur sans unité, estimées par mesure), supposés constants dans toutes les configurations.

Grandeurs	Liaison $L_{1/0}$	Liaison $L_{2/1}$
Modèle de liaison choisi	Pivot d'axe (O, \vec{z}_0)	Pivot d'axe (O, \vec{x}_1)
Paramètre angulaire	Angle d'azimut φ	Angle d'élévation θ
Rapports des réducteurs de la liaison motorisée : – étage a : réducteur à denture droite – étage b : réducteur à roue et vis sans fin	$\frac{\omega_{1/0}}{\omega_{m1}} = \rho_{1a} \rho_{1b} = \rho_1$ $\rho_{1a} = -\frac{2}{7}$ et $\rho_{1b} = -\frac{1}{210}$	$\frac{\omega_{2/1}}{\omega_{m2}} = \rho_{2a} \rho_{2b} = \rho_2$ $\rho_{2a} = -\frac{2}{7}$ et $\rho_{2b} = -\frac{1}{184}$
Facteur de perte k_i (sans unité)	$k_1 \approx 0,74$	$k_2 \approx 0,82$
Couple moteur équivalent de la machine à courant continu au niveau de l'axe de la liaison $L_{j/i}$ (N·m)	$\frac{k_1}{\rho_1} c_{m1}$	$\frac{k_2}{\rho_2} c_{m2}$
Moment résistant équivalent au niveau de l'axe de la liaison $L_{j/i}$, dû au frottement sec (N·m)	$\frac{k_1}{\rho_1} c_{r1}$	$\frac{k_2}{\rho_2} c_{r2}$
Moment de frottement visqueux équivalent au niveau de l'axe de la liaison $L_{j/i}$ (N·m)	$-\frac{k_1}{\rho_1} f_{Eq1} \dot{\varphi}$	$-\frac{k_2}{\rho_2} f_{Eq2} \dot{\theta}$

Figure 5 : Données et paramètres associés aux deux axes motorisés

II.1. Modélisation du comportement dynamique

- Q1.** Tracer les figures de changement de base associées aux angles d'azimut φ et d'élévation θ et déterminer les expressions des coordonnées x , y et z de la cible P dans le repère de référence $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction des angles φ et θ et de la distance D entre l'iso-centre O de l'appareil et la cible P .
- Q2.** Construire le graphe des liaisons du modèle proposé et y ajouter les différentes actions mécaniques mises en évidence dans la présentation du modèle.
- Q3.** Proposer, en la justifiant, une démarche de résolution permettant d'exprimer, à l'aide de deux équations différentielles en φ et θ , les équations de mouvement des solides 1 et 2 par rapport au bâti 0 : il est attendu l'indication de l'ensemble isolé, du théorème utilisé en se limitant strictement au PFD (résultante ou moment avec indication du point d'écriture) et de la direction de projection. Reproduire le tableau figure 6 sur votre copie pour répondre à cette question.

	Ensemble isolé	Équation scalaire	Justification
(E1)			
(E2)			

Figure 6 : Stratégie d'isolement et de choix d'équation pour l'étude dynamique

Q4. Mettre en œuvre la démarche explicitée Q3 et montrer que les équations de mouvement s'écrivent

$$C_{m1} + C_{r1} = A_1 \ddot{\phi} + B_1 \dot{\phi} + \frac{d}{dt} ((C_{11} \sin^2 \theta + C_{12} \cos^2 \theta) \dot{\phi})$$

$$C_{m2} + C_{r2} = A_2 \ddot{\theta} + B_2 \dot{\theta} + C_2 \sin(2\theta) \dot{\phi}^2$$

où les coefficients constants A_1 , B_1 , C_{11} , C_{12} , A_2 , B_2 et C_2 sont à exprimer en fonction de tout ou partie des données de la Figure 4 et de la Figure 5.

II.2. Identification des éléments cinétiques équivalents

La complexité des formes des pièces et de la structure géométrique ainsi que la présence de nombreux guidages impliquent une grande difficulté de détermination de l'inertie, du frottement visqueux et du couple résistant équivalents rapportés à l'axe moteur à partir du seul modèle de connaissance. Il est donc nécessaire de procéder à une identification comportementale en charge des deux axes afin d'évaluer ces grandeurs.

Pour simplifier l'étude, l'identification des paramètres du modèle décrivant la dynamique des deux chaînes va s'effectuer de façon découplée : les moteurs sont donc alimentés alternativement et on suppose par ailleurs que le bloc optique est positionné horizontalement, soit $\theta = 0$, pour l'étude de l'axe d'azimut seul.

Q5. Dans le cadre de ces configurations découplées, simplifier les équations de la question 4 et les écrire sous la forme :

$$C_{m1} + C_{r1} - B_1 \rho_1 \omega_{m1} = J_{eq1} \dot{\omega}_{m1}$$

$$C_{m2} + C_{r2} - B_2 \rho_2 \omega_{m2} = J_{eq2} \dot{\omega}_{m2}$$

Donner les expressions des inerties équivalentes ramenées aux axes moteur J_{eq1} et J_{eq2} en fonction de ρ_1 , ρ_2 , k_1 , k_2 , J_{z1} , J_{z2} et J_{x2} .

Le comportement d'une machine à courant continu utilisée en moteur est décrit par les équations de la figure 7.

Théorème d'obtention de l'équation	Équation différentielle
Loi des mailles appliquée au modèle électrique équivalent	$u_{mi}(t) = R i_i(t) + L \frac{di_i(t)}{dt} + e_i(t)$
Théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble mécanique entraîné par la machine à courant continu	$J_{Eqi} \frac{d\omega_{mi}(t)}{dt} = c_{mi}(t) + c_{ri}(t) - f_{Eqi} \omega_{mi}(t)$
Équations de couplage électro-mécanique dans l'induit de la machine à courant continu	$c_{mi}(t) = K_T i_i(t)$ et $e_i(t) = K_E \omega_{mi}(t)$ avec $K_T = K_E = K$

Figure 7 : Équations de modélisation du comportement d'une machine à courant continu

Pour chacun des axes (axe d'azimut, indice 1, et axe d'élévation, indice 2) :

- J_{Eqi} (en $\text{kg} \cdot \text{m}^2$) et f_{Eqi} (en $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$) sont respectivement l'inertie et le coefficient de frottement visqueux équivalents rapportés à l'axe de rotation de la machine à courant continu de l'axe i ;
- $u_{mi}(t)$ (en V), $i_i(t)$ (en A) et $e_i(t)$ (en V) sont respectivement la tension d'alimentation, l'intensité dans l'induit et la force contre-électromotrice de la machine à courant continu de l'axe i ;
- $\omega_{mi}(t)$ (en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) est la vitesse de rotation de la machine à courant continu de l'axe i .

Dans toute la suite du problème, les conditions initiales de Heaviside sont supposées être vérifiées.

Q6. Compléter la partie correspondant au schéma-bloc ci-dessous associé à la machine à courant continu de l'axe d'azimut dont le fonctionnement est décrit par les équations données figure 7. Compléter également le dernier bloc vide de ce schéma d'asservissement.

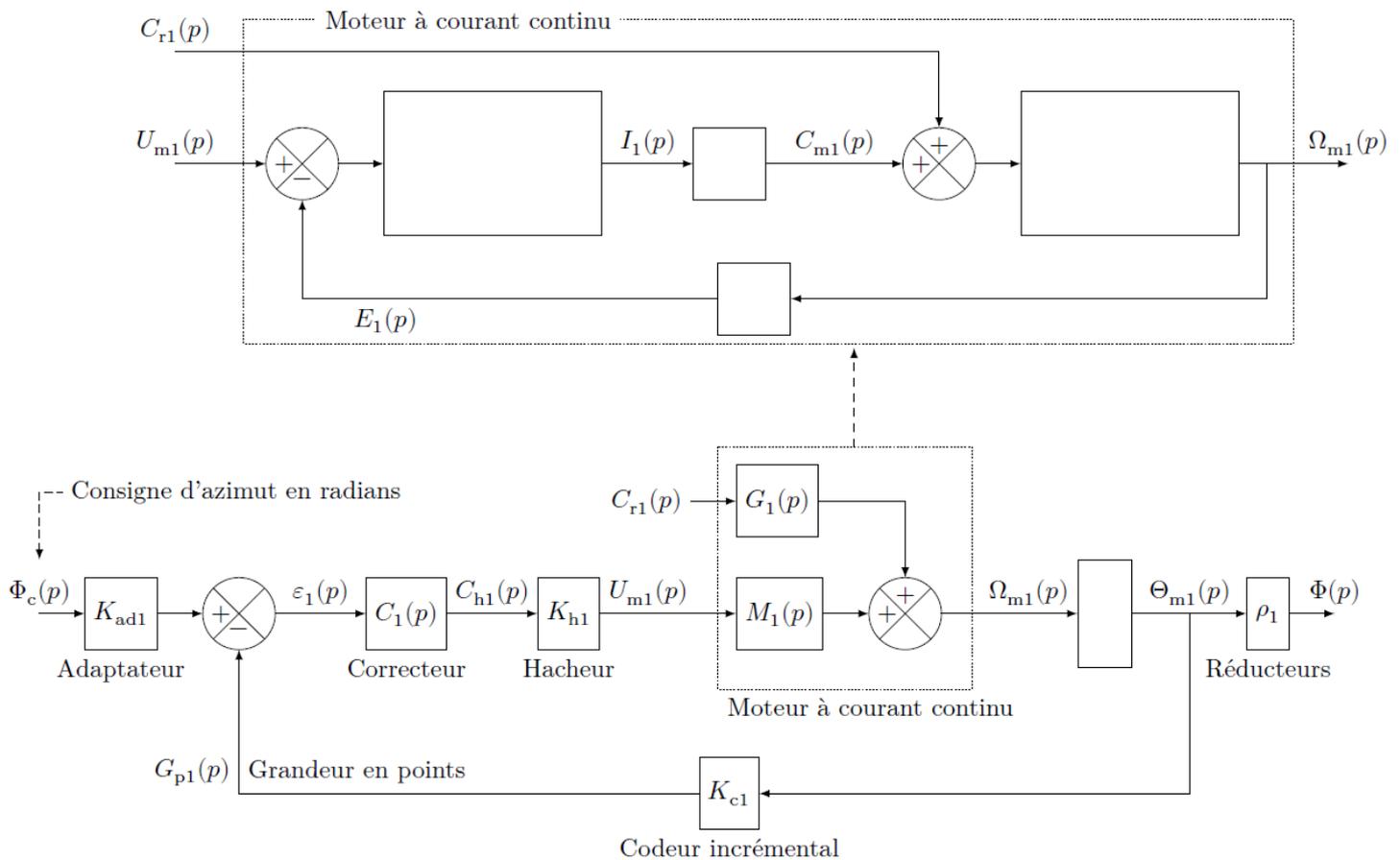


Figure 8 : Schéma-bloc de l'asservissement de l'axe d'azimut (angle φ)

Exercice 7 : roulement sans glissement et équation de mouvement (extrait Ccp mp 2015)

1. Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose.

L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie.

L'objet de cette étude, le STA Compact (figure 1), est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase. La figure 2 précise les fonctions du STA Compact.



Figure 1 : STA compact

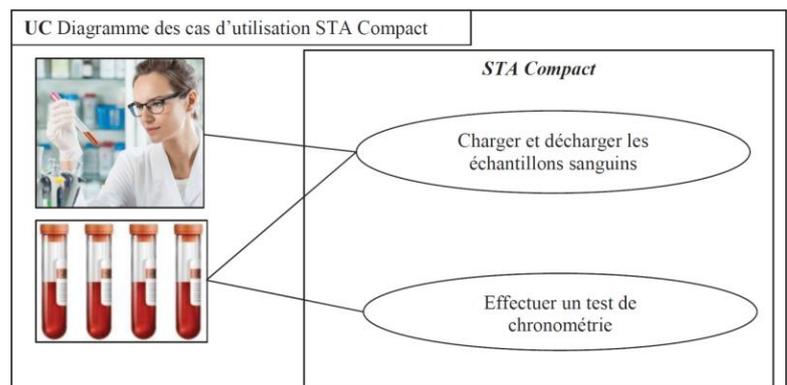


Figure 2 : Cas d'utilisation du STA Compact

Le STA Compact permet de réaliser, entre autres, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation. Le principe du test de chronométrie est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille
- l'ensemble est chauffé alors qu'une bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique
- on mesure l'amplitude de l'oscillation qui diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

Lorsque le mélange est réalisé dans la cuvette, celle-ci est placée dans la zone de mesure. Deux bobines motrices provoquent l'oscillation de la bille. Deux autres bobines, l'une émettrice et l'autre réceptrice, effectuent la mesure des amplitudes d'oscillation. Le test terminé, la cuvette est placée dans un tiroir à déchets.

Le système est connecté à un poste informatique permettant les échanges d'ordres et de comptes rendus avec le manipulateur.

ANALYSE DE L'EXIGENCE « METTRE LA BILLE EN OSCILLATION »

2. Mise en situation

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (figure 3). La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoïdal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie.

Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

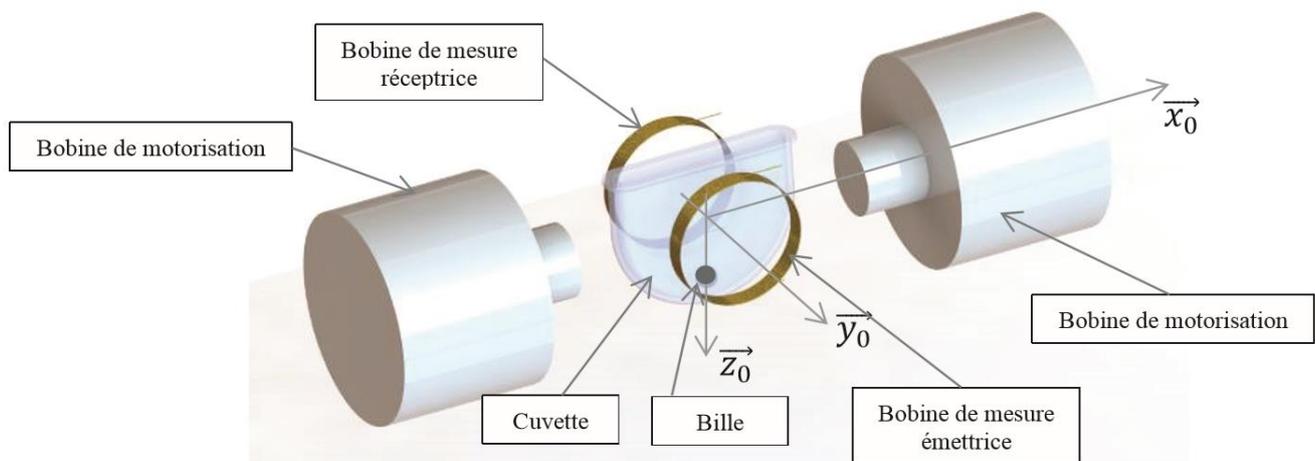


Figure 3 : Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

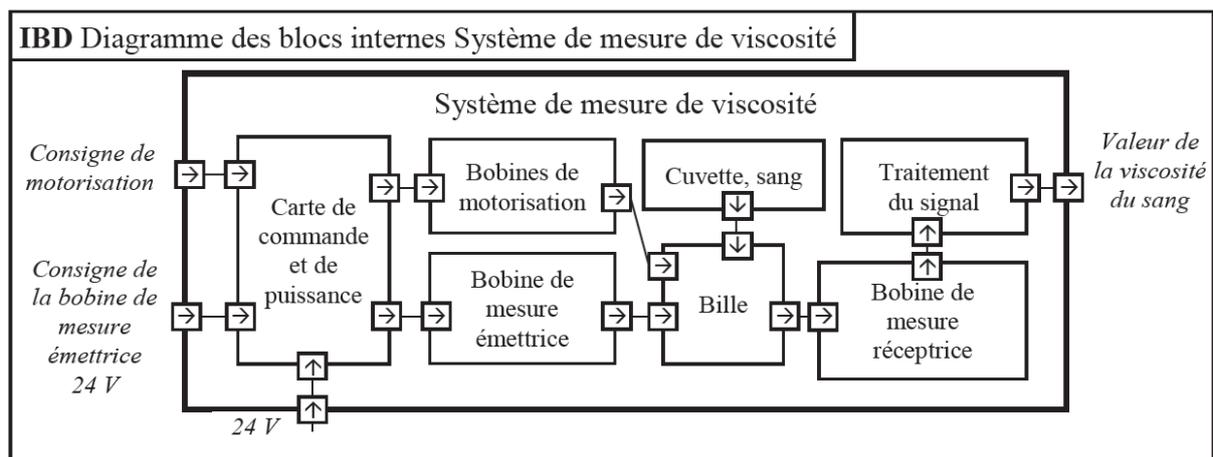


Figure 4 : Diagramme de bloc interne du système de mesure

On se propose de modéliser le comportement de la bille pour en déduire le réglage de la commande des bobines motrices.

3. Hypothèses de modélisation : voir schéma figure 5

- la bille de masse m , de centre de masse G , de rayon r , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon R dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.
- I est le point de contact entre la bille et le rail circulaire ;
- la position de la bille sur le rail est repérée par : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

On note :

- $\{T_{rail \rightarrow bille}\} = \left\{ \begin{array}{c} -N_I \vec{z}_1 + T_I \vec{x}_1 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_I$, le torseur associé à l'action mécanique du rail sur la bille :
- f le coefficient d'adhérence au contact bille/cuvette : $f = 0,1$
- $\{T_{bob \rightarrow bille}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{bob \rightarrow bille} = F(t) \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$, le torseur associé à l'effort résultant des deux bobines de motorisation sur la bille, avec $F(t) = F_0 \sin(\omega_{bob} t)$.
- $\{T_{fluide \rightarrow bille}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{fluide \rightarrow bille} = -f_v \vec{V}_{G \in bille/0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$, le torseur associé à l'action du fluide sur la bille induite par la viscosité. On se place dans l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement laminaire pour lequel le modèle de Stokes est applicable : le coefficient de frottement visqueux vaut alors $f_v = 6\pi \cdot r \cdot \eta$ où η est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation
- $\{T_{pes \rightarrow bille}\} = \left\{ \begin{array}{c} m \cdot g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$, le torseur associé à l'action de la pesanteur sur la bille
- $\{V_{bille/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{bille/0} = \omega_b \vec{y}_0 \\ \vec{V}_{G \in bille/0} = v \vec{x}_1 \end{array} \right\}_G$ le torseur cinématique de la bille par rapport au rail 0
- $R = \|\vec{OI}\|$, le rayon du rail et $r = \|\vec{GI}\| = 2.5 \text{ mm}$, le rayon de la bille.
- $J = \frac{2}{5} m \cdot r^2$, le moment d'inertie de la bille autour de l'axe (G, \vec{y}_0)

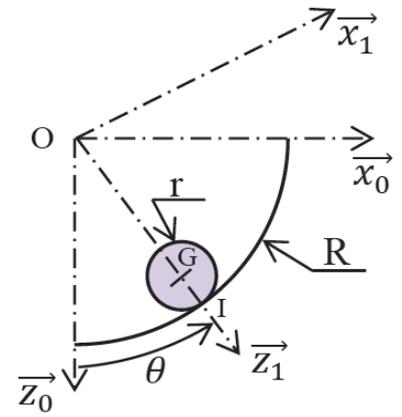


Figure 5 : Bille en contact avec le rail de la cuvette

On notera (p) la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ où p représente la variable de Laplace.

La condition de roulement sans glissement en I donne les expressions cinématiques suivantes :

$$v = (R - r)\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \omega_b = \frac{r-R}{r}\dot{\theta}$$

Question : En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés :

- Montrer que les efforts, normal N_I et tangentiel T_I du rail sur la bille, sont liés à l'angle θ par les équations suivantes :

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R - r)\dot{\theta}^2 \quad T_I = \frac{2}{5} m(r - R)\ddot{\theta}$$

- Justifier l'équation du mouvement de la bille :

$$\frac{7}{5} m(R - r)\ddot{\theta} + f_v(R - r)\dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$$

Exercice 8 : Calculs d'énergie cinétique.

Q1 : Reprendre l'exercice 4 et déterminer l'énergie cinétique de l'éolienne $E = \{1, 2, 3\}$ dans son mouvement par rapport au repère R .

Q2 : Reprendre l'exercice 5 et déterminer l'énergie cinétique de 1+2 dans son mouvement par rapport à R_0 .

Exercice 9: Inertie équivalente de l'axe en translation du robot chirurgical MC²E (extrait Mines mp 2016)

L'objet de cette étude est un robot appelé MC²E utilisé en chirurgie endoscopique (photo 1). Ce type de robots médico-chirurgicaux est équipé de capteurs (caméra, capteur d'efforts...) permettant de maîtriser les interactions avec des environnements souvent déformables et difficilement modélisables comme le corps humain.

Le MC²E présente la particularité d'avoir quatre degrés de liberté : trois degrés de liberté en rotation (structure motorisée asservie en angle et en couple) et un degré de liberté en translation (structure motorisée asservie avec transformation de mouvement).

On donne en une description simple du robot.

La particularité de cette cinématique est qu'elle laisse fixe le point de concours des axes de rotation qui correspond au point d'incision. Ce point fixe est le point où se situe le trocart, élément qui sert d'interface entre l'abdomen du patient et l'instrument chirurgical du robot.



Photo : Opération sur un mannequin

Description simple du MC²E et de son axe en translation

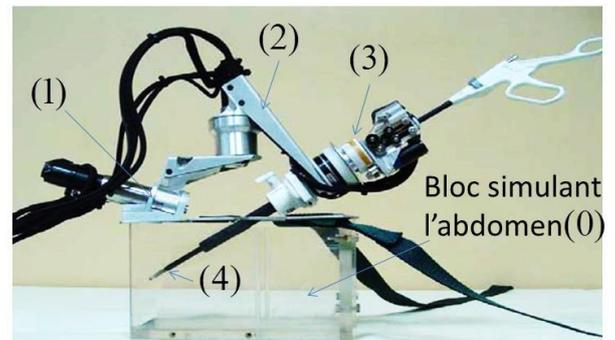
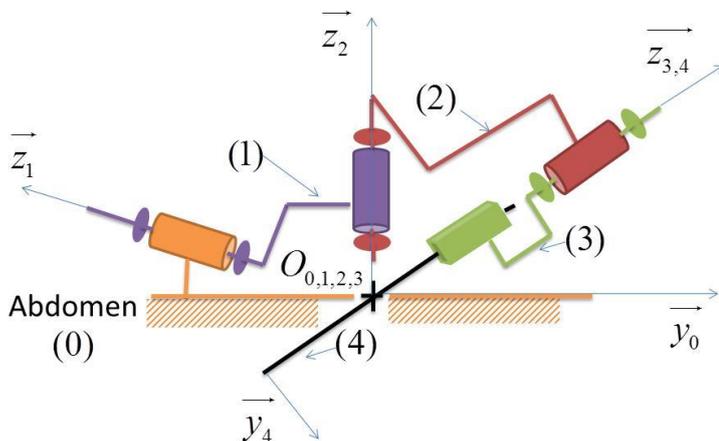
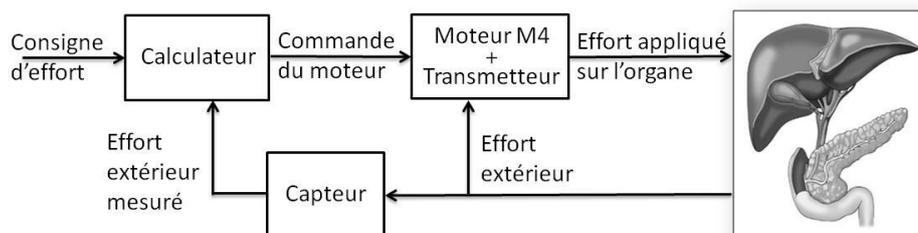


Schéma cinématique du MC²E

Etude dynamique partielle de l'axe en translation

On ne cherche ici qu'à exprimer l'inertie équivalente ramenée à l'axe du moteur (M4) assurant la translation de l'outil chirurgical. Cela permettra d'établir un modèle permettant la maîtrise de l'effort de l'outil (4) sur l'organe pendant une opération.

Le schéma-blocs fonctionnel retenu pour la structure d'asservissement est donné ci-dessous :



Modèle de commande en effort

Les schémas et représentations nécessaires à la compréhension du mécanisme de transformation de mouvement sont donnés ci-dessous.

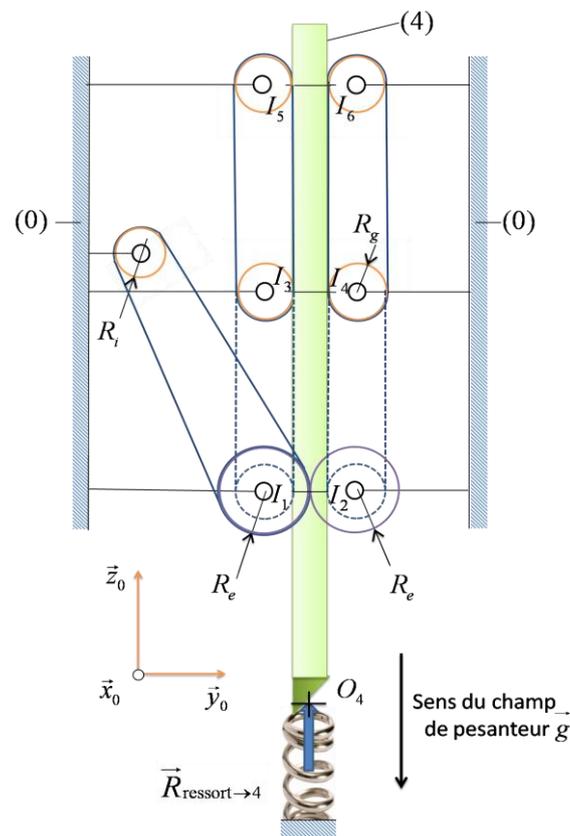
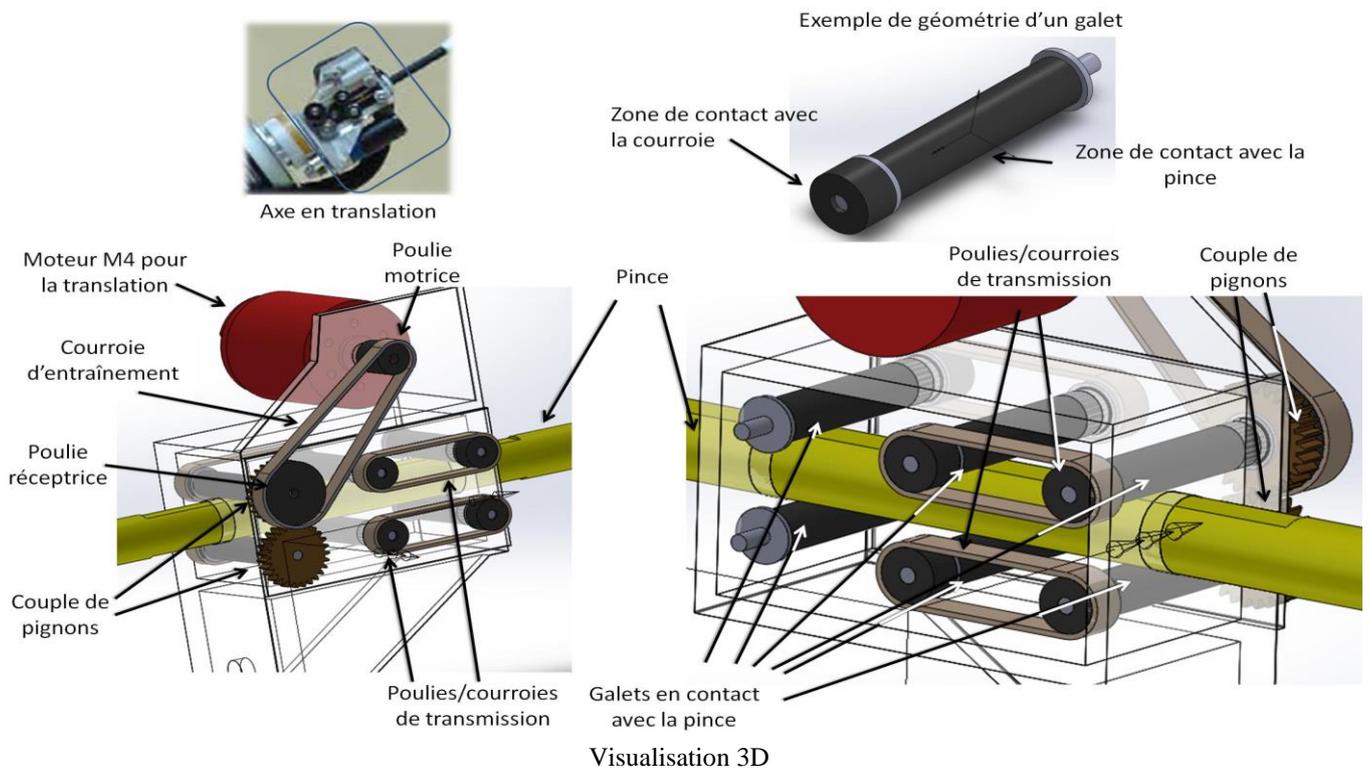


Schéma cinématique sur le banc de test de mise au point du prototype (le ressort remplace l'organe)

Hypothèses :

- le repère associé au bâti (0) est supposé galiléen ;
- L'instrument chirurgical est vertical ;
- Toutes les courroies sont inextensibles, il n'y a pas de glissement entre les galets et les courroies ;
- Tous les galets G_i ont même rayon noté R_g et roulent sans glisser sur la pince (4) au niveau des points I_1 à I_6 ;
- La poulie réceptrice est liée à un pignon. Ce pignon entraîne un deuxième pignon de même rayon primitif pour assurer la transmission de puissance. Il n'y a pas de glissement en leur point de contact.

Remarque : Dans la suite, toutes les vitesses sont définies par rapport au bâti (0).

Modélisation simplifiée du problème :

- La vitesse de rotation du rotor moteur M4 par rapport à son stator fixe (lié au bâti (0)) est notée $\omega_m \cdot \vec{x}_0$ où $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$ (vitesse de rotation avant réducteur) ;
- La poulie motrice a un rayon R_i et tourne à la vitesse $\omega_i(t)$ (vitesse de rotation après réduction) ;
- La poulie réceptrice a un rayon R_e et tourne à la vitesse $\omega_e(t)$;
- Les deux pignons en contact ont même rayon primitif, supposé égal à R_e ;
- On note $\vec{V}(O_4, 4/0) = v(t) \cdot \vec{z}_0 = \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0$;
- Les masses des courroies sont négligées.

Données :

- I_m , moment d'inertie de l'arbre moteur par rapport à son axe de rotation ;
- I_r , moment d'inertie du réducteur par rapport à son axe de rotation de sortie ;
- I_i , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_i , par rapport à son axe de rotation ;
- I_e , moment d'inertie de la poulie, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation ;
- I_p , moment d'inertie de chaque pignon, de rayon R_e , par rapport à son axe de rotation ;
- I_g , moment d'inertie de chaque galet G_i , de rayon R_g , par rapport à son axe de rotation ;
- m_4 , masse de la pince (4) ;
- $r = \frac{\omega_i}{\omega_m}$, rapport de réduction constant du motoréducteur.

Q1 : Déterminer la relation entre $v(t)$ et $\omega_m(t)$. Sous hypothèse de conditions initiales nulles, en déduire la relation qui existe entre $z(t)$ et $\theta_m(t)$.

Q2 : Donner l'expression de l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport à (0). Définir l'inertie équivalente J ramenée sur l'axe du moteur M4 en fonction, notamment, des moments d'inertie, de m_4 et des données géométriques.

Exercice 10: inertie équivalente du bras robot maxpid

Le schéma cinématique du bras robot maxpid est donnée figure ci-dessous. Il s'agit d'un asservissement angulaire obtenu par transformation de la rotation du moteur (rotor = vis 2) en une translation de l'écrou (3). Cette translation génère une rotation du bras (4) autour de l'axe (B, \vec{z}_0) .



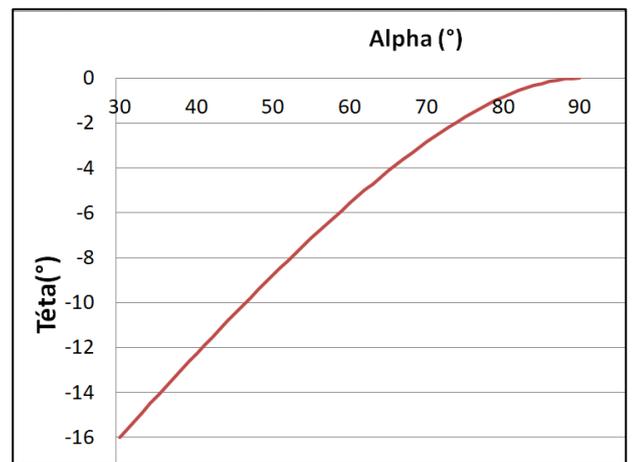
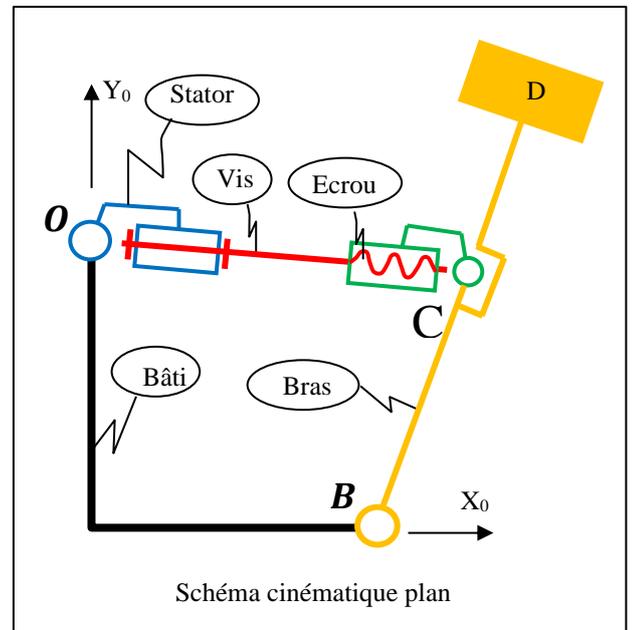
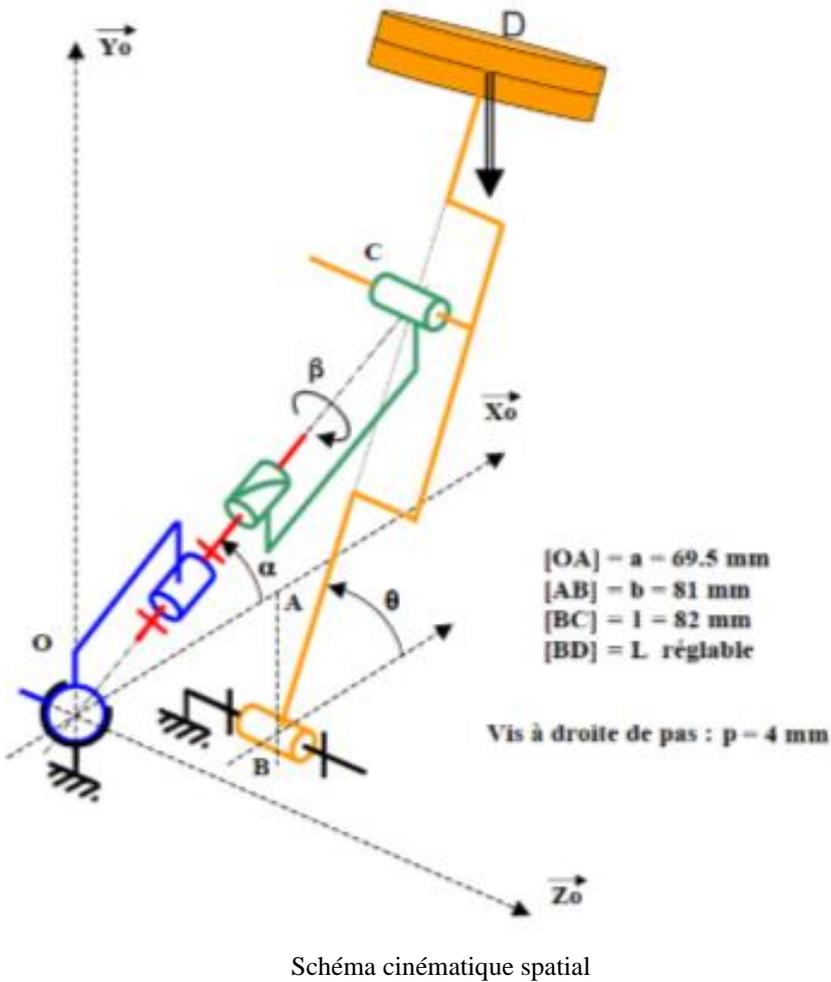
Q1 : Montrer, en précisant les hypothèses faites, que l'inertie équivalente J_{eq} ramenée à l'arbre moteur de l'ensemble mobile s'écrit sous la forme : $J_{eq} = J_r + J_v + \lambda^2 (J_b + J_m)$

Avec :

- J_r : le moment d'inertie axial du rotor moteur
- J_v : le moment d'inertie axial de la vis
- J_b : le moment d'inertie de l'ensemble constitué du bras et de l'écrou autour de l'axe (B, \vec{z}_0)
- J_m : le moment d'inertie des masses attachées au bras en D autour de l'axe de (B, \vec{z}_0)
- λ : le rapport des vitesses de rotation du bras et du rotor moteur, approximativement constant ($\lambda = 1/112$) dans l'intervalle $\theta \in [30^\circ ; 90^\circ]$

Q2 : Calculer J_{eq} sachant que

- J_r est donné par le constructeur. $J_r = 70 \text{ g cm}^2$
- La vis est modélisée par un cylindre en acier de densité 7.6, de longueur $L_v = 195 \text{ mm}$ et de rayon $r_v = 5 \text{ mm}$
- J_b est obtenu par un modèleur 3D et vaut $J_b = 0.022 \text{ kgm}^2$
- Les masses attachées en D de 1300 g sont supposées ponctuelles et situées à une distance de $L_m = 280 \text{ mm}$

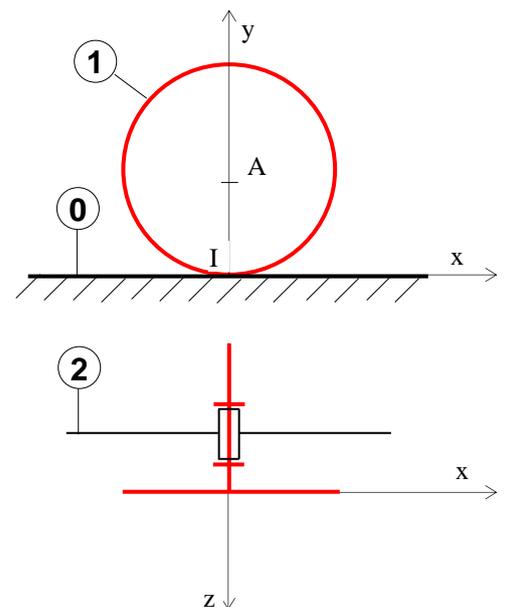


Exercice 11 : Puissances des actions mécaniques dans une roue de véhicule

Un véhicule à quatre roues se déplace en ligne droite sur une route. Soit $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère lié à la route 0 . La roue arrière motrice **1**, de centre A , de rayon a , roule sans glisser en I (contact ponctuel avec frottement).

La roue **1** est en liaison pivot sans frottement d'axe (A, \vec{z}) avec le châssis **2**.

L'arbre de transmission **3** (non représenté) entraîne la roue en rotation à la vitesse ω en lui transmettant un couple de moment $C \vec{z}$



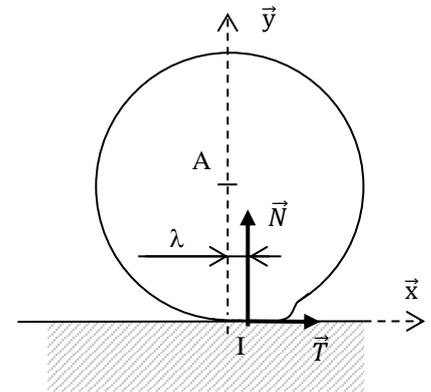
Q1 : Donner les torseurs cinématiques de $2/0$, $1/2$ et $1/0$.

Q2 : Donner l'allure des torseurs d'inter-efforts de 0 sur 1 , de 1 sur 2 et de 3 sur 1 .

Q3 : Déterminer les puissances suivantes : $P(0 \rightarrow 1/0)$, $P(3 \rightarrow 1/2)$, $P(3 \rightarrow 1/0)$, $P(1 \rightarrow 2/1)$, $P(0 \rightarrow 1/2)$, $P(2 \rightarrow 1/0)$, $P(1 \rightarrow 2/0)$. Préciser dans quelle catégorie elles rentrent : puissances extérieures ou puissances intérieures (solide ou ensemble de solides à préciser aussi).

On considère maintenant que la roue se déforme légèrement au contact avec le sol (pneu sous gonflé). On constate dans ce cas que lors d'une phase de mouvement de translation à vitesse constante (on se place dans un problème de quasi statique), la surface de contact se déplace légèrement « vers l'avant ». on note I, le point de la surface de contact où le torseur de l'action mécanique du sol peut se réduire

au glisseur $\begin{Bmatrix} T & 0 \\ N & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_I$. Le paramètre λ (en m) est appelé facteur ou coefficient de roulement.



Q4 : Déterminer $P(0 \rightarrow I/0)$ et conclure sur les conséquences d'un pneu sous gonflé

Exercice 12: Applications du T.E.C.

Q1 : Reprendre l'exercice 5 (Q2) en utilisant le T.E.C.

Q2 : Reprendre l'exercice 7 et obtenir l'équation de mouvement en utilisant le T.E.C.

Exercice 13: Applications du T.E.C. (extrait Ccp mp 2015)

1.Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose.

L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact (figure 1), est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase. La figures 2 précise les fonctions du STA Compact



Figure 1 : STA compact

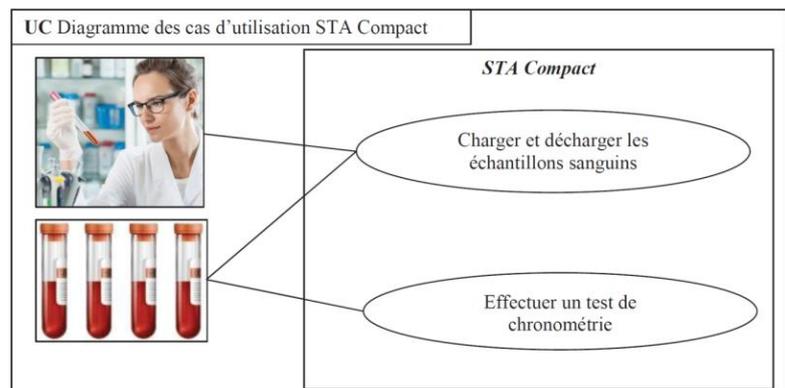


Figure 2 : Cas d'utilisation du STA Compact

ANALYSE DE L'EXIGENCE « POSITIONNER UNE SERINGUE AU-DESSUS D'UN FLACON »

On se propose de déterminer la loi de commande en vitesse optimale des axes de translation \vec{x} et \vec{y} .

2.Mise en situation

Les aiguilles de prélèvement des doses de plasma et de réactifs sont reliées à la tête de pipetage. Elles peuvent avoir un mouvement de translation verticale (selon la direction \vec{z}) par rapport à cette tête. Deux types de réactifs sont utilisés. La tête de pipetage possède donc trois aiguilles : une pour le sang et une par type de réactif. Successivement, pour chaque produit (plasma puis réactifs), la tête de pipetage est positionnée au-dessus du flacon approprié, l'aiguille correspondante prélève la quantité nécessaire, puis l'ensemble tête de pipetage/aiguilles vient déposer le produit dans la cuvette d'analyse. Les aiguilles sont ensuite plongées dans un flacon de nettoyage.

L'aspiration et le refoulement des liquides (plasma et réactifs) se font à l'aide d'une même seringue de pipetage motorisée (non représentée).

La tête de pipetage, dont le diagramme de bloc interne est fourni figure 4, est guidée en translation suivant \vec{y} par rapport à une traverse intermédiaire, elle-même guidée en translation suivant \vec{x} par rapport au bâti (figure 4).

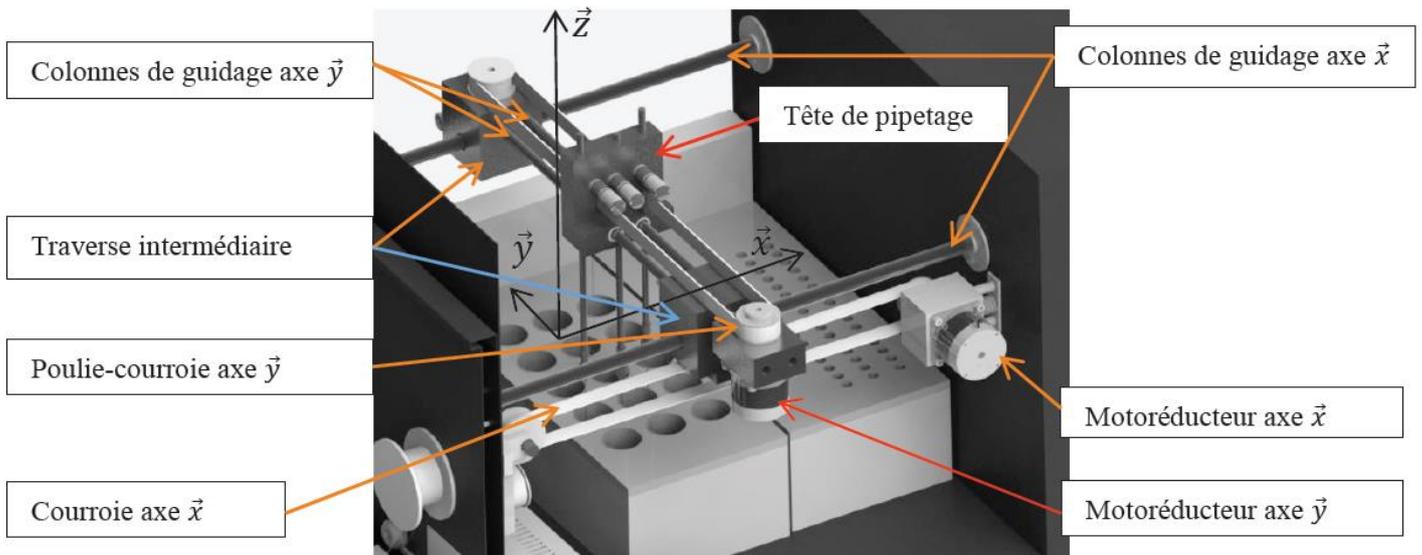


Figure 3 : Système de guidage suivant \vec{x} et \vec{y} .

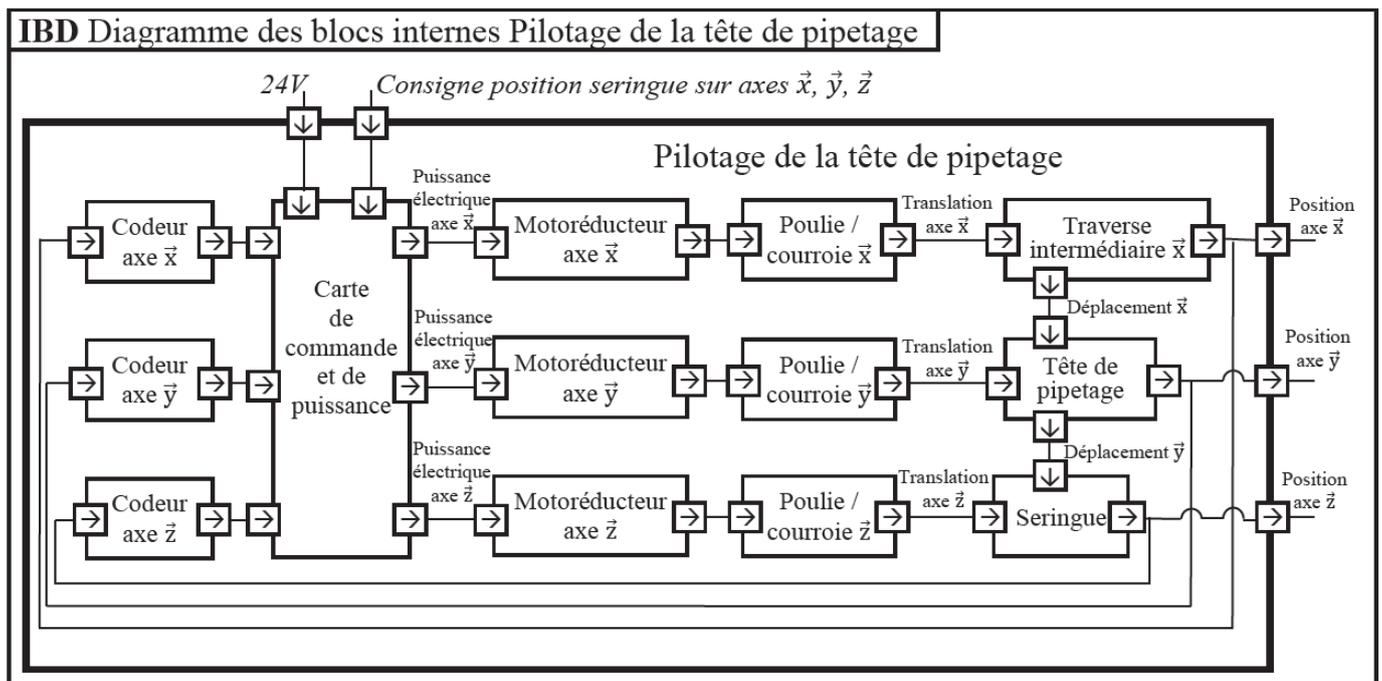


Figure 4 : Diagramme de bloc interne de la tête de pipetage

A la mise en service de l'appareil, la tête de pipetage est placée à une position de référence.

Après chaque déplacement, la tête revient à cette position de référence qui permet le nettoyage des aiguilles.

On se propose d'étudier le protocole de déplacement de cette tête pour atteindre une position définie par un point M de coordonnées $(x_M, y_M, 0)$ par rapport à la position de référence.

Chaque axe est mis en mouvement par un motoréducteur et un système poulie-courroie.

Les vitesses de translation maximum sur chaque axe (V_{max}^x et V_{max}^y) sont obtenues pour les vitesses de rotation maximum des moteurs.

Les chaînes cinématiques sont identiques : nous avons donc $V_{max}^x = V_{max}^y = V_{max}$

Soient V_M^x et V_M^y (V_M^x et $V_M^y \leq V_{max}$) les vitesses maximum suivant chaque axe lors du déplacement pour atteindre le point M de coordonnées $(x_M, y_M, 0)$.

3. Optimisation de la commande

Afin de valider le choix des moteurs, on étudie le déplacement sur l'axe \vec{x} qui est le plus grand. On note V^x la vitesse de la tête de pipetage selon cet axe.

On rappelle que la distance maximum à parcourir est

$$x_M^{max} = 550 \text{ mm en 1 seconde.}$$

La loi de commande sur chaque axe est définie par un trapèze de vitesse (figure 5 ci-contre) avec les temps d'accélération et de décélération (T_a) identiques. De plus, les moteurs se mettent en route et s'arrêtent en même temps. T est la durée totale du déplacement. Nous allons chercher à optimiser cette loi de commande de sorte que le moteur fournisse une puissance instantanée minimale.

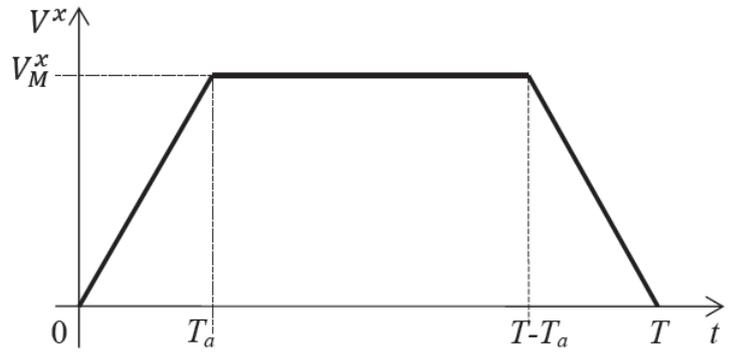


Figure 5 : Loi de commande de vitesse en trapèze

Le modèle de calcul pour cette commande d'axe est le suivant :

- le mouvement de rotation du moteur (vitesse ω_m^x) est transformé en mouvement de translation (vitesse V^x) ;
- le rapport de transmission de la chaîne cinématique est $\lambda = \frac{V^x}{\omega_m^x}$;
- la distance à parcourir est x_M^{max} ;
- l'inertie équivalente de l'ensemble des pièces en mouvement ramenée à l'arbre moteur est J_e ;
- pour cette question, les frottements sont négligés.

Q1. Exprimer la vitesse maximale V_M^x en fonction de x_M^{max} , T et T_a

Q2.

- Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur C_m en fonction de V^x , T_a , J_e et λ durant les trois phases du mouvement.
- Préciser à quel(s) instant(s) t la puissance fournie par le moteur est maximale (P_{max}).
- Exprimer cette puissance P_{max} en fonction de V_M^x , λ , J_e et T_a .
- Donner alors l'expression de P_{max} en fonction de x_M^{max} , λ , J_e , T et T_a

Q3. A partir de cette expression, montrer que P_{max} est minimale pour un réglage du temps d'accélération T_a tel que $T_a = \frac{T}{3}$.

Pour cette nouvelle commande avec $T_a = \frac{T}{3}$, on cherche à valider le choix du moteur en étudiant le déplacement maximum suivant \vec{x} .

Les caractéristiques de la chaîne cinématique sont :

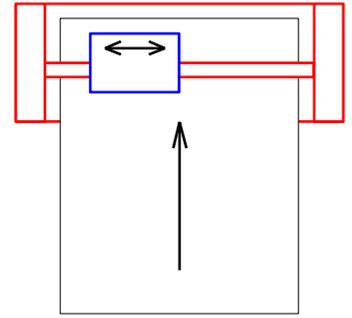
- vitesse maximale du moteur : $N_{max}^{mot} = 4150 \text{ tr/min}$;
- rapport de réduction du réducteur $k = 1/10$;
- rayon de poulie $R_p = 20 \text{ mm}$.

Q4. Déterminer la vitesse de rotation maximum ω_{max}^x que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?

Exercice 14: Applications du T.E.C. sur une imprimante

Présentation du système

L'imprimante jet d'encre est un périphérique de l'ordinateur qui permet d'imprimer sur papier les documents réalisés sur un ordinateur en utilisant des cartouches d'encre. Sa partie opérative contient notamment un mécanisme d'entraînement en translation des cartouches d'encre asservi en position. Le mouvement des cartouches d'encre est combiné au mouvement d'avance de la feuille de papier.



Modélisation du mécanisme

Le mécanisme d'entraînement en translation des cartouches d'encre est actionné par un **moteur électrique** à courant continu commandé en courant. Le rotor de ce moteur est lié au rotor d'un **capteur incrémental** qui informe le système sur la position du rotor du moteur. Par dérivation, le système reçoit l'information de vitesse du rotor. Ce moteur entraîne un **système poulies / courroie** par l'intermédiaire d'un **réducteur**. Sur la courroie, les cartouches d'encre assimilées à la masse M sont fixées. Elles sont guidées en translation par rapport au bâti. La courroie est crantée, elle est maintenue tendue par un galet tendeur. Chaque sous-ensemble en mouvement de rotation possède une **inertie** et les liaisons assurant ce mouvement sont sans jeu, avec **frottement** que l'on modélisera **visqueux** (couple résistant proportionnel à la vitesse de rotation). L'ensemble en translation supportant les cartouches d'encre possède une **masse**. La liaison se fait sans jeu avec frottement supposé **sec** (effort résistant constant à partir du seuil d'effort qui déclenche le mouvement).

On désigne par (Σ) le système constitué par les ensembles suivants dont on donne les caractéristiques utiles pour la suite.

Moteur + capteur

- inertie / axe moteur: $J_M + J_C$
- coeff de frottement visqueux: b_M
- angle de rotation rotor / stator: θ_M
- le stator exerce un couple C_M sur le rotor. Cette action sera considérée extérieure au système

Réducteur

- inertie ramenée sur l'arbre moteur: J_R
- rapport de réduction: k
- rendement: η_R

Poulie i pour $i \in \{1; 2\}$

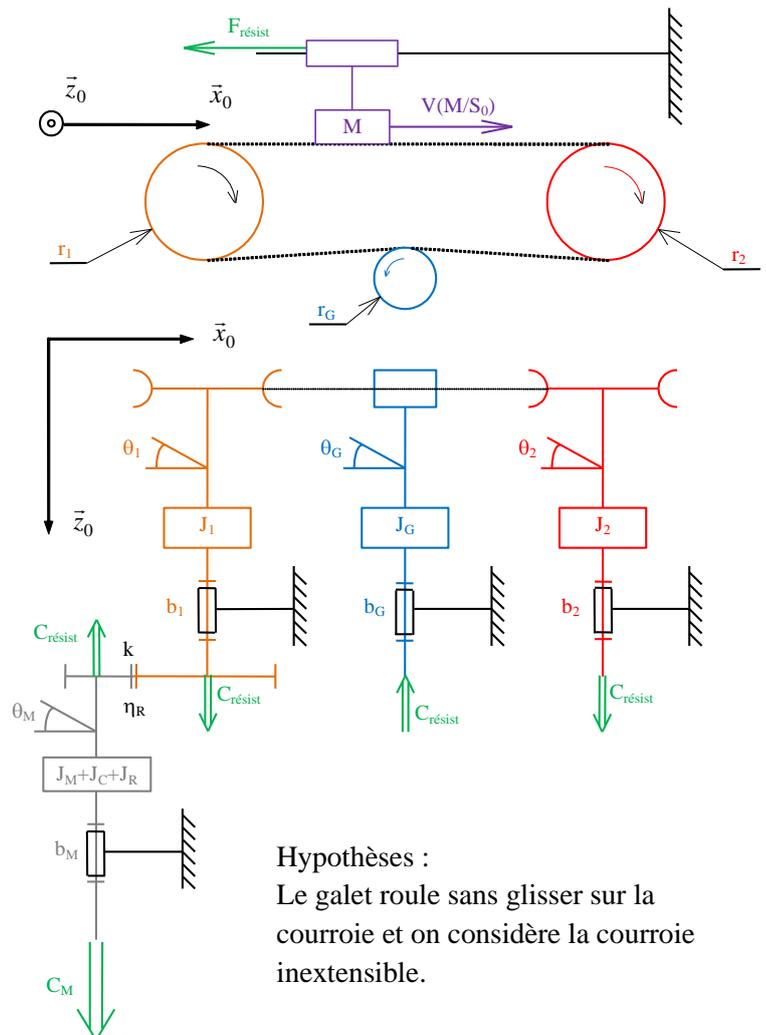
- inertie / axe poulie i : J_i
- coeff de frottement visqueux: b_i
- angle de rotation poulie i / bâti: θ_i
- rayon $r_1 = r_2 = r$

Galet tendeur

- inertie / axe galet: J_G
- coeff de frottement visqueux: b_G
- angle de rotation galet / bâti: θ_G

Cartouches

- masse: M
- poids porté par \bar{z}_0
- coeff de frottement sec: f



Hypothèses :

Le galet roule sans glisser sur la courroie et on considère la courroie inextensible.

Questions : Dans le but de commander ce système asservi, on a besoin de l'équation mécanique caractérisant le comportement du système.

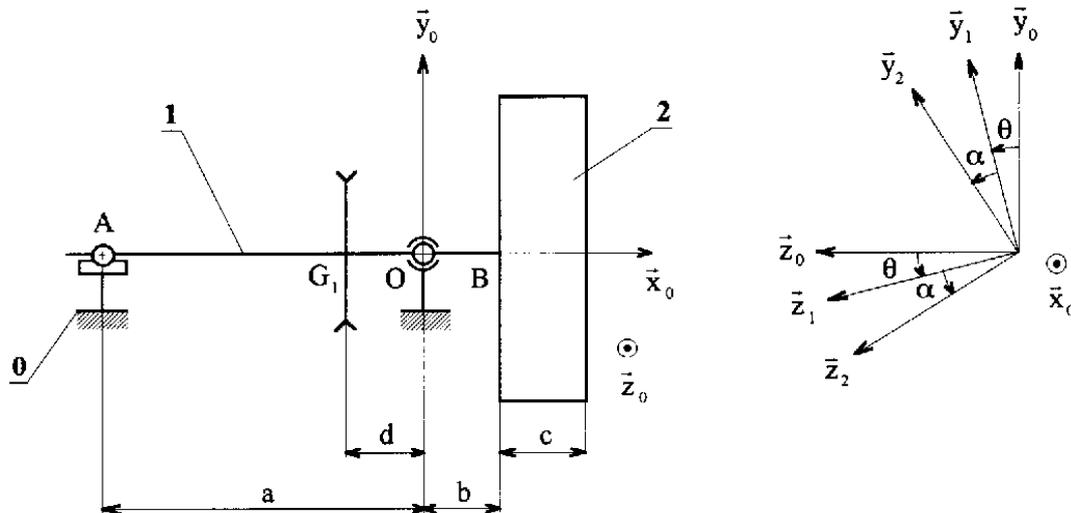
Q1 : Exprimez l'énergie cinétique du système (Σ) dans son mouvement par rapport au bâti et déterminez l'inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur du système.

Q2 : Appliquez le théorème de l'énergie cinétique au système pour établir l'équation mécanique caractérisant le processus.

Exercice 15: Equilibrage d'une roue de voiture

Afin d'équilibrer des roues de voitures, on place la roue sur un rotor (photo ci-contre) et on fait tourner l'ensemble. La machine indique ensuite à l'opérateur la position des masses de plomb qu'il doit placer sur les jantes intérieure et extérieure.

L'équilibreuse étudiée permet l'équilibrage des roues démontées. Elle est constituée d'une arbre **1** guidé en rotation par deux paliers à roulements en O et A. Ces paliers en liaison élastique avec le bâti **0**, dans une seule direction à l'aide de deux lames flexibles, permettent l'enregistrement des composantes horizontales des résultantes d'action mécanique dans les paliers à roulement, par l'intermédiaire de deux capteurs couplés à un repérage de la position angulaire de l'arbre **1**.



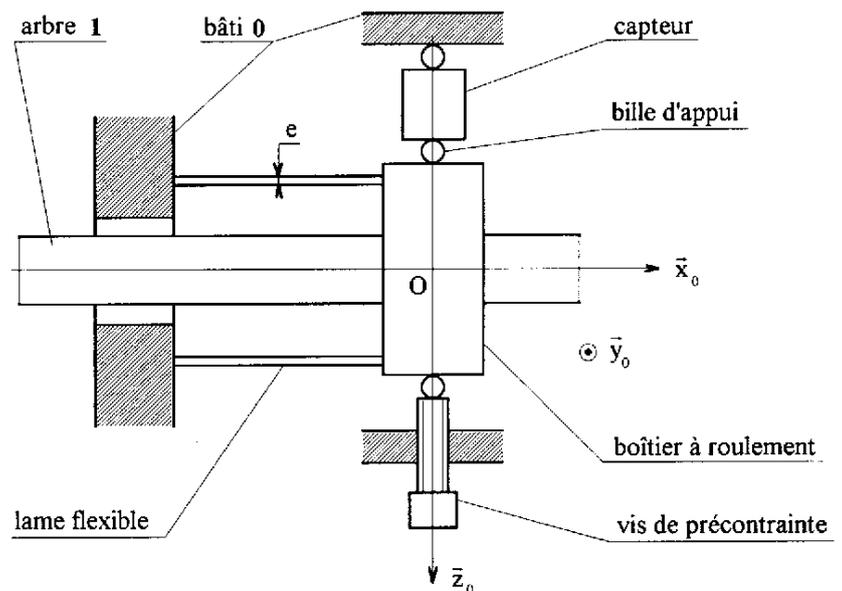
Le repère $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ est lié au bâti **0** (\bar{y}_0 vertical ascendant).

Le repère $R_1(O, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ est lié à l'arbre **1**.

On pose $\theta = (\bar{y}_0, \bar{y}_1)$ avec $\dot{\theta} = \text{constante}$.

L'arbre **1** est entraîné en rotation par une courroie sur une poulie fixée au centre d'inertie G_1 de l'arbre **1**. Le torseur d'action mécanique de la courroie sur la poulie est de la forme:

$$\mathbf{T}(\text{courroie} \rightarrow \text{poulie}) = \begin{Bmatrix} -T \bar{y}_0 \\ C_m \bar{x}_0 \end{Bmatrix}_{G_1}$$



L'arbre **1** (avec la poulie), de masse m_1 , a pour moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, \bar{x}_0) et est équilibré en rotation.

La roue **2**, à équilibrer, est fixée sur **1**. Le repère $R_2(B, \bar{x}_0, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ est lié à la roue **2** avec $\alpha = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, angle constant mais a priori inconnu. La roue **2**, de masse m_2 , a pour centre d'inertie G_2 dont la position est donnée par $\overrightarrow{BG_2} = h \bar{x}_0 + \rho \bar{z}_2$, h et ρ étant des inconnues.

La matrice d'inertie en B de la roue **2** dans la base $(\bar{x}_0, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ est de la forme : $\mathcal{J}_B(2) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_2}$

On note $\mathbf{T}(0 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$ et $\mathbf{T}'(0 \rightarrow 1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$ les torseurs d'actions mécaniques de **0** sur **1**.

Q1 : En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'ensemble $1 \cup 2$ en O, déterminer les composantes X_O, Y_O, Z_O, Y_A et Z_A des résultantes d'actions mécaniques du bâti **0** sur l'arbre **1** en fonction des données.

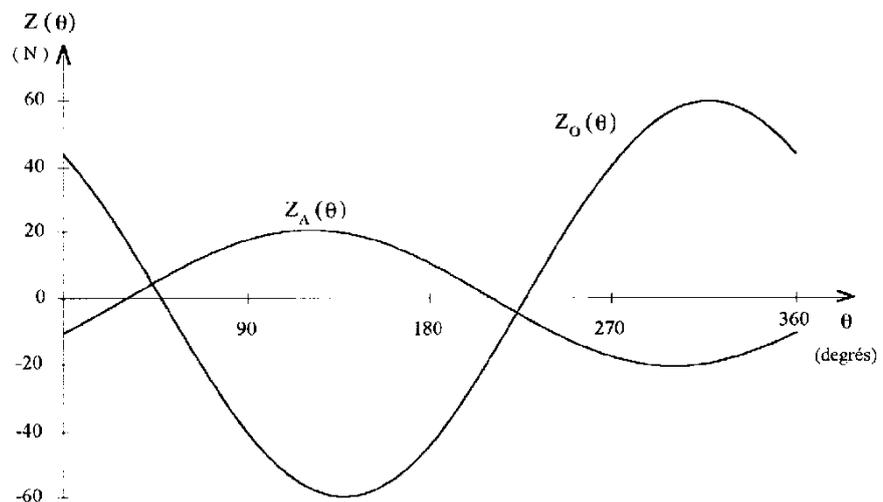
On utilise deux capteurs d'efforts, en O et A, situés dans un plan horizontal et couplés à un capteur angulaire de l'arbre **1**, pour mesurer les composantes suivant \bar{z}_0 des résultantes d'action mécanique $Z_O(\theta)$ et $Z_A(\theta)$ du bâti **0** sur l'arbre **1**.

Q2 : Déterminer, en fonction de $Z_O(0), Z_O(\pi/2), Z_A(0)$ et $Z_A(\pi/2)$, les coordonnées ρ et α du centre d'inertie G_2 de la roue **2**, ainsi que les produits d'inertie E et F .

On donne:

$$\begin{aligned} m_2 &= 18 \text{ kg} \\ a &= 460 \text{ mm} \\ b &= 80 \text{ mm} \\ \dot{\theta} &= 60 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Les capteurs fournissent les courbes ci-contre et les valeurs ci-dessous:



θ en degrés	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$Z_O(\theta)$ en N	44,05	18,00	-12,86	-40,29	-56,92	-58,29	-44,05	-18,00	12,86	40,29	56,92	58,29
$Z_A(\theta)$ en N	-10,53	-0,28	10,04	17,68	20,57	17,96	10,53	0,28	-10,04	-17,68	-20,57	-17,96

Q3 : En déduire les valeurs numériques de ρ, α, E et F .

La roue sera équilibrée avec deux masselottes **3** et **4**, assimilables à des points matériels M_3 et M_4 de masse m_3 et m_4 , situées de part et d'autre de la jante, de telle sorte que:

$$\overrightarrow{BM}_3 = r \bar{u}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM}_4 = c \bar{x}_0 + r \bar{u}_4 \quad \text{avec} \quad \beta_i = (\bar{z}_2, \bar{u}_i)$$

r étant le rayon de la jante et c son épaisseur.

Q4 : Ecrire les conditions d'équilibrage de la roue **2**.

Q5 : Déterminer les masses m_3 et m_4 des masselottes ainsi que leur position β_3 et β_4 sur la jante en fonction des caractéristiques de la roue.

On donne: $r = 190 \text{ mm}$ $c = 180 \text{ mm}$

Q6 : En déduire les valeurs numériques de m_3, m_4, β_3 et β_4 .