

Exercice 1 :

Q1 : Les paramètres propres aux véhicules sont L_f et e_v

Les paramètres géométriques qui se déduisent directement des informations des capteurs sont : L, L_a, e, D et d_r
Il reste donc à déterminer R pour que la géométrie de la trajectoire de F soit définie.

$$\begin{aligned} \text{Q2 : } \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{OO_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1O_2} \Rightarrow x_p = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{x_0} = \frac{1}{2}(L - L_a - L_f) \\ y_p &= \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OF_f} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{F_0F_f} \cdot \overrightarrow{y_0} = \frac{1}{2}(D + e - d_r) \end{aligned}$$

Dans le triangle O_1PP' rectangle en P' avec P' le projeté de P sur la droite OO_1

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x_P}{R} \Rightarrow R = \frac{(L - L_a - L_f)}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Q4 : } \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OO_2} + \overrightarrow{O_2F} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{O_2F} = R\cos(\theta_2) \cdot \overrightarrow{x_0} + R\sin(\theta_2) \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{OO_2} \cdot \overrightarrow{x_0} &= L - L_a - L_f = R\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OO_2} \cdot \overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{y_0} + \overrightarrow{O_1O_2} \cdot \overrightarrow{y_0} = R - 2R\cos(45^\circ) = R(1 - \sqrt{2}) \\ \text{D'où} \quad x &= \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{x_0} = R\cos(\theta_2) + R\sqrt{2} \\ y &= \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{y_0} = R(1 - \sqrt{2}) + R\sin(\theta_2) \end{aligned}$$

θ_2 varie entre 90° et $90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ (la portion de cercle de C_2 s'arrête au point P)

$$\begin{aligned} \text{Q5 : } \overrightarrow{V(C, V/R_1)} &= \overrightarrow{V(F, V/R_1)} + \overrightarrow{CF} \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = R\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} + (L_t \cdot \overrightarrow{x_v} - e_t \cdot \overrightarrow{y_v}) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_v} \\ \Rightarrow \overrightarrow{V(C, V/R_1)} &= (R - e_t)\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{x_v} - L_t\dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{y_v} \end{aligned}$$

Autre solution en passant par O_1 :

$$\overrightarrow{V(C, V/R_1)} = \overrightarrow{V(O_1, V/R_1)} + \overrightarrow{CO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = \vec{0} + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FO_1}) \wedge \overrightarrow{\Omega(V/R_1)} = (L_t \cdot \overrightarrow{x_v} - e_t \cdot \overrightarrow{y_v} + R \cdot \overrightarrow{y_v}) \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \overrightarrow{z_v}$$

$$\begin{aligned} \text{Q6 : } \overrightarrow{V(C, V/R_1)} &= v \cdot \overrightarrow{x_r} = v \cdot (\cos(\alpha) \cdot \overrightarrow{x_v} + \sin(\alpha) \cdot \overrightarrow{y_v}) \\ \begin{cases} v \cdot \cos(\alpha) = (R - e_t)\dot{\theta}_1 \\ v \cdot \sin(\alpha) = -L_t\dot{\theta}_1 \end{cases} &\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-L_t}{(R - e_t)} \end{aligned}$$

Q8 : $H_m(p)$: moteur CC

K_c : potentiomètre

K_a : adaptateur ou convertisseur

K_r : réducteur

$\frac{1}{p}$: intégration pour passer d'une vitesse angulaire

à une position angulaire

Pour K_a : asservissement si en régime permanent lorsque la sortie vaut l'entrée (constantes), le signal ε est nul \Rightarrow

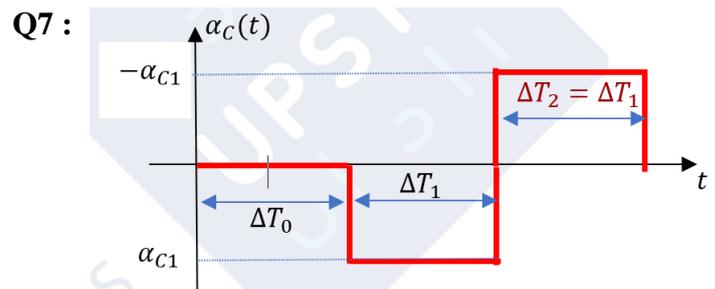
$$\varepsilon(p) = \frac{K_a}{H_t(p)} A_c(p) - K_c A_1(p) = \frac{K_a}{H_t(p)} A_c(p) - \frac{K_c}{H_t(p)} A(p) = 0 \text{ lorsque } A(p) = A_c(p) \Rightarrow K_a = K_c$$

$$\begin{aligned} \text{Q9 : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= \vec{0} \Rightarrow l_1 \overrightarrow{x_1} + b \overrightarrow{x_2} + (a - l_1) \overrightarrow{x_3} - a \overrightarrow{x} - b \overrightarrow{y} = \vec{0} \\ \begin{cases} \text{sur } \overrightarrow{x} : l_1 \cdot \cos(\alpha_1) + b \cdot \cos(\alpha_2) + (a - l_1) \cdot \cos(\alpha_3) - a = 0 \\ \text{sur } \overrightarrow{y} : l_1 \cdot \sin(\alpha_1) + b \cdot \sin(\alpha_2) + (a - l_1) \cdot \sin(\alpha_3) - b = 0 \end{cases} \\ \alpha_2 = 90^\circ \text{ donc sur } \overrightarrow{y} : l_1 \cdot \sin(\alpha_1) + b + (a - l_1) \cdot \sin(\alpha_3) - b &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha_3) = -\frac{l_1}{(a - l_1)} \sin(\alpha_1) \text{ d'où } k = -\frac{l_1}{(a - l_1)}$$

Q10 : Pour α_3 variant de 0° à 45° , α_3 est une fonction linéaire de α_1 d'après la figure 8 :

$$\alpha_3 = K_{31} \alpha_1 \text{ avec } K_{31} = \frac{-40 - 0}{30 - 0} = -\frac{4}{3}$$



Exercice 2 :

1) La condition de roulement sans glissement en I entre la bille et le rail (0) donne :

$$\vec{V}(I \in \text{bille} / 0) = \vec{V}(G \in \text{bille} / 0) + \vec{\Omega}(\text{bille} / 0) \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

$$\vec{V}(G \in \text{bille} / 0) = -\vec{\Omega}(\text{bille} / 0) \wedge \vec{GI} = -\omega_b \vec{y}_0 \wedge \vec{r} = -r\omega_b \vec{x}_1$$

$$\text{On a aussi : } \vec{V}(G \in \text{bille} / 0) = \left[\frac{d\vec{OG}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(R-r)\vec{z}_1}{dt} \right]_0 = (R-r) \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_0 = (R-r)\dot{\theta} \vec{x}_1$$

$$\text{On en déduit : } -r\omega_b \vec{x}_1 = (R-r)\dot{\theta} \vec{x}_1 \quad \omega_b = -\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r} \text{ et } v = (R-r)\dot{\theta}$$

Le torseur cinématique caractérisant le mouvement de la bille par rapport au rail (0) est donc :

$$\{V(\text{bille} / 0)\}_A : \begin{cases} -\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r} \vec{y}_0 \\ (R-r)\dot{\theta} \vec{x}_1 \end{cases} = \begin{cases} \omega_b \vec{y}_0 \\ -r\omega_b \vec{x}_1 \end{cases} \quad (\text{en G pas en A})$$

$$2) \vec{\Gamma}(G \in \text{bille} / 0) = \left[\frac{d((R-r)\dot{\theta} \vec{x}_1)}{dt} \right]_0 = (R-r)\ddot{\theta} \vec{x}_1 + (R-r)\dot{\theta} \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_0 = (R-r)\ddot{\theta} \vec{x}_1 - (R-r)\dot{\theta}^2 \vec{z}_1$$

3) En linéarisant au premier ordre l'équation de mouvement devient :

$$F(t) = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\theta + \frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$$

En supposant les conditions initiales nulles, on obtient dans le domaine symbolique :

$$F(p) = f_v(R-r)p\Theta(p) + mg\Theta(p) + \frac{7}{5}m(R-r)p^2\Theta(p)$$

$$F(p) = \left[mg + f_v(R-r)p + \frac{7}{5}m(R-r)p^2 \right] \Theta(p)$$

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{mg + f_v(R-r)p + \frac{7}{5}m(R-r)p^2} = \frac{\frac{1}{mg}}{1 + \frac{f_v(R-r)}{mg}p + \frac{7(R-r)}{5g}p^2} = \frac{K_s}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Par identification, on obtient :

$$K_s = \frac{1}{mg} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = \frac{f_v(R-r)}{mg} \quad \zeta = \frac{1}{2} = \frac{f_v(R-r)}{mg} \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \quad \zeta = \frac{f_v}{2mg} \sqrt{\frac{5g(R-r)}{7}}$$

Exercice 3 :

$$\mathbf{Q1} : \{V_{4/p}\} = \begin{Bmatrix} p_{4p} \cdot \vec{x}_4 + q_{4p} \cdot \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad L(4/p) : \text{Liaison rotule à doigt, de centre } A$$

$$\{V_{3/4}\} = \begin{Bmatrix} r_{34} \cdot \vec{z}_3 \\ w_{34} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} r_{34} \cdot \vec{z}_4 \\ w_{34} \cdot \vec{z}_4 \end{Bmatrix}_A \quad L(3/4) : \text{Liaison pivot glissant d'axe } (A, \vec{z}_3)$$

$$\mathbf{Q2} : \{V_{3/p}\} = \{V_{3/4}\} + \{V_{4/p}\} = \begin{Bmatrix} p_{4p} \cdot \vec{x}_4 + q_{4p} \cdot \vec{y}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} r_{34} \cdot \vec{z}_3 \\ w_{34} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} p_{4p} \cdot \vec{x}_4 + q_{4p} \cdot \vec{y}_4 + r_{34} \cdot \vec{z}_4 \\ w_{34} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_A$$

$L_{eq}(3/p) : \text{Liaison linéaire annulaire d'axe } (A, \vec{z}_4) = (A, \vec{z}_3).$

$$\mathbf{Q3} : V\{1/0\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad V\{2/1\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}'_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \quad V\{3/2\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_3 \\ \dot{z}_{32} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}'_2 \\ \dot{z}_{32} \cdot \vec{z}'_2 \end{Bmatrix}_A$$

$$\mathbf{Q4} : V\{3/0\} = V\{3/2\} + V\{2/1\} + V\{1/0\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_3 \\ \dot{z}_{32} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 + \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_3 \\ \dot{z}_{32} \cdot \vec{z}_3 \end{Bmatrix}_A$$

Q5 : Obtention de l'écriture du torseur dans la base B_3

- \vec{z}_1 est projeté dans la base $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$
- \vec{x}_2, \vec{y}_2 et \vec{z}_2 sont ensuite projetés dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$
- On additionne les composantes pour former la résultante et le moment du torseur.

Q6 : il suffit de montrer que le système d'équation à une et une seule solution :

$$\begin{cases} -0,739 \cdot \dot{\theta}_1 - 0,500 \cdot \dot{\theta}_2 = 0 \\ 0,354 \cdot \dot{\theta}_1 = \dot{\psi} \\ 0,573 \cdot \dot{\theta}_1 + 0,866 \cdot \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 = 0 \\ \dot{z}_{32} = \dot{z}_{32} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta}_2 = -\frac{0,739 \cdot \dot{\psi}}{0,354 \times 0,500} \\ \dot{\theta}_1 = \frac{\dot{\psi}}{0,354} \\ \dot{\theta}_3 = \left(\frac{0,573}{0,354} + \frac{0,866 \times 0,739}{0,354 \times 0,500} \right) \dot{\psi} \\ \dot{z}_{32} = \dot{z}_{32} \end{cases}$$

Il y a bien une et une seule solution.

Q7 : On vient de voir que pour une position donnée, on peut calculer les vitesses de chacun des axes afin de commander les quatre moteurs reproduisant le mouvement imposé par le chirurgien.

Si ceci reste vrai quelle que soit la position du robot $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, z_{32})$ et quelle que soit la vitesse commandée par le chirurgien, alors l'architecture est tout à fait satisfaisante.

Q8 : Expression littérale donnant $\theta_{1,max}$ en fonction de $\dot{\theta}_{1,max}, t_1, t_2$ et t_3 :

$\theta_1(t = t_3) = \theta_{1,max} = \pi \text{ rad}$: aire sous la courbe $\dot{\theta}_1(t) = f(t)$.

$$\frac{t_1}{2} \cdot \dot{\theta}_{1,max} + \dot{\theta}_{1,max} \cdot (t_2 - t_1) + \frac{(t_3 - t_2)}{2} \cdot \dot{\theta}_{1,max} = \theta_{1,max} \Rightarrow \theta_{1,max} = t_1 \cdot \dot{\theta}_{1,max} + \dot{\theta}_{1,max} \cdot (t_2 - t_1)$$

Relation simple donnant t_2 en fonction de t_1 et t_3 : $t_1 = t_3 - t_2 \Rightarrow t_2 = t_3 - t_1$

Relation simple donnant t_1 en fonction de $\dot{\theta}_{1,max}$ et $\ddot{\theta}_1$: $\ddot{\theta}_1 \cdot t_1 = \dot{\theta}_{1,max} \Rightarrow t_1 = \frac{\dot{\theta}_{1,max}}{\ddot{\theta}_1}$

Expression littérale de $\dot{\theta}_{1,max}$ et de $\ddot{\theta}_1$.

$$\frac{t_1}{2} + (t_2 - t_1) + \frac{(t_3 - t_2)}{2} = \frac{\pi}{\dot{\theta}_{1,max}} \Rightarrow t_3 - t_1 = \frac{\theta_{1,max}}{\dot{\theta}_{1,max}} \Rightarrow t_3 - \frac{\dot{\theta}_{1,max}}{\ddot{\theta}_1} = \frac{\theta_{1,max}}{\dot{\theta}_{1,max}}$$

$$\Rightarrow \left(t_3 - \frac{\theta_{1,max}}{\dot{\theta}_{1,max}} \right) = \frac{\dot{\theta}_{1,max}}{\ddot{\theta}_1} \Rightarrow \left(\frac{t_3 \dot{\theta}_{1,max}}{\dot{\theta}_{1,max}} - \frac{\theta_{1,max}}{\dot{\theta}_{1,max}} \right) = \frac{\dot{\theta}_{1,max}}{\ddot{\theta}_1} \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{(\dot{\theta}_{1,max})^2}{t_3 \dot{\theta}_{1,max} - \theta_{1,max}}$$

$$\mathbf{Q9} : \ddot{\theta}_1 = \frac{(\dot{\theta}_{1,max})^2}{t_3 \dot{\theta}_{1,max} - \theta_{1,max}} = \frac{6,28^2}{1 \times 6,28 - \pi} = 12,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Exercice 4 :

Q1 : Quand la trajectoire du fauteuil est une droite le rayon de courbure est infini : $\rho \rightarrow +\infty$ et $\omega_g = \omega_d$

Quand le fauteuil tourne autour de l'axe (O_f, \vec{z}_0) , il pivote sur lui-même, le rayon de courbure est nul : $\rho = 0$ et $\omega_g = -\omega_d$

Q2 : Quand le fauteuil tourne autour de l'axe (O_g, \vec{z}_0) , il pivote sur sa roue gauche et O_f parcourt un cercle de rayon a autour de O_g , le rayon de courbure est nul : $\rho = a$ et $\omega_g = 0$

Q3a : La condition de roulement sans glissement en I_g donne la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}(I_g, Rg/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O_f, Rf/Rg)}_{\vec{0} \text{ car } O_f \in (Og, \vec{y}_f)} + \vec{V}(O_f, Rg/R_0) = \underbrace{\vec{V}(I_g, Rg/R_0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_f I_g} \wedge \vec{\Omega}(Rg/R_0)$$

$$\vec{\Omega}(Rg/R_0) = \vec{\Omega}(Rg/R_f) + \vec{\Omega}(R_f/R_0) = \omega_g \vec{y}_f + \dot{\beta} \vec{z}_f$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \left(\frac{a}{2} \vec{y}_f - R \vec{z}_f \right) \wedge \left(\omega_g \vec{y}_f + \dot{\beta} \vec{z}_f \right) = \frac{a}{2} \vec{y}_f \wedge \dot{\beta} \vec{z}_f - R \vec{z}_f \wedge \omega_g \vec{y}_f$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \left(\frac{a}{2} \dot{\beta} + R\omega_g \right) \vec{x}_f$$

Q3b : La condition de roulement sans glissement en I_d donne la relation cinématique suivante :

$$\vec{V}(I_d, Rd/R_0) = \vec{0}$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O_f, Rf/Rd)}_{\vec{0} \text{ car } O_f \in (Od, \vec{y}_f)} + \vec{V}(O_f, Rd/R_0) = \underbrace{\vec{V}(I_d, Rd/R_0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_f I_d} \wedge \vec{\Omega}(Rd/R_0)$$

$$\vec{\Omega}(Rd/R_0) = \vec{\Omega}(Rd/R_f) + \vec{\Omega}(R_f/R_0) = \omega_d \vec{y}_f + \dot{\beta} \vec{z}_f$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \left(-\frac{a}{2} \vec{y}_f - R \vec{z}_f \right) \wedge \left(\omega_d \vec{y}_f + \dot{\beta} \vec{z}_f \right) = -\frac{a}{2} \vec{y}_f \wedge \dot{\beta} \vec{z}_f - R \vec{z}_f \wedge \omega_d \vec{y}_f$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \left(-\frac{a}{2} \dot{\beta} + R\omega_d \right) \vec{x}_f$$

$$\text{Q3c : } \vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \underbrace{\vec{V}(O, Rf/R_0)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{O_f O} \wedge \vec{\Omega}(Rf/R_0)$$

$$\vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \rho \vec{y}_f \wedge \dot{\beta} \vec{z}_0 \text{ d'où } \vec{V}(O_f, Rf/R_0) = \rho \dot{\beta} \vec{x}_f$$

Q4 : On a : $V(t) = \rho \dot{\beta}$ et on obtient le système d'équations suivant en utilisant les résultats de la Q14 :

$$\bullet \quad \frac{a}{2} \dot{\beta} + R\omega_g = \rho \dot{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{2} \frac{V(t)}{\rho} + R\omega_g = V(t) \quad \Rightarrow \quad \omega_g = \frac{1}{R} V(t) \left(1 - \frac{a}{2\rho} \right)$$

$$\bullet \quad -\frac{a}{2} \dot{\beta} + R\omega_d = \rho \dot{\beta} \quad \Rightarrow \quad \omega_d = \frac{1}{R} V(t) \left(1 + \frac{a}{2\rho} \right)$$

Exercice 5:Q1- Modélisation locale :

$$d\vec{F} = p(M).dS.\vec{x}$$

$$d\vec{M}_M = \vec{0}, d\vec{M}_O = \vec{OM} \wedge d\vec{F} = (y.\vec{y} + z.\vec{z}) \wedge p(M).dS.\vec{x} = p(M).dS.(-y.\vec{z} + z.\vec{y})$$

Modélisation globale : intégrons en coordonnées cartésiennes (dS = dy.dz)

$$\vec{F} = \rho_e.g.\int_0^b \int_{-L}^L (h-z).dy.dz.\vec{x} = \rho_e.g.2L.b.(h-\frac{b}{2}).\vec{x}$$

$$\vec{M}_O = \int_0^b \int_{-L}^L d\vec{M}_O = \rho_e.g.\int_0^b \int_{-L}^L (h-z).(-y.\vec{z} + z.\vec{y}).dy.dz = \rho_e.g.2L.b^2.(\frac{h}{2} - \frac{b}{3}).\vec{y}$$

Q2- Cherchons C tel que $\vec{M}_C = \vec{0}$; par symétrie, on a $\vec{OC} = c.\vec{z}$

$$\vec{M}_C = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_O + \vec{CO} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{On trouve : } \vec{OC} = b \frac{(\frac{h}{2} - \frac{b}{3})}{(h - \frac{b}{2})} \vec{z}$$

La vanne s'ouvre automatiquement si $c > a$, soit $b \frac{(\frac{h}{2} - \frac{b}{3})}{(h - \frac{b}{2})} > a$

$$\text{On trouve donc : } h > \frac{b.(2b-3a)}{3.(b-2a)} = 1,3m$$

Exercice 6: embrayage motoQ1- **Expression de la pression p**

$$dN = pdS \Rightarrow N_0 = \int pdS = p \int_0^{2\pi} \int_{Ri}^{Re} r dr d\theta = p\pi(Re^2 - Ri^2) \text{ soit : } p = \frac{N_0}{\pi(Re^2 - Ri^2)}$$

Q2- **Expression du couple transmissible C_0^1 pour une surface frottante : $|dT| \leq f|dN|$**

$$C_0^1 = \int r.dT = p.f \int_0^{2\pi} \int_{Ri}^{Re} r^2 dr d\theta = p.f \frac{2\pi}{3} (Re^3 - Ri^3) \text{ soit : } C_0^1 = \frac{2}{3} f.N_0 \frac{Re^3 - Ri^3}{Re^2 - Ri^2}$$

Expression du rayon équivalent R_{eq} :

$$\text{On sait que : } C_0^1 = f.R_{eq}.N_0 \text{ d'où l'expression : } R_{eq} = \frac{2}{3} \frac{Re^3 - Ri^3}{Re^2 - Ri^2}$$

Q3- C'est le nombre de disques externes multiplié par 2 : $n = N_b \text{ disque E} \times 2 = 16$ Q4- Il y a 6 ressorts donc : $N_0 = 6K_h(L_0 - L_1)$ Q5- $C_0^n = n.C_0^1 = 6.n.f.K_h(L_0 - L_1)R_{eq}$ avec $R_{eq} = \frac{2}{3} \frac{Re^3 - Ri^3}{Re^2 - Ri^2}$ Q6- $C_0^n = 6 \times 16 \times 0,2 \times 9 \times \underbrace{(39 - 24)}_{=15} \times 70.10^{-3} = 96 \times 189.10^{-2} = 181,44Nm \approx 181 Nm$ Le cahier des charges donne : $C_{m,max} = 147 Nm$ Conclusion : $C_{m,max} < 181 Nm$ donc l'embrayage peut transmettre sans problème le couple moteur. Le surdimensionnement de l'embrayage n'est pas excessif (de l'ordre de 30%).

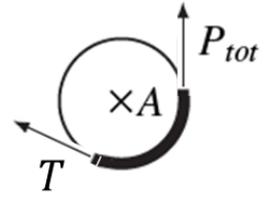
Exercice 7:

Q1 : On isole le galet de renvoi en A.

Celui-ci est soumis à 3 actions mécaniques : la tension en aval de la poulie T , la tension en amont P_{tot} et l'action de la pivot en A.

La masse du galet étant négligée, on peut donc utiliser le théorème du moment statique en A suivant \vec{y} :

$$RP_{tot} - RT = 0 \Rightarrow P_{tot} = T$$



La tension de la sangle n'est donc pas modifiée par les galets de renvoi.

Q2 :
$$\overline{dM}_O = \overline{OM} \wedge \overline{dF} = R_G \vec{n} \wedge (dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t}) = R_G dF_t \vec{y}$$

Q3 :
$$\begin{aligned} \vec{V}_{M,s/g} &= \vec{V}_{M,s/0} - \vec{V}_{M,g/0} = \overline{MO} \wedge \vec{\Omega}_{s/0} - \overline{MO} \wedge \vec{\Omega}_{g/0} \\ &= -R_G \vec{n} \wedge (\omega_s - \omega_g) \vec{y} = +R_G (\omega_s - \omega_g) \vec{t} \end{aligned}$$

C'est le galet qui entraîne la sangle, donc $\omega_g > \omega_s$, donc $\vec{V}_{M,s/g}$ est suivant $-\vec{t}$.

D'après la loi de Coulomb, la composante tangentielle de $g \rightarrow s$ s'oppose à la vitesse de glissement de s/g donc $dF_t > 0$.

Q4 : D'après la loi de Coulomb $|dF_t| = f|dF_n|$ et comme l'effort normal est également positif (suivant \vec{n}) :

$$dF_t = f dF_n$$

Q5 : On isole le petit élément de sangle. Le problème est quasi-statique (vitesses constantes, masses et inerties négligées) on utilise donc le théorème de la résultante statique.

Bilan des actions mécanique : le petit élément de sangle est soumis à \overline{dF} , \vec{T} et $\overline{T + dT}$

Le TRS donne donc :

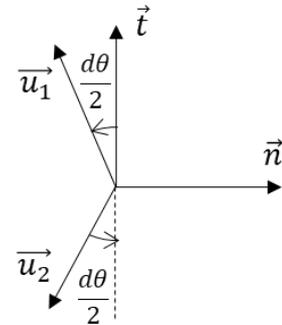
$$dF_n \vec{n} + dF_t \vec{t} + T \vec{u}_2 + (T + dT) \vec{u}_1 = \vec{0}$$

Soit en projection suivant \vec{n} et \vec{t} :

$$\begin{cases} dF_n + T \vec{u}_2 \cdot \vec{n} + (T + dT) \vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0 \\ dF_t + T \vec{u}_2 \cdot \vec{t} + (T + dT) \vec{u}_1 \cdot \vec{t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dF_n - T \sin \frac{d\theta}{2} - (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \\ dF_t - T \cos \frac{d\theta}{2} + (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dF_n = (2T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} \\ dF_t = -dT \cos \frac{d\theta}{2} \end{cases}$$



Q6 : La linéarisation à l'ordre 1 donne :

$$\begin{cases} 2T + dT \approx 2T \\ \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \\ \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1 \end{cases} \quad \text{Ce qui donne bien} \quad \begin{cases} dF_n = T d\theta \\ dF_t = -dT \end{cases}$$

Q7 : La combinaison des deux équations précédant avec la loi de Coulomb donne l'équation différentielle suivante :

$$-dT = f T d\theta$$

Deux méthodes pour résoudre cette équation différentielle sont proposées :

$$\Rightarrow \frac{dT}{d\theta} + fT = 0$$

C'est une équation différentielle d'ordre 1 dont les solutions sont de la forme :

$$T(\theta) = K e^{-f\theta}$$

Or

$$\begin{aligned} T(\theta_{min}) = P_{tot} &= K e^{-f\theta_{min}} \\ \Rightarrow K &= P_{tot} e^{f\theta_{min}} \end{aligned}$$

Donc finalement

$$T(\theta) = P_{tot} e^{-f(\theta - \theta_{min})}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -f d\theta$$

On intègre entre θ_{min} et θ :

$$\int_{T(\theta_{min})}^{T(\theta)} \frac{dT}{T} = -f \int_{\theta_{min}}^{\theta} d\theta$$

$$\Rightarrow [\ln T]_{P_{tot}}^{T(\theta)} = -f[\theta]_{\theta_{min}}^{\theta}$$

$$\Rightarrow \ln T(\theta) - \ln P_{tot} = -f(\theta - \theta_{min})$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T(\theta)}{P_{tot}} = -f(\theta - \theta_{min})$$

$$\Rightarrow T(\theta) = P_{tot} e^{-f(\theta - \theta_{min})}$$

Q8 : D'après la Q2 $\overrightarrow{dM}_O = R_g dF_t \vec{y}$

Soit :

$$C_t = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \overrightarrow{dM}_O \cdot \vec{y} = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} R_g dF_t = -R_g \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} dT \quad (\text{d'après Q36})$$

$$\Rightarrow C_t = -R_g [T(\theta)]_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} = -R_g P_{tot} (e^{-f(\theta_{max} - \theta_{min})} - e^{-f(\theta_{min} - \theta_{min})})$$

$$\Rightarrow C_t = -R_g P_{tot} (e^{-f\alpha} - 1)$$

$$\Rightarrow C_t = R_g P_{tot} (1 - e^{-f\alpha})$$

Q9 : La figure 4 montre qu'en fonction du poids P_{tot} (et donc du poids de l'utilisateur) la tension dans le brin mou est comprise entre 20 et 40 N. Si cette tension n'est pas compensée par un contrepoids alors la sangle glissera sur le galet, ce qui signifierait la chute de l'utilisateur !

Q10 : $P_{cp} = P_{masse} + P_{sangle} = m_{masse}g + \mu Lg$

AN : $P_{cp} = (4 + 2 \times 0,07) \times 9,81 = 40N$

Q11 : La masse totale que doit supporter le système d'enroulement est de $130 + 12 = 142$ kg, soit $P_{tot} \approx 1420$ N. (pour $g \approx 10 \text{ ms}^{-2}$)

D'après la figure 4, pour une masse de 1420 N, la tension dans le brin mou sera à 40 N pour un angle d'enroulement de 228° .

L'angle d'enroulement adopté par le constructeur est de 232° ce qui laisse donc une marge de sécurité de 4° . Le choix de l'angle d'enroulement est validé.

Q12 : Les questions précédentes ont montré qu'il n'y avait pas de risque de glissement de la sangle sur le galet motorisé, mais il faut aussi empêcher que le poids P_{tot} ne soit transmis au moteur et que la chaîne d'énergie soit parcourue en sens inverse. Cela pourrait endommager les systèmes électriques de la chaîne d'énergie et surtout faire chuter l'utilisateur. Le choix d'un réducteur permet de bloquer le système en cas de flux d'énergie contraire et donc garantit la sécurité de l'utilisateur.

Exercice 8:

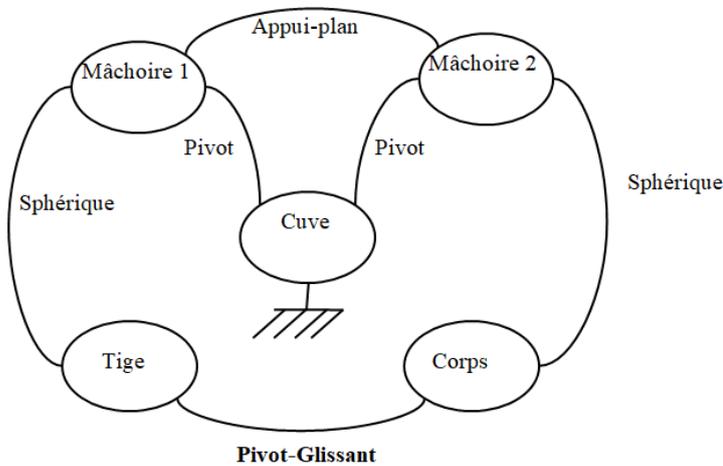
- Q1** On suppose que les poids des éléments constitutifs du capteur sont négligés par rapport aux autres actions mécaniques exercées.
- Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 glisseurs donc ils ont même support (CD) soit $D_Y=C_Y=0$
 - Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques en B, C et K donc le théorème de la résultante statique sur \vec{y} donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$ soit $B_Y = -P$
 - Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques en B et A donc le théorème du moment statique en A selon \vec{z} donne : $C_{eA} + l \cdot B_Y = 0$ soit $P = C_{eA} / l$

- Q2**
- Isolons $S=\{4\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en A selon \vec{z} donne : $2 \cdot C_e + l \cdot B_Y = 0$
 - Isolons $S=\{5\}$: soumis à 2 actions mécaniques donc le théorème du moment statique en D selon \vec{z} donne : $2 \cdot C_e + l \cdot C_Y = 0$
 - Isolons $S=\{8\}$: soumis à 3 actions mécaniques donc le théorème de la résultante statique en \vec{y} donne : $-B_Y - C_Y - P = 0$

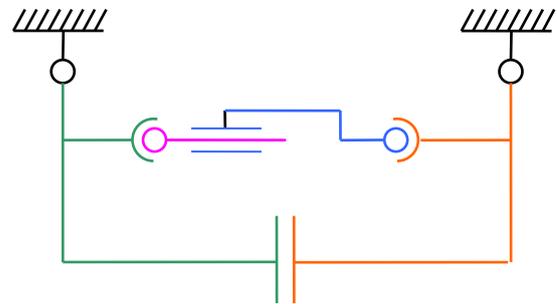
D'où : $P = 4 \cdot C_e / l$

Conclusion : la mesure du poids est donc indépendante de M_k et donc de la position du centre de gravité des granulés.

Q3 Le graphe des liaisons est le suivant :

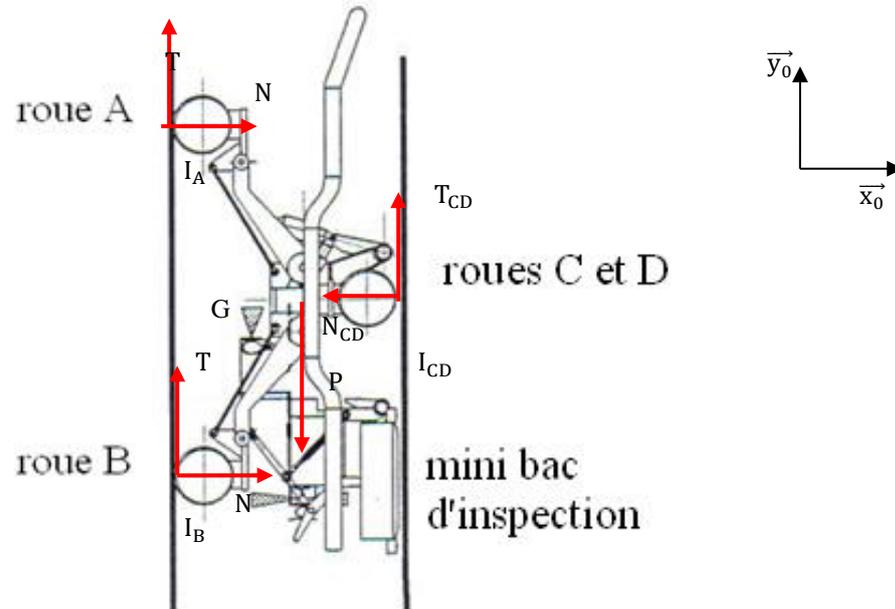


Le schéma cinématique plan :



Exercice 9:

Question 1



Question 2 : On isole le robot et on applique le TMS (G, \vec{z}_0) :

$$-2aT + cT_{CD} + bN - bN = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{CD} = \frac{2a}{c}T$$

Question 3 : On isole le robot et on applique le TRS \vec{y}_0 :

$$2T + T_{CD} = P \quad \Rightarrow \quad T_{CD} = \frac{a}{a+c}P \quad T = \frac{c}{2(a+c)}P$$

Question 4 : Pour avoir adhérence, il faut que :

$$T \leq f_0 N = 500 \text{ N} \quad \text{et} \quad T_{CD} \leq f_0 N_{CD} = 2f_0 N = 1000 \text{ N}$$

En faisant les applications numériques, on a : $T = 405 \text{ N}$ et $T_{CD} = 990 \text{ N}$. Il y aura bien adhérence.

Question 5 : C'est sur les roues S_C et S_D qu'il faut transmettre le plus grand effort qui est de $\frac{T_{CD}}{2}$.

D'après la définition du rendement... $C_{red} = \frac{\eta}{\lambda} C_{mot}$

On isole une roue et on applique le TMD sur son axe : $C_{red} = r \frac{T_{CD}}{2}$

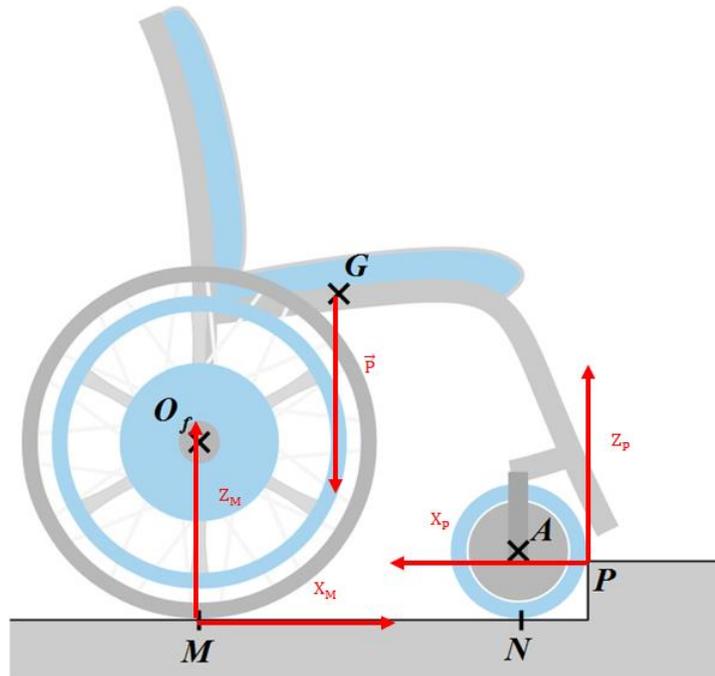
Il faut donc un couple moteur de :

$$C_{mot} = \frac{\lambda}{\eta} r \frac{T_{CD}}{2} = \frac{1/160}{0,9} \times 0,09 \times \frac{990}{2} = 0,31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Le moteur est bien dimensionné.

Exercice 10:

Q1 :



Q2 : TMS (A, \vec{y}_0) à la roue avant : $r'.Z_P = (r - d).X_P$

Q3 : $X_P = X_M$ $Z_P + Z_M = Mg$ d'où $r'.(Mg - Z_M) = (r - d)X_M$

Q4 : TMS (P, \vec{y}_0) à S : $(1 + e + r')Z_M - dX_M - (e + r')Mg = 0$

Q5 : D'après la question 7 : $Mg = \left(\frac{r-d}{r'}\right)X_M + Z_M$

Ce qui donne avec l'équation de la question 8 :

$$lZ_M + \left(\frac{ed}{r} - \frac{er}{r'} - r\right)X_M = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X_M}{Z_M} = \frac{l.r'}{e.r + r.r' - de} = 0.69 < 0,8$$

Il y a non glissement donc adhérence. L'obstacle est franchissable.

Q6 :

La roue arrière qui est soumise à :

son poids (glisseur en O)

l'action du châssis du fauteuil dans la liaison pivot parfaite (O, \vec{y}_0)

l'action du sol en M

l'action de chaque motoréducteur (torseur couple $-Cr \vec{y}_0$ avec $Cr > 0$)

TMS (O, \vec{y}_0) à la roue arrière : $-2Cr + R.X_M = 0$ avec $X_M = \frac{Mg.r'}{r-d+r'/0,7} = 841 \text{ N}$

D'où $Cr = 168 \text{ Nm}$

Q7 : On relève un couple de pointe (max) de 52 Nm. Il faut donc réduire par un facteur d'à peu près 3 le rapport de réduction.

La vitesse (nominale = pas loin de la max) de rotation en sortie de réducteur vaut $\omega_r = 135 \text{ rpm} = 135 * \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$ soit une vitesse de translation du véhicule $V_{nom} = R.\omega_r \approx 0,2 * 14 \approx 10 \text{ km/h}$. (vérifié sur doc fiche technique). En divisant par trois la réduction, et en utilisant une roue de diamètre 800 mm cela donne

$V_{nom} = R.\omega_r \approx \frac{0,4*14}{3} \approx 6,7 \text{ km/h}$ et $V_{max} = \frac{18}{10} * 6,7 \approx 12 \text{ km/h}$ d'après la notice. Résultat acceptable.

Exercice 11:

Q1: On a affaire à une chaîne ouverte. On isole donc $E_{12} = \{1, 2\}$ (en équilibre dans le référentiel galiléen du bâti $\mathbf{0}$) et on applique le théorème du moment statique (TMS) en B , projeté selon la direction \vec{y}_0 (pour ne pas faire apparaître les inconnues de l'action mécanique transmissible par la liaison pivot d'axe (B, \vec{y}_0) entre les solides 3 et 2).

En effet, le bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) à l'ensemble isolé est :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow E_{12}}\} &= \left\{ \begin{array}{c} -M_{12}g\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{12}} & \{\mathcal{T}_{hum \rightarrow 1}\} &= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D \\ \{\mathcal{T}_{mot \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{32}\vec{y}_0 \end{array} \right\}_{\forall M} & \{\mathcal{T}_{3 \rightarrow 2}\} &= \left\{ \begin{array}{cc} X_{32} & - \\ - & 0 \\ Z_{32} & - \end{array} \right\}_{B, \mathcal{B}_0} \end{aligned}$$

Le TMS implique alors $[\vec{M}_{B, pes \rightarrow E_{12}} + \vec{M}_{B, hum \rightarrow 1}] \cdot \vec{y}_0 + C_{32} + 0 = 0$ soit :

$$\begin{aligned} & [\vec{M}_{G_{12}, pes \rightarrow E_{12}} + \overrightarrow{BG}_{12} \wedge \vec{R}_{pes \rightarrow E_{12}} + \vec{M}_{D, hum \rightarrow 1} + \overrightarrow{BD} \wedge \vec{R}_{hum \rightarrow 1}] \cdot \vec{y}_0 + C_{32} = 0 \\ \implies & [\vec{0} + (-\ell_3\vec{z}_3 - \ell_4\vec{z}_0 + Z_{G_{12}}\vec{z}_0) \wedge (-M_{12}g\vec{z}_0) + \vec{0} + (-\ell_3\vec{z}_3 - \ell_4\vec{z}_0 + Z_D\vec{z}_0) \wedge (-F\vec{z}_0)] \cdot \vec{y}_0 + C_{32} = 0 \\ \implies & \ell_3 \sin(\theta_{43})M_{12}g + \ell_3 \sin(\theta_{43})F + C_{32} = 0 \end{aligned}$$

D'où : $C_{32} = -\ell_3 \sin(\theta_{43})(M_{12}g + F)$. N.B. : A.N. : $C_{32} \simeq 94,7 \text{ N}\cdot\text{m}$ ($\theta_{43} < 0$).

Q2: Puisque le rendement est égal à 1, on a : $C_m = \frac{\omega_{32}}{\omega_m} C_{32} = \frac{1}{r_{32}} C_{32}$. A.N. : $C_m \simeq 0,99 \text{ N}\cdot\text{m} < 2,5 \text{ N}\cdot\text{m}$. Le moteur est en mesure de rester en position de genuflexion pendant que le patient est en appui sur l'épaule du robot. Il faudra cependant prendre garde que cette position de perdre pas trop dans le temps au risque d'un échauffement des bobinages du moteur.

Exercice 12:

Q1 : En s'appuyant sur la figure 5, la fermeture géométrique donne : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

D'où, en tenant compte du paramétrage du sujet : $L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - L_2 \cdot \vec{x}_3 - L_2 \cdot \vec{x}_2 = \vec{0}$

Or on a pour $i=1,2,3$: $\vec{x}_i = \cos(\theta_i) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_i) \cdot \vec{y}_0$

D'où les relations en projection dans le plan $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$:

$$\text{sur } \vec{x}_0 : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) - L_2 \cdot \cos(\theta_2) = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{sur } \vec{y}_0 : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) - L_2 \cdot \sin(\theta_2) = 0 \quad (1.2)$$

Pour obtenir la relation demandée, il faut isoler θ_2 puis le faire « disparaître » :

$$(1.1) : L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3) = L_2 \cdot \cos(\theta_2)$$

$$(1.2) : 0 + L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3) = L_2 \cdot \sin(\theta_2)$$

Ainsi la somme des carrés des relations (1.1) et (1.2) donne :

$$L_2^2 \cdot (\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) = (L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2$$

D'où finalement : $L_2 = \sqrt{(L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - L_2 \cdot \cos(\theta_3))^2 + (L_1 \cdot \sin(\theta_1) - L_2 \cdot \sin(\theta_3))^2}$ car $L_2 > 0$.

Q2 : $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CE}$ avec $\vec{CE} = 2 \cdot \vec{CD} = -2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3$

$$\text{D'où } \vec{AE} = L_0 \cdot \vec{x}_0 + L_1 \cdot \vec{x}_1 - 2 \cdot L_2 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} L_0 + L_1 \cdot \cos(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \cos(\theta_3) \\ L_1 \cdot \sin(\theta_1) - 2 \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_3) \\ 0 \end{pmatrix}_{(B_0)}$$

Q3 : Démarche : c'est une chaîne fermée donc un peu compliqué.

Il faudra nécessairement appliquer le TMS à 1 en B \vec{z}_0 pour faire apparaître C_m . Cela fait apparaître les inconnues de liaison L_{13} . Donc isoler 3, ce qui fait apparaître les inconnues de liaison L_{23} et F.

Ces inconnues de la liaison L_{23} vont poser problème. On va commencer par isoler 2 (soumis à 2 glisseurs de direction \vec{x}_2 grâce au TMS) puis 1 (TMS) puis 3 (TMS et TRS).

$$1) \quad \text{TMS à (2) en A sur } \vec{z}_0 : \underbrace{\vec{M}_A(0 \xrightarrow{L} 2) \cdot \vec{z}_0}_{=0 \text{ car pivot parfaite}} + \vec{M}_A(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = 0$$

$$\text{Il reste à déterminer } \vec{M}_A(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0, \text{ avec } \{T(3 \rightarrow 2)\}_D = \begin{Bmatrix} X_{32} & L_{32} \\ Y_{32} & M_{32} \\ Z_{32} & 0 \end{Bmatrix}_{(B_0)} .$$

$$\text{On obtient : } \vec{M}_A(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = 0 + (L_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge \vec{R}(3 \rightarrow 2)) \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_A(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = L_2 \cdot (\cos \theta_2 \cdot Y_{32} - \sin \theta_2 \cdot X_{32}),$$

$$\text{Ce qui donne la relation: } L_2 \cdot (\cos \theta_2 \cdot Y_{32} - \sin \theta_2 \cdot X_{32}) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\cos \theta_2 \cdot Y_{32} - \sin \theta_2 \cdot X_{32} = 0}$$

Le mieux c'est uniquement d'écrire le TMS donne $\vec{R}(3 \rightarrow 2) \cdot \vec{y}_2 = 0$ d'où $\vec{R}(3 \rightarrow 2) // \vec{x}_2$ avec l'hypothèse du problème plan qui aurait été judicieuse.

$$2) \quad \text{TMS à (1) en B sur } \vec{z}_0 : \underbrace{\vec{M}_B(0 \xrightarrow{L_{01}} 1) \cdot \vec{z}_0}_{=0 \text{ car pivot parfaite}} + \vec{M}_B(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 + \underbrace{\vec{M}_B(0 \xrightarrow{\text{Moteur}} 1) \cdot \vec{z}_0}_{C_m} = 0$$

Il reste à déterminer $\vec{M}_B(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0$, avec $\{T(3 \rightarrow 1)\} = \begin{Bmatrix} X_{31} & L_{31} \\ Y_{31} & M_{31} \\ Z_{31} & 0 \end{Bmatrix}_{(B_0)}$.

$$\vec{M}_B(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_C(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 + (\vec{BC} \wedge \vec{R}(3 \rightarrow 1)) \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_B(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = 0 + (L_1 \cdot \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(3 \rightarrow 1)) \cdot \vec{z}_0$$

On reprend alors $\vec{x}_1 = \cos(\theta_1) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_1) \cdot \vec{y}_0$, ce qui donne :

$$\vec{M}_B(3 \rightarrow 1) \cdot \vec{z}_0 = 0 + \left(L_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_{31} \\ Y_{31} \\ Z_{31} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = L_1 \cdot (\cos \theta_1 \cdot Y_{31} - \sin \theta_1 \cdot X_{31})$$

D'où la relation : $L_1 \cdot (\cos \theta_1 \cdot Y_{31} - \sin \theta_1 \cdot X_{31}) + Cm = 0$ (1)

3) TMS à (3) en D sur \vec{z}_0 : $\vec{M}_D(1 \xrightarrow{L} 3) \cdot \vec{z}_0 + \underbrace{\vec{M}_D(2 \xrightarrow{L} 3) \cdot \vec{z}_0}_{=0 \text{ car pivot parfaite}} + \vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0$

$$\vec{M}_D(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}_C(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 + (\vec{DC} \wedge \vec{R}(1 \rightarrow 3)) \cdot \vec{z}_0 \Rightarrow \vec{M}_D(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0 + (L_2 \cdot \vec{x}_3 \wedge \vec{R}(1 \rightarrow 3)) \cdot \vec{z}_0$$

Or $\vec{x}_3 = \cos(\theta_3) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_3) \cdot \vec{y}_0$

$$\vec{M}_D(1 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0 + \left(L_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -X_{31} \\ -Y_{31} \\ -Z_{31} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -L_2 \cdot (\cos \theta_3 \cdot Y_{31} - \sin \theta_3 \cdot X_{31})$$

$$\vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = \left(\underbrace{\vec{M}_E(Op. \rightarrow 3)}_{\vec{0}} + (\vec{DE} \wedge \vec{R}(Op. \rightarrow 3)) \right) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = (-L_2 \cdot \vec{x}_3 \wedge F \cdot \vec{x}_0) \cdot \vec{z}_0 = (-L_2 \cdot F) (\vec{x}_3 \wedge \vec{x}_0) \cdot \vec{z}_0 = (-L_2 \cdot F) (\vec{x}_0 \wedge \vec{z}_0) \cdot \vec{x}_3$$

$$\vec{M}_D(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = (+L_2 \cdot F) (\vec{y}_0 \cdot \vec{x}_3) = L_2 \cdot F \cdot \sin(\theta_3)$$

D'où la relation : $-L_2 \cdot (\cos \theta_3 \cdot Y_{31} - \sin \theta_3 \cdot X_{31}) + L_2 \cdot F \cdot \sin \theta_3 = 0$

$$\Rightarrow F \cdot \sin \theta_3 + \sin \theta_3 \cdot X_{31} - \cos \theta_3 \cdot Y_{31} = 0$$
 (2)

4) TRS à (3) sur \vec{y}_2 : $\vec{R}(1 \xrightarrow{L} 3) \cdot \vec{y}_2 + \vec{R}(2 \xrightarrow{L} 3) \cdot \vec{y}_2 + \vec{R}(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = 0$

Or on a $\vec{R}(2 \xrightarrow{L} 3) \cdot \vec{y}_2 = 0$ d'après l'isolement de 2

$$\vec{R}(1 \xrightarrow{L} 3) \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -X_{31} \\ -Y_{31} \\ -Z_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} = X_{31} \cdot \sin \theta_2 - Y_{31} \cdot \cos \theta_2$$

$$\vec{R}(Op. \rightarrow 3) \cdot \vec{y}_2 = F \cdot \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_2 = F \cdot (\vec{x}_0 \cdot \vec{y}_2) = -F \cdot \sin \theta_2$$

D'où la relation : $-F \cdot \sin \theta_2 + \sin \theta_2 \cdot X_{31} - \cos \theta_2 \cdot Y_{31} = 0$ (3)

Résolution :

(2)* $\sin \theta_2$ - (3)* $\sin \theta_3 \Rightarrow F = \text{fonc}(Y_{31})$, on injecte ce résultat dans 2 pour avoir $F = \text{fonc}(Y_{31})$ et on finit en remplaçant dans (1).