

Problème N°1 : imagerie interventionnelle (extrait Ccp mp 2017)

1. PRESENTATION

1.1 Mise en situation

Développé dans le cadre d'un projet ambitieux associant des industriels (GE Healthcare, BA Systèmes et C&K), deux laboratoires de recherche (CEA-LIST et IRCCYN) et un centre de recherche préclinique (laboratoire CR2i INRA AP-HP), le Discovery IGS 730 (figure 1) est le premier système mobile d'imagerie interventionnelle. Embarquant un ensemble de logiciels de traitement d'images pour les applications vasculaires, l'oncologie et la cardiologie (figure 2) et permettant un accès complet au patient, il guide les gestes de l'équipe médicale tout au long de l'intervention chirurgicale.

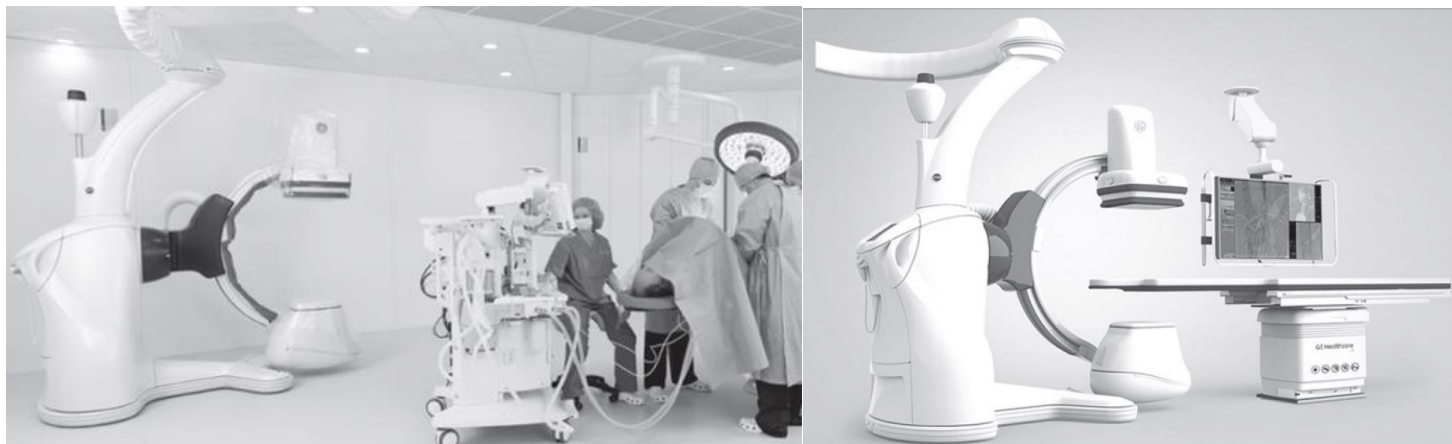
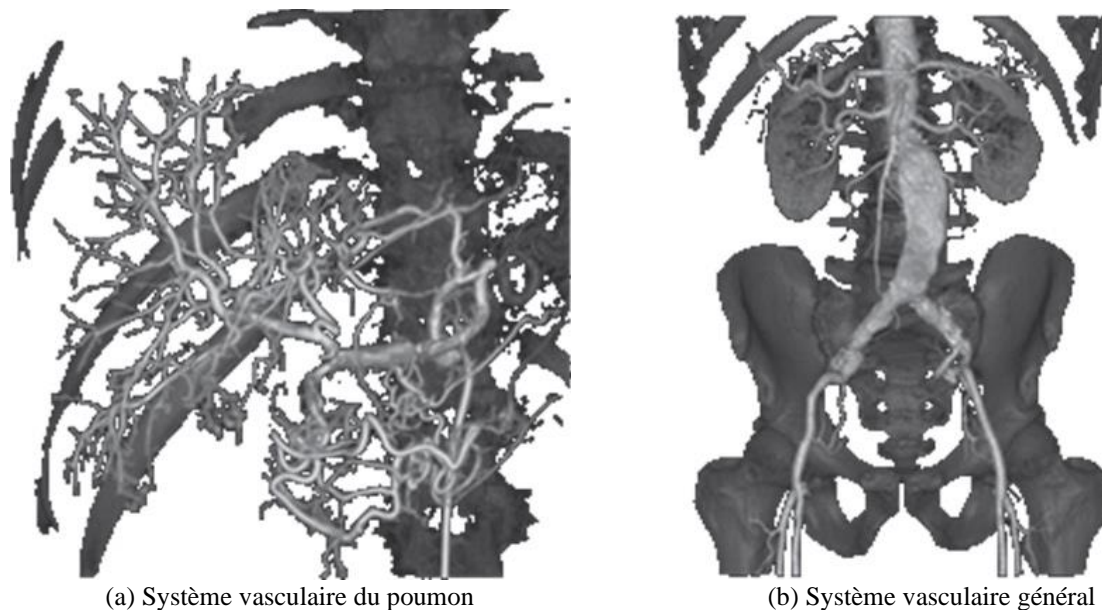


Figure 1 – Système d'imagerie robotisé Discovery IGS 730 en situation de travail (photo de gauche) et en mode parking (photo de droite)



(a) Système vasculaire du poumon

(b) Système vasculaire général

Figure 2 – Images 3D obtenues avec le système d'imagerie du Discovery IGS 730

Le Discovery IGS 730 révolutionne le domaine de l'imagerie interventionnelle. Contrairement aux systèmes d'angiographie traditionnels, il n'est ni fixé au sol, ni suspendu au plafond, mais dispose d'une base motorisée guidée par laser qui transporte l'arceau d'imagerie. Cette innovation technologique offre une mobilité totale au système qui peut, par exemple, rejoindre de manière autonome une position « parking » prédéfinie afin de laisser tout le champ disponible à l'équipe médicale pour s'occuper du patient. Ce gain de mobilité permet également une intégration aisée en milieu clinique, un accès facilité au patient et des possibilités de positionnement illimitées.

1.2 Analyse système partielle

La figure 3 présente un extrait du cahier des charges du système d'imagerie dans la phase de vie d'utilisation. La figure 4 présente son diagramme de définition des blocs.

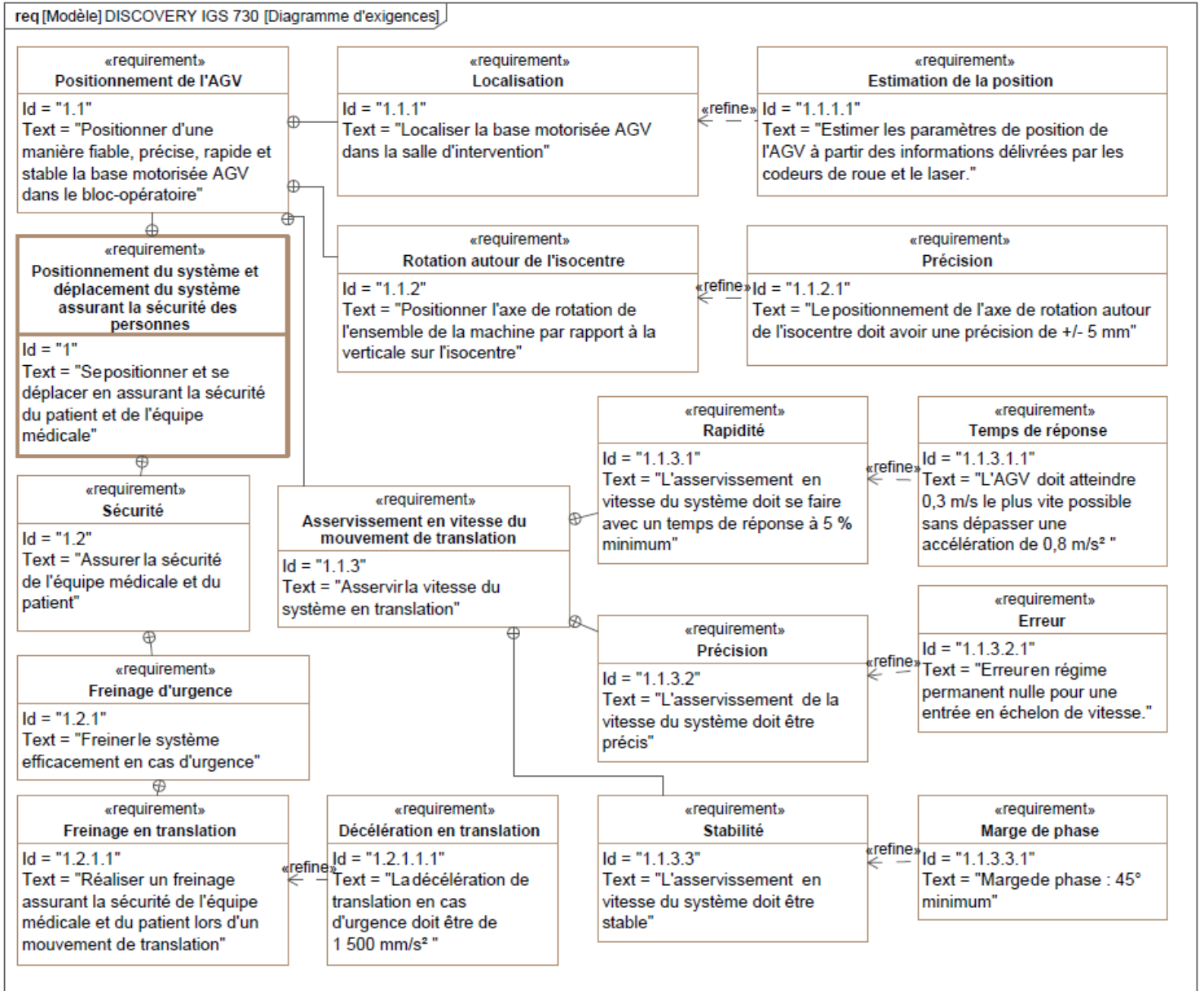


Figure 3 – Diagramme d'exigences partiel du Discovery IGS 730

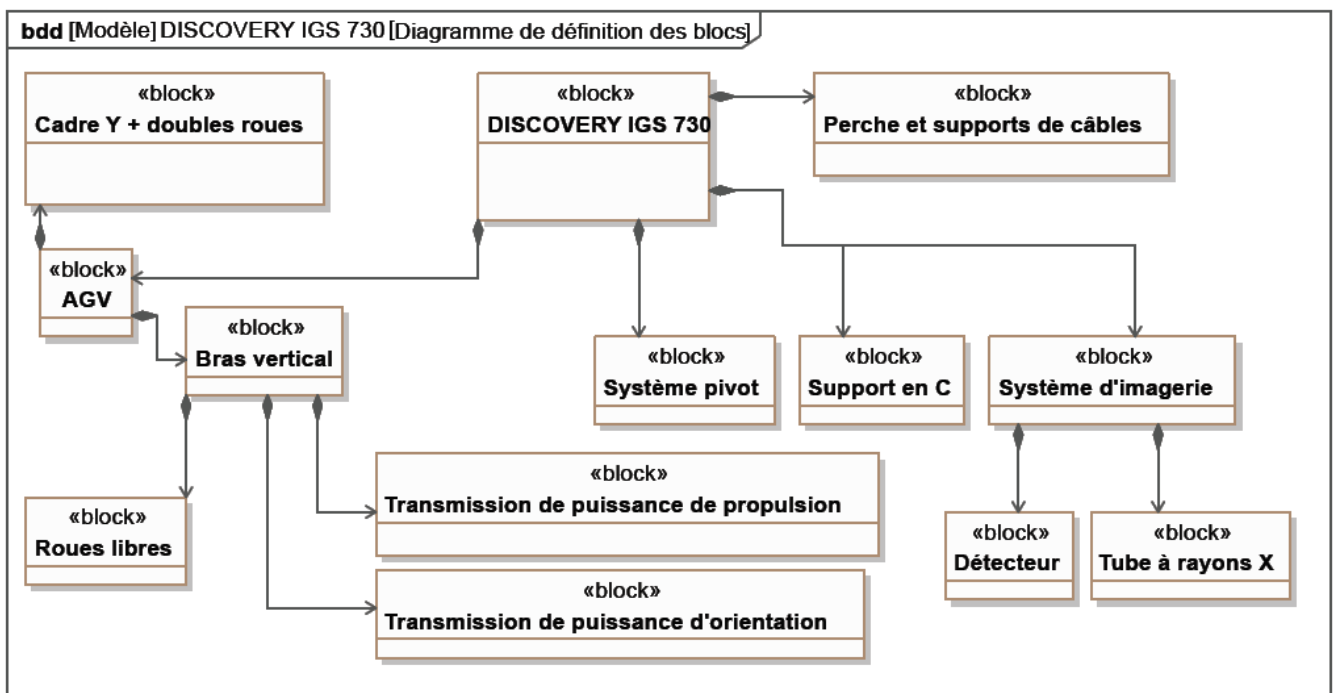


Figure 4 – Diagramme de définition de blocs du Discovery IGS 730

Le système Discovery IGS 730 est constitué principalement (figure 4 et figure 5) :

- d'une base motorisée, aussi appelée AGV (pour Automated Guided Vehicle, soit véhicule à guidage automatique) ;
- d'une perche et d'un support de câbles ;
- du sous-système d'imagerie supporté par un bras en « C » ou arceau. Le système d'imagerie est lié à la base motorisée par l'intermédiaire de deux liaisons pivot. Un point caractéristique appelé « isocentre » (point I_C) est rattaché au sous-système d'imagerie. Il est défini comme l'intersection de l'axe optique et de l'axe de la liaison pivot AGV/système pivot.

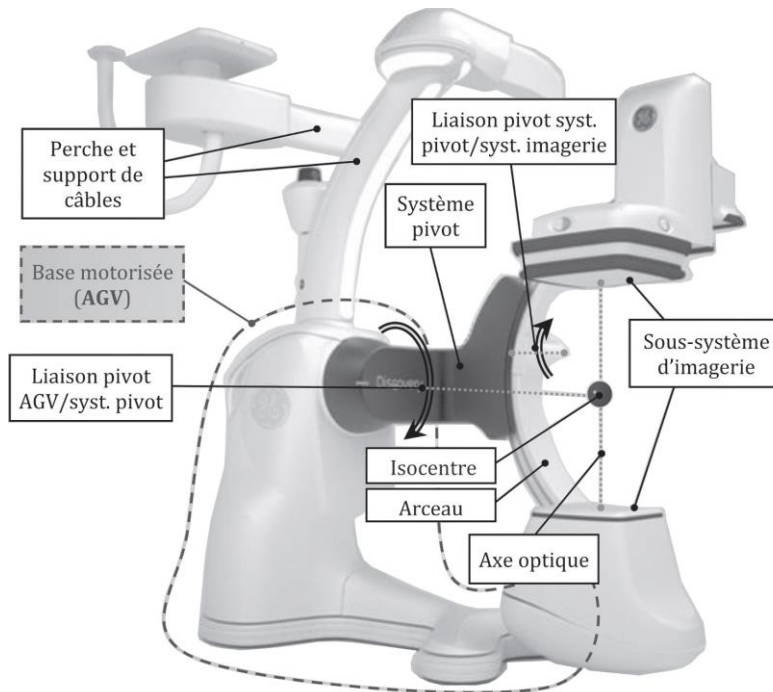


Figure 5 – Composants du Discovery IGS 730

La base motorisée AGV (figure 6) est constituée :

- d'une structure support, ou châssis, composée du bras vertical et du cadre Y ;
- de deux sous-ensembles roue motrice et motorisation associée (un motoréducteur d'orientation et un motoréducteur de propulsion pour chaque roue) ;
- de deux doubles roues « folles » non motorisées.

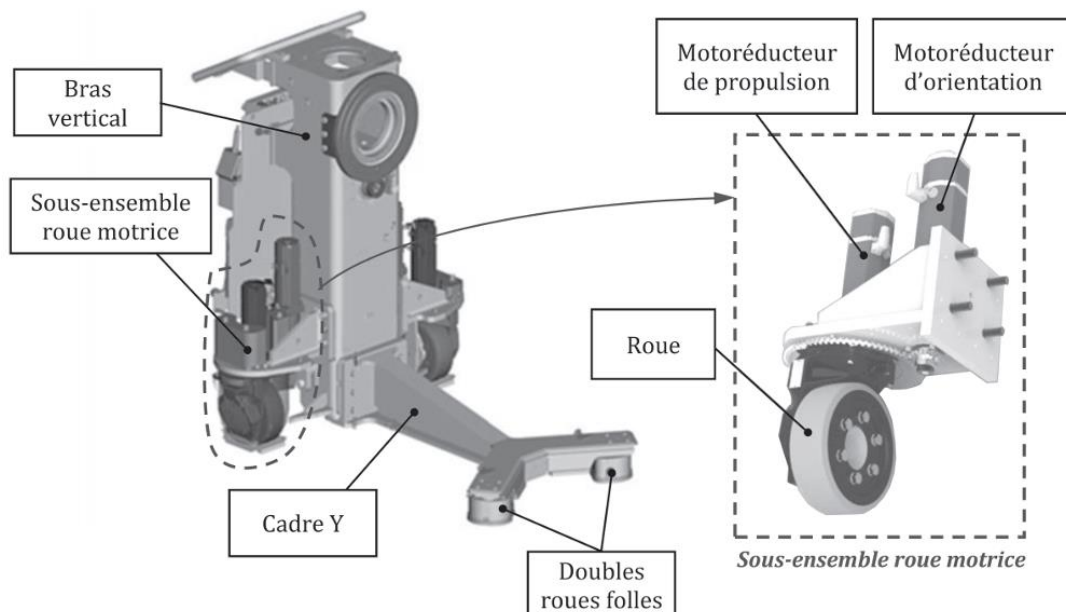


Figure 6 – Éléments du sous-système AGV, carter et sous-système d'imagerie enlevés

1.3 Problème posé

La mobilité totale apportée au Discovery IGS 730, véritable innovation technologique dans le domaine de l'imagerie interventionnelle, a conduit les ingénieurs responsables du développement à travailler sur des problématiques spécifiques liées :

- à la maîtrise du positionnement du sous-système d'imagerie par rapport au patient ;
- à la sécurité du patient et de l'équipe médicale au cours des déplacements du système dans la salle d'intervention.

Objectif : L'objectif de cette étude est de vérifier certaines performances du système afin de valider partiellement le respect des exigences liées au positionnement de l'AGV et par suite, du sous-système d'imagerie (Id. 1.1) et à la sécurité des personnes au cours des déplacements (Id. 1.2).

1.4 Démarche

Le respect des exigences relatives au positionnement du sous-système d'imagerie (Id. 1.1), objet de la partie 2, est abordé à travers les points suivants :

- étude géométrique et cinématique de l'AGV afin d'estimer la précision requise au niveau de l'orientation des roues motrices (Id. 1.1.2) ;
- prévision des performances de la commande associée au mouvement de translation de la base motorisée (Id. 1.1.3) : non traité dans cet extrait ;
- étude de la stratégie de localisation de l'AGV et développement d'algorithmes d'estimation de sa position (Id. 1.1.1) : non traité dans cet extrait.

Le respect des exigences relatives à la sécurité des personnes (Id. 1.2) fait l'objet de la partie 3 consacrée à la prévision du comportement dynamique du système lors d'un freinage d'urgence intervenant au cours d'une manœuvre de translation (Id. 1.2.1.1).

2. Validation des exigences relatives au positionnement du sous-système d'imagerie

2.1. Modélisation géométrique et cinématique de l'AGV

Objectif : Vérifier que l'exigence « Précision de positionnement de l'axe de rotation » (Id. 1.1.2.1) peut être satisfaite.

Au cours d'une intervention médicale ou de certains examens d'imagerie, l'ensemble du système est amené à pivoter autour du patient suivant un axe vertical. Afin de ne pas perturber le processus d'acquisition, la position de l'isocentre I_C par rapport au patient ne doit pas varier durant la manœuvre (figure 5). Il est donc nécessaire de maîtriser, par le biais de l'orientation des roues motrices, le positionnement de l'axe de pivotement du système, afin que celui-ci passe par l'isocentre I_C .

Paramétrage et hypothèses : Le modèle géométrique retenu et le paramétrage associé sont donnés sur la figure 7.

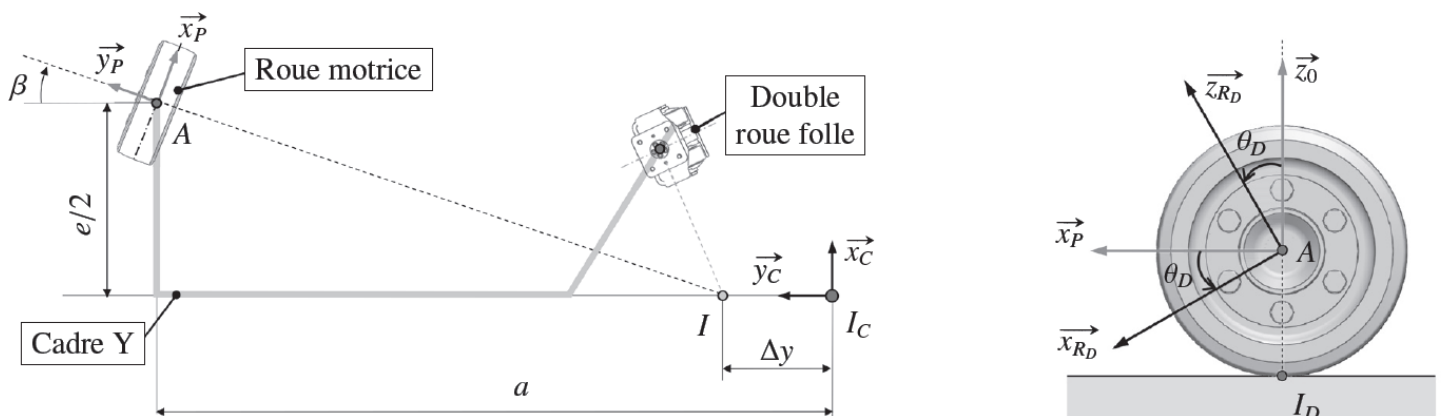


Figure 7 – Modèle retenu pour l'étude géométrique (à gauche, vue du demi-système)

Les repères et angles suivants sont introduits pour l'étude :

- R_0 est un repère attaché à la salle d'intervention. Il a pour origine l'isocentre I_C (supposé fixe dans la salle) et pour base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ tel que le vecteur \vec{z}_0 soit vertical ascendant ;
- $R_C(I_C, \vec{x}_C, \vec{y}_C, \vec{z}_0)$, repère associé au cadre Y, avec $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_C) = (\vec{y}_0, \vec{y}_C)$ l'angle associé à la rotation du cadre Y autour de l'axe vertical (I_C, \vec{z}_0) passant par l'isocentre ;
- $R_P(A, \vec{x}_P, \vec{y}_P, \vec{z}_0)$ repère associé à la liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) de la roue motrice droite avec le cadre Y, avec $\beta = (\vec{x}_C, \vec{x}_P) = (\vec{y}_C, \vec{y}_P)$ l'angle associé à l'orientation de la roue motrice droite (R_D) par rapport au cadre Y ;
- $R_R(A, \vec{x}_{R_D}, \vec{y}_{R_D}, \vec{z}_{R_D})$ repère associé à la roue motrice droite (R_D), avec $\theta_D = (\vec{x}_P, \vec{x}_{R_D}) = (\vec{z}_0, \vec{z}_{R_D})$ l'angle associé à la rotation de la roue motrice droite (R_D) autour de l'axe (A, \vec{y}_{R_D}) .

L'AGV est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe (I, \vec{z}_0) ; sa géométrie est considérée comme symétrique par rapport à l'axe (I, \vec{y}_C) .

Les dimensions utiles ont pour valeurs : $a = 1\,440$ mm, $e = 800$ mm, $r = AI_D = 115$ mm.

Les hypothèses suivantes sont adoptées :

- les contacts roue-sol sont modélisés par des contacts ponctuels (point I_D pour la roue motrice droite) et les roues motrices roulent sans glisser sur le sol,
- les taux de rotation des roues motrices droite $\dot{\theta}_D$ et gauche $\dot{\theta}_G$ sont égaux.

On notera que l'angle β est négatif sur la figure 7.

2.2. Étude du positionnement angulaire des roues motrices

- Q1.** En exploitant la condition de roulement sans glissement au point I_D , déterminer l'expression du vecteur vitesse $\overline{v_{cadre/R_0}}(A)$ dans la base du repère R_P en fonction de $\dot{\theta}_D$ et du rayon de roue r .

La figure 7 montre un décalage Δy entre l'axe de rotation du cadre (I, \vec{z}_0) et l'axe vertical passant par l'isocentre (I_C, \vec{z}_0) . Lorsque l'isocentre I_C est situé sur l'axe de rotation du mouvement du cadre par rapport à R_0 (soit $\Delta y = 0$), la relation suivante est vérifiée : $\overline{I_C A} \cdot \overline{v_{cadre/R_0}}(A) = 0$

- Q2.** En exploitant cette dernière relation, déterminer en fonction des paramètres géométriques utiles, l'expression de l'angle β correspondant. Calculer sa valeur numérique en degrés.

Le constructeur du groupe motoréducteur dédié à l'orientation de la roue motrice garantit une précision angulaire $\Delta\beta = \pm 10^{-3}$ degrés pour l'angle d'orientation β .

- Q3.** En prenant comme référence la configuration pour laquelle l'isocentre I_C est situé sur l'axe de la rotation, déterminer la valeur de Δy associée à une erreur angulaire $\Delta\beta = \pm 10^{-3}$ degrés. Conclure quant au respect de l'exigence (Id. 1.1.2.1).

2.3. Localisation de l'AGV : estimation de la position

Objectif

Mettre en place une stratégie pour répondre à l'exigence « Localiser la base motorisée AGV dans la salle d'intervention » (Id. 1.1.1) et développer les algorithmes de traitement numérique visant à estimer la position de l'AGV.

Les questions d'informatique peuvent être traitées en langage Python ou langage Scilab. Il est demandé au candidat de bien préciser sur sa copie le choix du langage et de rédiger l'ensemble de ses réponses dans ce langage. L'annexe rappelle les principales commandes utiles à la manipulation des vecteurs et matrices. Dans tout le sujet, il sera supposé que les modules et bibliothèques sont déjà importés dans le programme.

Localisation par odométrie

La gestion des déplacements du système au sein de la salle d'intervention (figure 8) nécessite de déterminer la position de la plateforme mobile, repérée par le vecteur position \mathbf{p} , tel que

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$$

où $x(t)$, $y(t)$ et $\theta(t)$ sont les paramètres de position définis dans le repère global $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ associé à la salle d'intervention.

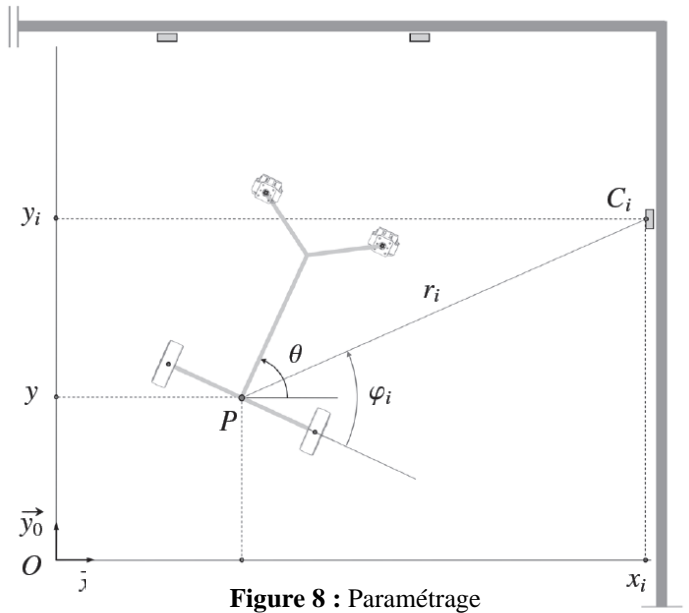


Figure 8 : Paramétrage

Une première stratégie de localisation a conduit à estimer les paramètres de position par *odométrie* : partant d'une position initiale connue, la position est actualisée au cours du mouvement en estimant le déplacement global du système à partir des mesures des déplacements angulaires des roues motrices délivrées par les codeurs de roue. Pour cette étude, l'orientation des roues motrices par rapport à la plateforme mobile suivant \vec{z}_0 est supposée fixée, dans la configuration de la figure 8.

Soient $\Delta\theta_D$ et $\Delta\theta_G$ les déplacements angulaires des roues motrices droite et gauche et $\Delta\mathbf{p}$ le vecteur associé au déplacement global de la plateforme entre les instants t et $(t + \Delta t)$, Δt étant la durée d'une période d'échantillonnage séparant deux mesures. Il est admis ici que les composantes $(\Delta x, \Delta y, \Delta\theta)$ du déplacement global $\Delta\mathbf{p}$ peuvent être estimées à partir de $\Delta\theta_D$ et $\Delta\theta_G$ selon :

$$\begin{cases} \Delta x = r \frac{\Delta\theta_D + \Delta\theta_G}{2} \cos \left(\theta(t) + r \frac{\Delta\theta_D - \Delta\theta_G}{2e} \right) \\ \Delta y = r \frac{\Delta\theta_D + \Delta\theta_G}{2} \sin \left(\theta(t) + r \frac{\Delta\theta_D - \Delta\theta_G}{2e} \right) \\ \Delta\theta = r \frac{\Delta\theta_D - \Delta\theta_G}{e} \end{cases}$$

Où r est le rayon d'une roue motrice et e la distance entre les deux roues motrices.

Le vecteur position à l'instant $(t + \Delta t)$ noté \mathbf{p}' est alors calculé suivant : $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$.

Le traitement numérique repose sur une fonction `position_odometrie(delta_d, delta_g, p0)` qui prend en arguments :

- `delta_d` et `delta_g`, déplacements angulaires des roues droite ($\Delta\theta_D$) et gauche ($\Delta\theta_G$) ;
- `p0`, tableau de dimension 3 associé à la position à l'instant t (vecteur \mathbf{p}).

La fonction renvoie le tableau `p1` de dimension 3 associé à la position à l'instant $(t + \Delta t)$ (vecteur \mathbf{p}'). Les paramètres géométriques r et e sont déclarés comme variables globales dans le programme principal.

Q4. Écrire la fonction `position_odometrie(delta_d, delta_g, p0)` renvoyant le tableau `p1`.

Modèle d'évolution de l'incertitude associée à l'estimation de la position

Une approche statistique permet de modéliser l'évolution de l'incertitude sur l'estimation de la position par odométrie au cours du déplacement de l'AGV. En considérant les estimations x , y et θ comme des variables aléatoires continues et sous certaines hypothèses non détaillées ici, l'incertitude associée à l'estimation de la position \mathbf{p}' peut être quantifiée par un ensemble de paramètres associés aux variables aléatoires telles que la variance et la covariance, constituant la matrice $\Sigma_{\mathbf{p}'}$:

$$\Sigma_{\mathbf{p}'} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\theta} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\theta} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_\theta^2 \end{bmatrix}$$

Pour le calcul de ses termes, celle-ci est décomposée suivant : $\Sigma_{\mathbf{p}'} = \Sigma_1 + \Sigma_2$

où :

- Σ_1 est une matrice associée aux incertitudes sur l'estimation du déplacement $\Delta \mathbf{p}$ entre t et $t + \Delta t$ à partir des mesures codeurs,
- Σ_2 est une matrice associée aux incertitudes sur l'estimation de la position \mathbf{p} à l'instant t , cumulées depuis l'instant initial et qui se propagent à l'instant $t + \Delta t$. Il est admis ici que la matrice Σ_2 est obtenue à partir de la matrice de variance-covariance Σ_p associée à la position \mathbf{p} à l'instant t par la relation :

$$\Sigma_2 = J_p \cdot \Sigma_p \cdot J_p^T$$

la matrice J_p (matrice jacobienne) ayant pour expression :

$$J_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -r \frac{\Delta\theta_D + \Delta\theta_G}{2} \sin\left(\theta(t) + r \frac{\Delta\theta_D - \Delta\theta_G}{2e}\right) \\ 0 & 1 & r \frac{\Delta\theta_D + \Delta\theta_G}{2} \cos\left(\theta(t) + r \frac{\Delta\theta_D - \Delta\theta_G}{2e}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Q5.** En utilisant les commandes documentées en annexe, écrire une fonction `calcul_sigma_2(mat_sigmap,mat_jacob)` qui prend en arguments le tableau `mat_sigmap` de dimensions 3×3 associé à la matrice de variance-covariance Σ_p de la position \mathbf{p} à l'instant t , le tableau `mat_jacob` de dimensions 3×3 associé à la matrice jacobienne J_p et renvoie la matrice `mat_sigma2` (Σ_2).

Localisation du système par fusion de données

En pratique, avec une approche basée uniquement sur l'odométrie, l'incertitude associée à l'estimation de position ne fait que croître au cours du déplacement. Une telle approche se révèle donc inadaptée pour satisfaire l'exigence de précision associée à la localisation du système. Une solution classique en robotique mobile consiste à réaliser une estimation de la position à partir de la *fusion* de mesures obtenues par des capteurs indépendants :

- des capteurs proprioceptifs, qui ont une perception locale du déplacement de la plateforme, les codeurs de roues ici ;
- des capteurs extéroceptifs, qui ont une perception globale du déplacement de la plateforme, le capteur laser ici, qui renvoie les positions (r_i, φ_i) de $n \leq 12$ cibles réfléchissantes C_i dans un repère local attaché à la plateforme (figure 9).

La procédure de localisation dont le principe est présenté en figure 9 se compose de 4 étapes décrites ci-après en adoptant un formalisme discret.

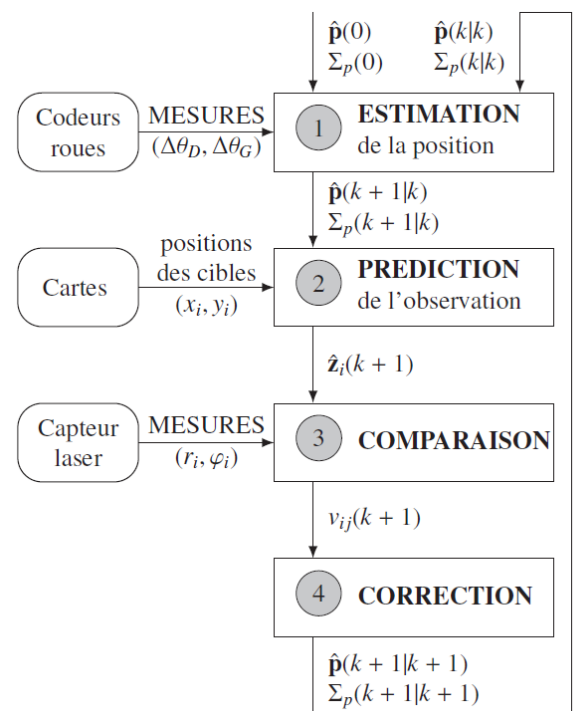


Figure 9 : Principe de localisation

Étape 1 : estimation

Partant d'un rang k associé à un instant t , cette étape consiste à *estimer la position* de la plateforme au rang $k + 1$ (associé à l'instant $t + \Delta t$). L'estimation, notée $\hat{\mathbf{p}}(k + 1|k)$ est calculée à partir de $\hat{\mathbf{p}}(k|k)$, « meilleure » estimation au rang k obtenue à l'issue de l'itération précédente et de l'intégration des variations angulaires des deux roues motrices ($\Delta\theta_G, \Delta\theta_D$) mesurées par les codeurs (odométrie). Cette étape conduit également à la détermination de l'incertitude associée à $\hat{\mathbf{p}}(k + 1|k)$ (représentée par une matrice $\Sigma_{\mathbf{p}}(k + 1|k)$).

Les traitements numériques sont ici similaires à ceux abordés dans la sous-partie 2.3 portant sur la localisation par odométrie (l'unique différence réside sur le fait que l'estimation au rang $k + 1$ fait à présent intervenir la « meilleure » estimation obtenue au rang k).

Étape 2 : prédiction

Cette étape consiste à effectuer une *prédiction de l'observation* associée au laser. Pour chaque cible C_i de coordonnées globales (x_i, y_i) répertoriée par la carte, les coordonnées (r_i, φ_i) dans le repère local attaché à la plateforme, dont la position est celle estimée à l'étape précédente, sont calculées. Un vecteur $\hat{\mathbf{z}}_i(k + 1)$ est ainsi formé pour chaque cible, à partir des coordonnées locales calculées.

- Q6.** *Après avoir explicité les relations de changement de repère, écrire une fonction `global_local(xi,yi,p1)` prenant en arguments les coordonnées globales x_i (x_i), y_i (y_i) d'une cible i , le tableau `p1` de dimension 3 associé à la position estimée (vecteur $\hat{\mathbf{p}}(k + 1|k)$) et renvoyant les coordonnées locales (r_i, φ_i) de la cible i .*

Les coordonnées globales (x_i, y_i) des 12 cibles sont regroupées dans un tableau `cible_map` de dimensions 12×2 .

- Q7.** *Écrire une fonction `prediction(p1,cible_map)` qui prend en arguments le tableau `p1` de dimension 3, associé à la position estimée (vecteur $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k)$), le tableau `cible_map` et renvoie le tableau `zpred` de dimensions 12×2 , contenant les coordonnées locales (r_i, φ_i) des 12 cibles (12 vecteurs $\hat{\mathbf{z}}_i(k + 1)$).*

Étape 3 : comparaison

Cette étape consiste à réaliser une *comparaison* entre la prédiction de l'observation et l'observation effective afin de former le vecteur *innovation* $\mathbf{v}_{ij}(k + 1) = (\mathbf{z}_j(k + 1) - \hat{\mathbf{z}}_i(k + 1))$ qui permettra de déterminer la correction à appliquer.

Dans un premier temps, lorsque le capteur laser détecte une cible C_j donnée (l'indice j est fixé), de coordonnées locales (r_j, φ_j) , il est nécessaire d'établir une correspondance entre la cible C_j détectée et une cible C_{i0} parmi les 12 cibles C_i , dont les positions ont été prédites à l'issue de l'étape 2. Il s'agit, pour une mesure donnée (r_j, φ_j) de rechercher le plus proche voisin dans le tableau `zpred`. Pour cela, un balayage du tableau `zpred` est effectué, au cours duquel est calculée la distance d_{ij} entre la cible C_i et la cible C_j détectée, permettant ainsi d'identifier la cible C_{i0} la plus proche de C_j . Par souci de simplification, la norme euclidienne sera utilisée ici pour le calcul de la distance.

- Q8.** *Montrer que la distance d_{ij} entre les cibles C_i et C_j s'exprime en fonction des coordonnées locales :*

$$d_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\varphi_j - \varphi_i)}$$

La fonction `comparaison(zj,zpred)` associée à cette troisième étape prend en arguments le tableau `zj` de dimension 2, contenant les coordonnées locales (r_j, φ_j) de la cible détectée par le laser, le tableau `zpred` et renvoie le tableau `vij` associé au vecteur innovation $\mathbf{v}_{ij}(k + 1)$.

- Q9.** *Écrire la suite d'instructions de la fonction `comparaison(zj,zpred)` conduisant à identifier dans le tableau `zpred` les coordonnées (r_{pp}, φ_{pp}) de la cible C_{i0} plus proche voisin d'une cible C_j détectée par le laser.*

Dans un second temps, pour chaque correspondance $(i0, j)$ établie entre une prédiction $\hat{\mathbf{z}}_{i0}(k + 1)$ et une observation laser $\mathbf{z}_j(k + 1)$ et seulement lorsque la distance d_{i0j} est inférieure à un seuil d_{max} , le vecteur innovation $\mathbf{v}_{ij}(k + 1) = \mathbf{z}_j(k + 1) - \hat{\mathbf{z}}_{i0}(k + 1)$ est calculé.

Q10. Compléter la fonction comparaison (z_j, z_{pred}) afin d'intégrer la prise en compte du seuil d_{max} , déclaré comme une variable globale d_{max} .

Étape 4 : correction

Cette étape consiste à déterminer une *correction* de l'estimation initiale de position $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k)$ à partir des $\mathbf{v}_{i,j}(k+1)$ permettant le calcul de $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k+1)$, « meilleure » estimation au rang $k+1$. L'incertitude associée à $\hat{\mathbf{p}}(k+1|k+1)$ (représentée par la matrice de covariance $\Sigma_p(k+1|k+1)$) est là aussi quantifiée. Cette dernière étape, qui repose sur la mise en œuvre d'un filtre de Kalman, n'est pas abordée ici.

3. Exigence de sécurité lors d'une procédure de freinage d'urgence

Objectif

Déterminer les valeurs de décélérations maximales en cas d'arrêt d'urgence garantissant la sécurité du patient et du personnel lors d'une manœuvre de translation.

Une procédure de freinage d'urgence est prévue pour immobiliser le système au plus tôt lorsqu'un problème est rencontré au cours de son déplacement. Pour des raisons évidentes de sécurité, le système doit s'arrêter le plus rapidement possible sans toutefois que la décélération n'entraîne le basculement de l'engin ou encore du glissement au niveau des roues motrices.

3.1. Modèle retenu pour l'étude et paramétrage associé

Le problème est supposé plan et se ramène à l'étude du système Σ (voir modèle sur la figure 11) composé des éléments :

- (1) : roue motrice ;
- (2) : roue folle ;
- (3) : cadre et arceau d'imagerie.

Le repère R ayant pour origine le point O et muni de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est attaché à la salle d'intervention (0).

Le référentiel associé est supposé galiléen.

Le système est animé d'un mouvement de translation suivant $+\vec{x}$ (sens 1) tel que $\overline{V_{\Sigma/R}(G)} = u(t)\vec{x}$ avec $u(t) > 0$

Lors de ce mouvement, les roues sont animées d'un mouvement de rotation. L'angle de rotation d'une roue par rapport à R est défini par : $\theta = (\vec{x}, \vec{x}_R) = (\vec{z}, \vec{z}_R)$

Hypothèses

La roue motrice (1) roule sans glisser sur le sol (0) au point I_1 .

La résistance au roulement est négligée.

Caractéristiques géométriques et d'inertie des solides

- ensemble du système Σ : centre d'inertie G tel que $\overline{I_1 G} = x_G \vec{x} + z_G \vec{z}$, avec $x_G = 450 \text{ mm}$, $z_G = 950 \text{ mm}$ et $m_{\Sigma} = 840 \text{ kg}$;
- roue motrice (1) : rayon $r = 115 \text{ mm}$, J représente le moment d'inertie par rapport à l'axe (A, \vec{y})
- empattement du système : $I_1 I_2 = \ell = 1 \text{ m}$.

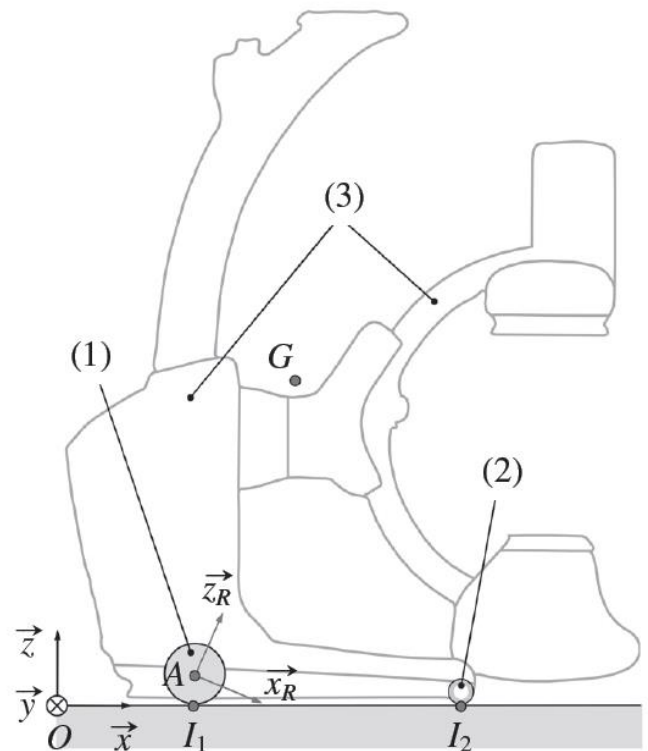


Figure 11 : Modèle plan

Actions mécaniques. Le système Σ est soumis aux actions mécaniques suivantes :

- action du sol sur la roue motrice (1) : $\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 1}} = -X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1}$ et sur le roue folle (2) : $\{T_{0 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{0 \rightarrow 2}} = Z_{02} \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_2}$
- action de la pesanteur : $\{T_{pes \rightarrow \Sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{F_{pes \rightarrow \Sigma}} = -m_{\Sigma} g \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$
- action de freinage sur la roue motrice (1) : $\{T_{frein \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{frein \rightarrow 1}(A)} = -C_f \vec{y} \end{array} \right\}_A$

3.2. Condition de non-basculement

Au cours du freinage, le système subit une décélération $\overrightarrow{\Gamma_{\Sigma/R}(G)} = -\gamma \vec{x} = r \ddot{\theta} \vec{x}$, avec $\ddot{\theta} < 0$. Afin de s'assurer du non-basculement du système, il est nécessaire de déterminer la valeur de décélération limite γ_{NB} pour laquelle apparaît un décollement de la roue motrice.

- Q11.** Par application du théorème de la résultante dynamique à l'ensemble Σ suivant l'axe du mouvement, déterminer l'expression de la composante tangentielle X_{01} appliquée à la roue motrice (1) en fonction de la décélération γ .
- Q12.** Par application du théorème du moment dynamique à la roue motrice (1) suivant l'axe (A, \vec{y}) et en utilisant la relation établie à la question précédente, déterminer l'expression du couple de freinage C_f en fonction de la décélération γ .

Dans la suite, le moment d'inertie J est négligé devant le terme $m_{\Sigma} r^2$ associé à la masse de l'ensemble.

- Q13.** Simplifier alors l'expression établie à la question précédente.
- Q14.** Déterminer l'expression du moment dynamique de l'ensemble Σ par rapport à R au point I_2 .
- Q15.** Par application du théorème du moment dynamique en I_2 , déterminer la relation liant l'accélération γ et la composante normale Z_{01} . En déduire l'expression de la décélération limite $\gamma_{NB,1}$ pour laquelle $Z_{01} = 0$. Réaliser l'application numérique.

3.3. Condition de non-glissement

L'exigence de sécurité conduit également à prévenir le glissement au niveau des roues motrices. Il est pour cela nécessaire de déterminer la valeur de la décélération limite γ_{NG} correspondant à une perte d'adhérence. Le facteur d'adhérence au niveau du contact roue motrice/sol (assimilé ici au facteur de frottement) est noté μ .

- Q16.** En se plaçant à la limite du glissement, déterminer à partir des expressions établies aux questions Q10 et Q14 (avant la simplification $Z_{01} = 0$), l'expression de la décélération limite $\gamma_{NG,1}$. Réaliser l'application numérique pour un facteur d'adhérence $\mu = 0,5$.

3.4. Synthèse

Une étude similaire à celle qui vient d'être menée conduit dans le cas d'une translation suivant $-\vec{x}$ (sens 2) aux valeurs limites : $\gamma_{NB,2} = 4,5 \text{ms}^{-2}$ et $\gamma_{NG,2} = 5,5 \text{m s}^{-2}$.

- Q17.** En réalisant la synthèse de l'ensemble de ces résultats, conclure sur la valeur de décélération limite à retenir pour satisfaire l'exigence de sécurité lors d'un mouvement de translation du système.

Annexe

Annexe : rappels des syntaxes en Python et Scilab

Remarque : sous Python, l'import du module numpy permet de réaliser des opérations pratiques sur les tableaux : `from numpy import *`. Les indices de ces tableaux commencent à 0.

Remarque : sous Scilab, les indices des tableaux commencent à 1.

	Python	Scilab
tableau à une dimension	<code>L=[1, 2, 3]</code> (liste) <code>v=array([1, 2, 3])</code> (vecteur)	<code>v=[1, 2, 3]</code> ou <code>[1 2 3]</code>
accéder à un élément	<code>v[0]</code> renvoie 1	<code>v(1)</code> renvoie 1
ajouter un élément	<code>L.append(5)</code> uniquement sur les listes	<code>v(\$+1) = 5</code>
tableau à deux dimensions (matrice)	<code>M=array([[1, 2, 3], [3, 4, 5]])</code>	<code>M=[1, 2, 3; 3, 4, 5]</code>
accéder à un élément	<code>M[1, 2]</code> ou <code>M[1][2]</code> renvoie 5	<code>M(2, 3)</code> renvoie 5
produit matriciel ($A \times B$) de deux matrices A et B	<code>dot(A, B)</code>	<code>A*B</code>
transposée d'une matrice M	<code>transpose(M)</code>	<code>M'</code>
extraire une portion de tableau (2 premières colonnes)	<code>M[:, 0:2]</code>	<code>M(:, 1:2)</code>
tableau de 0 (2 lignes, 3 colonnes)	<code>zeros((2, 3))</code>	<code>zeros(2, 3)</code>
séquence équirépartie quelconque de 0 à 10.1 (exclus) par pas de 0.1	<code>arange(0, 10.1, 0.1)</code>	<code>[0:0.1:10]</code>

Problème N°2 : Réplique de la mission Insight (extrait Ccinp mp 2019)

L'étude proposée porte sur la réplique terrestre du système InSIGHT (**I**nterior exploration using **S**eismic **I**vestigations, **G**eodesy and **H**eat **T**ransport), projet du CNES (Centre National d'Études Spatiales) qui a pour but de déployer une station d'étude de la structure interne de la planète Mars.

La station de mesures doit effectuer une campagne de mesures de l'activité sismique afin d'établir des informations sur l'épaisseur de la croûte martienne, de ses manteaux et des zones de subduction, voire des impacts des météorites.

Le support technologique de la mission est un atterrisseur similaire à celui de la mission Phoenix qui a été utilisé avec succès en 2007 pour étudier le sol glacé près du pôle nord de Mars.

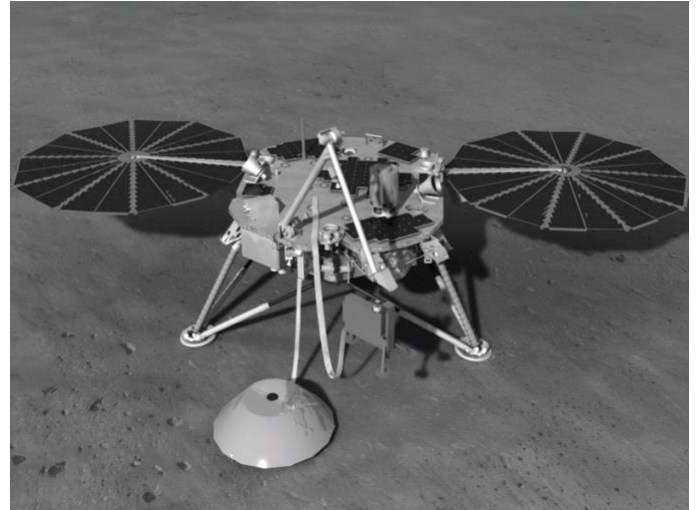


Figure 1 : Atterrisseur du projet Insight

L'atterrisseur InSIGHT (**figure 1**) emportera quatre sous-systèmes d'instrumentation à la surface de Mars afin d'analyser en détail pour la première fois les "statistiques vitales" de la planète :

- son pouls, activité interne, mesuré par l'instrument SEIS ;
- sa température mesurée par l'instrument HP³ ;
- ses réflexes mesurés par l'instrument RISE.

Ensemble, les données fourniront des indices essentiels sur l'évolution, non seulement de la planète Mars, mais aussi de toutes les planètes telluriques.

Sous-systèmes d'instrumentation de l'atterrisseur :

- **SEIS** : sismomètre qui fera des mesures précises des tremblements et autres activités internes de Mars pour mieux comprendre l'histoire et la structure de la planète ;
- **HP³** : cet instrument va s'enfoncer, à cinq mètres de profondeur sous la surface de Mars, pour connaître la quantité de chaleur venant de l'intérieur de Mars et pour révéler l'histoire thermique de la planète ;
- **RISE** : il s'agit d'une expérience qui mesurera avec précision le décalage Doppler et le parcours des communications radio entre l'atterrisseur InSIGHT et la Terre pour déterminer la distribution des structures internes de la planète rouge ;
- **Camera** : montée sur le bras de l'atterrisseur, elle servira à prendre des images en noir et blanc des instruments sur le corps de l'atterrisseur ainsi qu'une vue en 3D pour aider les ingénieurs et les scientifiques à guider le déploiement des instruments au sol.

Seul le sous-système SEIS (figure 2) sera l'objet de l'étude proposée. Il est basé sur un instrument hybride composé :

- d'un système de déploiement (DPL) ;
- d'une sphère comportant trois capteurs sismiques à très larges bandes et leurs capteurs de température. La sphère dispose d'un système de référencement de ses pieds (**figure 3**). Sa masse est d'environ 3 kg et sa consommation électrique varie autour de 1W.
- d'une boîte électronique d'acquisition dont la structure est donnée par le diagramme de définition des blocs de la **figure 4**.

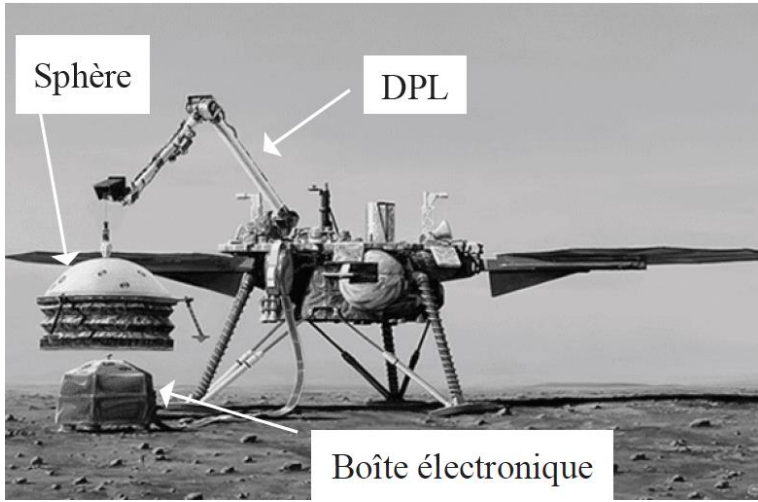


Figure 2 : Ensemble SEIS en phase de déploiement

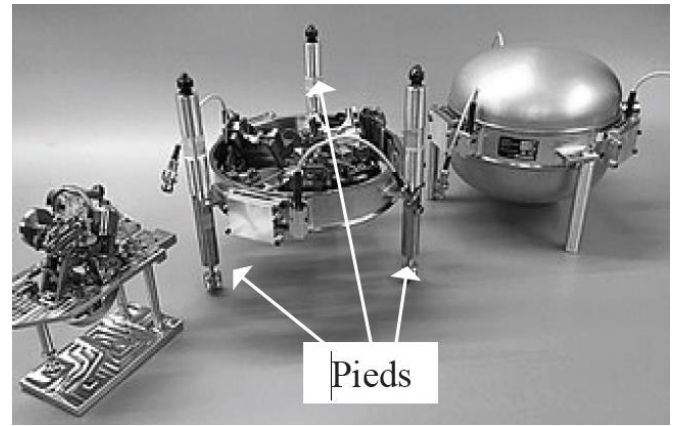


Figure 3 : Sphère SEIS

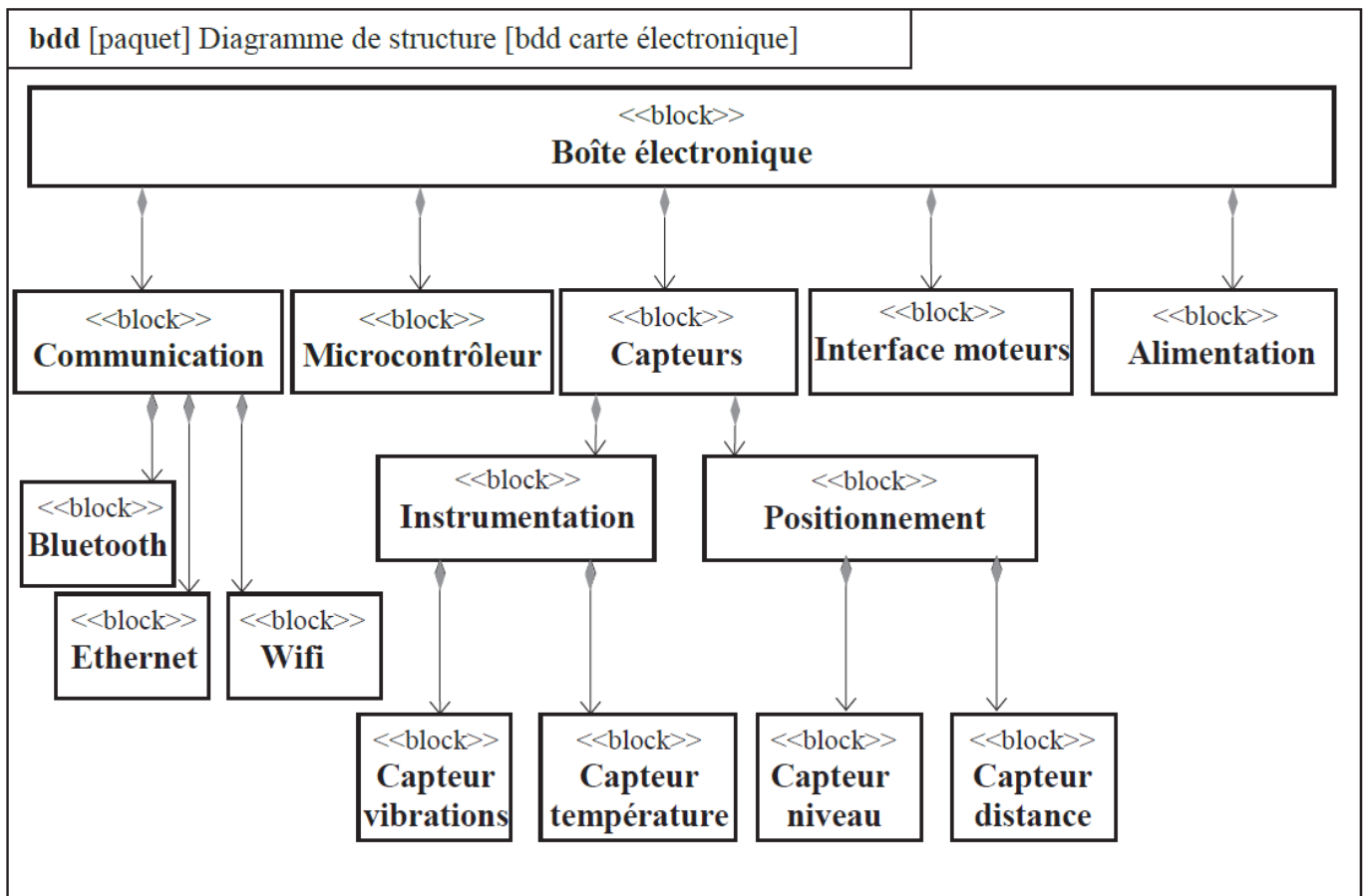


Figure 4 : Diagramme de définition des blocs

La **figure 5** présente le diagramme des cas d'utilisation du système de positionnement DPL et du module SEIS et la **figure 6** le diagramme partiel des exigences concernant le système de déploiement DPL et le module SEIS.

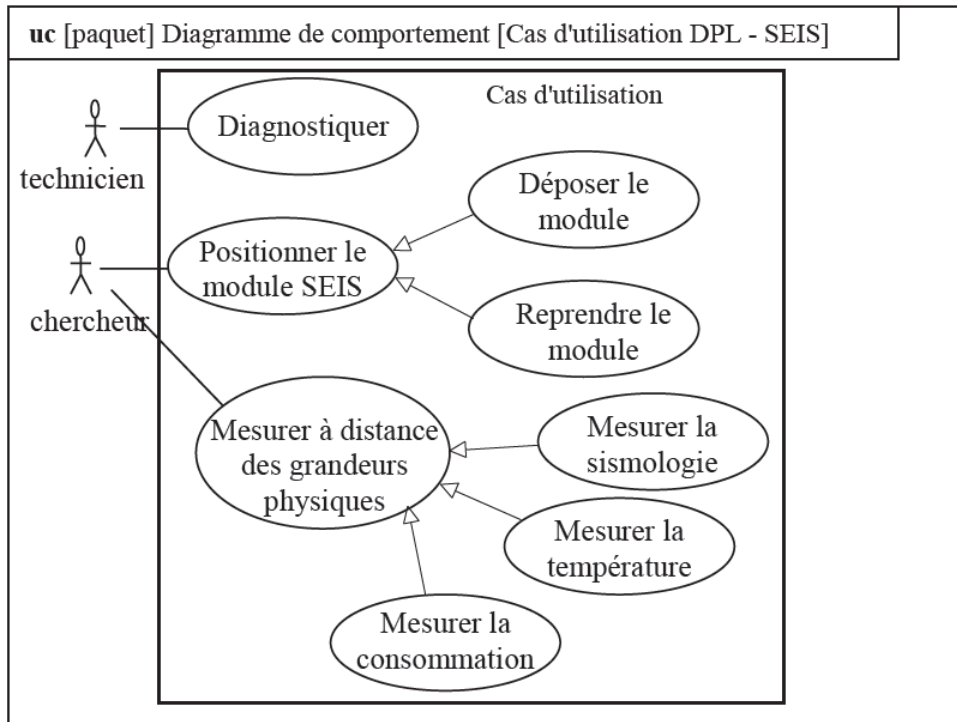


Figure 5 : Diagramme des cas d'utilisation

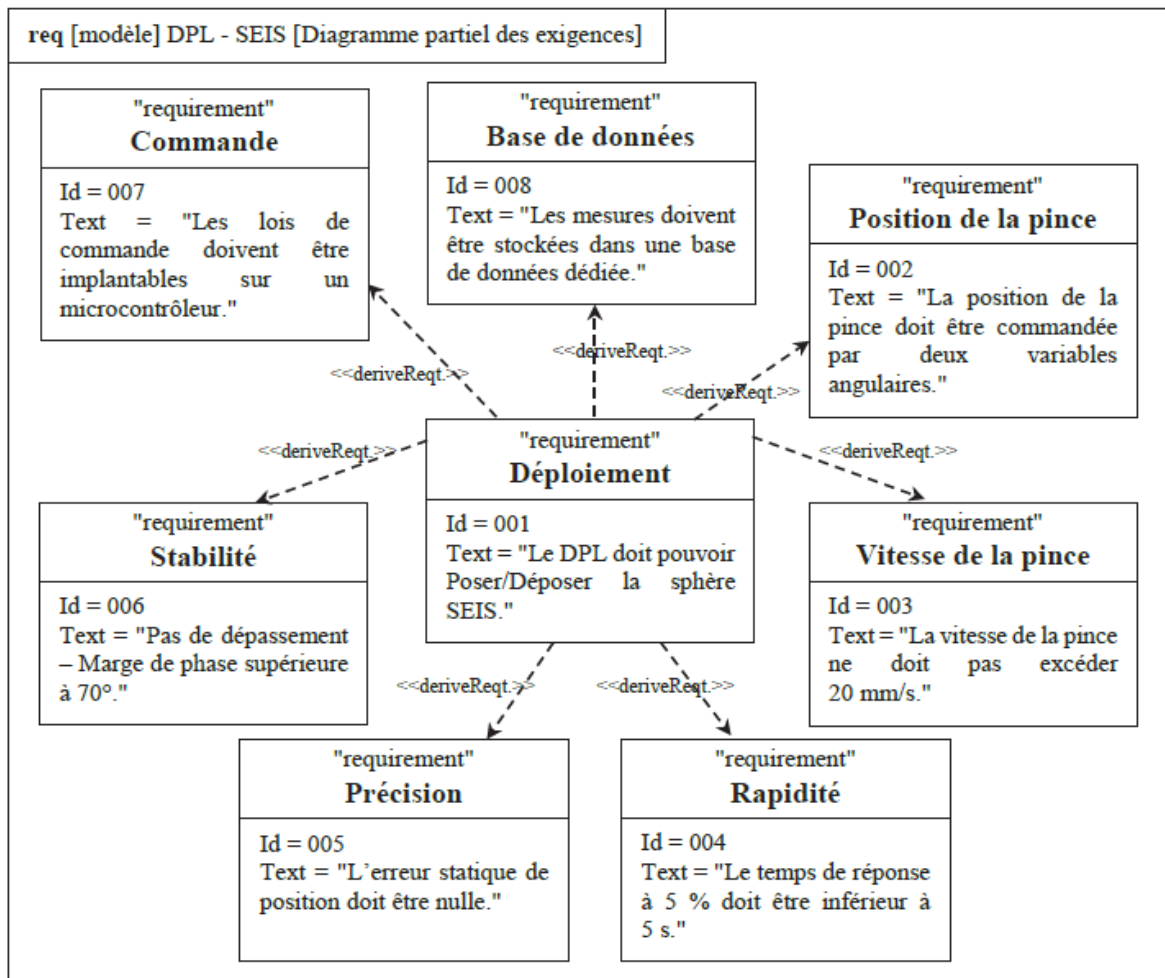


Figure 6 : Diagramme partiel des exigences

La figure 7 représente la structure du système de déploiement DPL.

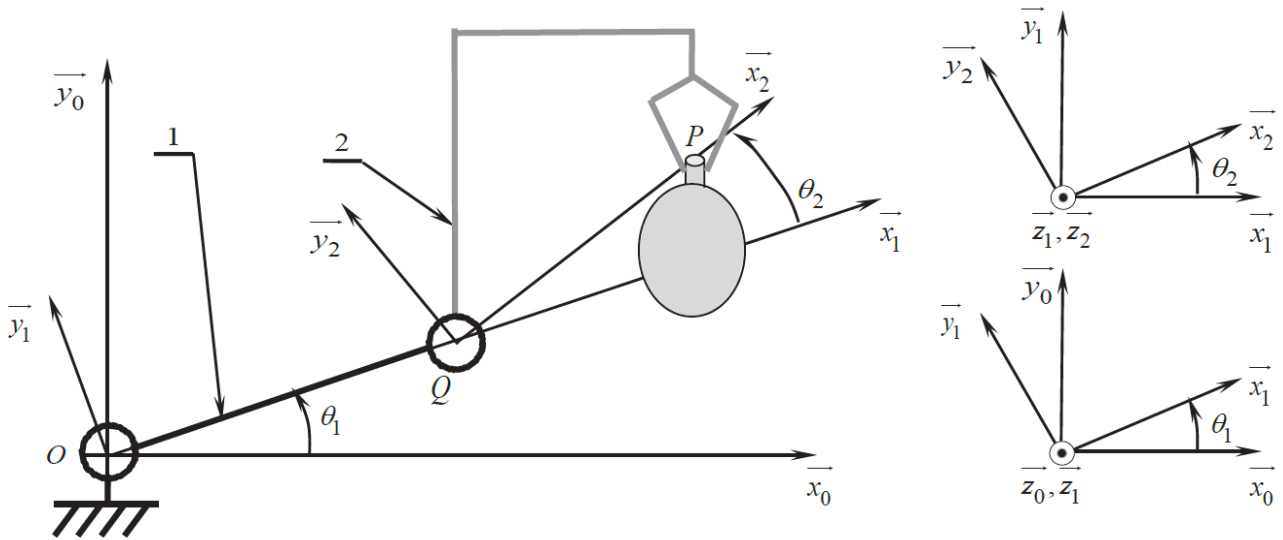


Figure 7 : Modélisation cinématique du bras de déploiement

Le bras de déploiement est constitué de :

0 : Bâti.

- Le repère $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est liée au bâti fixe 0.

1 : Bras

- Le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- Mouvement (1/0) : rotation autour de (O, \vec{z}_0) .
- Position (1/0) repérée par : $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = \theta_1$.
- Centre d'inertie G_1 tel que $\vec{OG}_1 = \frac{L}{2} \vec{x}_1$; $\vec{OQ} = L \vec{x}_1$;
- Masse $m_1 = 352 \text{ g}$; $L = 0,5 \text{ m}$

La **Figure** présente le modèle volumique du Bras 1.

Les plans $(\vec{x}_1, G_1, \vec{y}_1)$ et $(\vec{y}_1, G_1, \vec{z}_1)$ sont des plans de symétrie matériels du bras 1.

- Le mouvement de 1 par rapport à 0 est commandé par un actionneur M_{01} (constitué d'un moteur pas à pas et d'un réducteur de vitesse à couronne dentée flexible de rapport de transmission $\lambda = 82$), d'encombrement et de masse très faibles en regard des autres solides, logé à l'intérieur de la liaison (0/1).

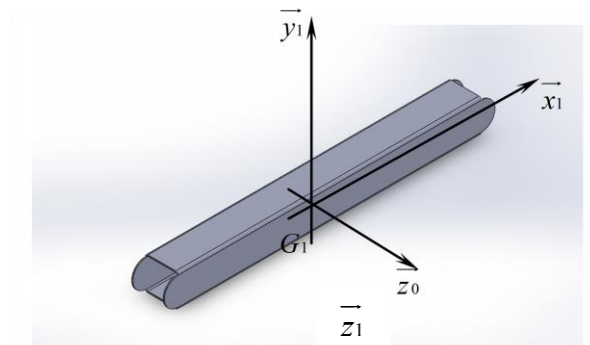


Figure 8 : Bras 1

2 : Avant-bras

- Repère liée $R_2(Q, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
- Mouvement (2/1) : rotation autour de (Q, \vec{z}_1) .
- Position (2/1) repérée par $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \theta_2$.
- Masse $m_2 = 352 \text{ g}$.
- Centre d'inertie G_2 tel que $\vec{QG}_2 = \frac{L}{2} \vec{x}_2$ ($L = 0,5 \text{ m}$) ; $\vec{QP} = L \vec{x}_2$.
- L'extrémité en P est équipée d'une pince de masse négligeable qui saisit la sphère SEIS.
- On note K_{02} le moment d'inertie de l'avant-bras 2 par rapport à l'axe (O, \vec{z}_0) dans la position la plus défavorable ($\theta_1 = \theta_2 = 0$).
- Le mouvement de 2 par rapport à 1 est commandé par un actionneur M_{12} (constitué d'un moteur pas à pas et d'un réducteur de vitesse à couronne dentée flexible de rapport de transmission $\lambda = 82$), d'encombrement et de masse très faibles en regard des autres solides, logé à l'intérieur de la liaison (1/2).

S : Sphère du SEIS.

- On considère que l'amplitude du mouvement (S/2) est très faible.
- Position (S/0) repérée par : $\overline{OP} = X_p(t)\overline{x_0} + Y_p(t)\overline{y_0}$.
- Masse $m_s = 1,2 \text{ kg}$ considérée comme ponctuelle en son centre d'inertie G_s tel que $\overline{PG_s} = -R\overline{y_0}$ (R est une constante positive).
- On note K_{Os} le moment d'inertie de la sphère S par rapport à l'axe $(O, \overline{z_0})$ dans la position la plus défavorable ($\theta_1 = \theta_2 = 0$).

Partie I - Validation des capacités de positionnement du système de déploiement

Objectif : vérifier l'exigence 002 « Position de la pince » afin que le point de préhension P du système de déploiement DPL puisse être défini à partir de deux coordonnées articulaires.

- Q1.** Donner la relation vectorielle traduisant la fermeture géométrique entre les points O, P et Q.
- Q2.** Projeter la relation précédente selon $\overline{x_0}$ et $\overline{y_0}$ et donner les deux équations scalaires correspondantes.
- Q3.** Exprimer θ_1 et θ_2 en fonction de X_P , Y_P et L . Conclure quant au respect de « l'exigence 002 ».

Partie II – Validation du non-dépassement de la vitesse de la sphère SEIS

Objectif : On souhaite valider « l'exigence 003 » quand la sphère SEIS se déplace en translation afin de conserver toujours la même orientation.

- Q4.** Déterminer l'expression de la vitesse du point P, appartenant à l'avant-bras 2, par rapport à R_0 en fonction de $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ et L .
- Q5.** Déterminer la valeur maximale du taux de rotation $\|\overline{\Omega}_{1/0}\|$ pour que l'avant-bras 2 suive un mouvement de translation circulaire par rapport à R_0 en respectant « l'exigence 003 ».

Partie III - Validation de la capacité statique du système de déploiement

Objectif : On souhaite déterminer le couple statique du moto-réducteur M_{01} qui permet l'équilibre du système de déploiement.

Notation et spécifications : $\vec{g} = -g\overline{y_0}$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$, est l'accélération du champ de pesanteur Terrestre.

- Q6.** Exprimer puis calculer le couple statique, noté C_{01} , que doit exercer le moto-réducteur M_{01} dans la position du système de déploiement la plus défavorable. Préciser clairement le système isolé ainsi que le principe/théorème utilisé.
- Q7.** En déduire la valeur minimale du couple de maintien, noté C_{m1min} , dont doit disposer le moteur pas à pas.

Partie IV - Validation des capacités dynamiques du système de déploiement

Objectif : déterminer le couple du moto-réducteur M_{01} qui permet la manipulation de la sphère SEIS par le système de déploiement.

La **figure 7** présente la schématisation du bras de déploiement, noté $\Sigma = \{1, 2, S\}$.

- Q8.** Justifier que la matrice d'inertie du bras 1, en son centre d'inertie G_1 , est de la forme :

$$J(G_1, 1) = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 \end{bmatrix}_{R_1}$$

- Q9.** Exprimer le moment d'inertie K_{01} du bras 1 au point O suivant $\overline{z_0}$ en fonction des paramètres d'inertie.

Q10. Exprimer le moment d'inertie $K_{O\Sigma}$ de l'ensemble Σ au point O autour de l'axe \vec{z}_0 en fonction des paramètres d'inertie.

On considère, pour la suite, que le moteur M_{02} est à l'arrêt dans la position $\theta_2 = 0$ et que seul le moteur M_{01} est en fonctionnement.

Pour effectuer une modélisation dynamique du système, on va établir l'équation donnant le couple, noté C_{01} , du moteur M_{01} en fonction des paramètres cinétiques du système de déploiement.

L'application du théorème du moment dynamique à l'ensemble Σ en projection sur \vec{z}_0 donne l'équation suivante :

$$\vec{\delta}_{(O,\Sigma/O)} \cdot \vec{z}_0 = \frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_{(O,\Sigma/O)} \cdot \vec{z}_0) - \vec{\sigma}_{(O,\Sigma/O)} \cdot \frac{d\vec{z}_0}{dt} = \vec{M}_{(O,\Sigma \rightarrow \Sigma)} \cdot \vec{z}_0$$

Où $\vec{\delta}_{(O,\Sigma/O)}$ est le moment dynamique de Σ en O , dans son mouvement par rapport au repère fixe (galiléen),
 $\vec{\sigma}_{(O,\Sigma/O)}$ est le moment cinétique de Σ en O , dans son mouvement par rapport au repère fixe (galiléen) et
 $\vec{M}_{(O,\Sigma \rightarrow \Sigma)}$ la somme des moments en O des actions mécaniques extérieures à Σ

Q11. Développer les calculs traduisant cette équation scalaire de la dynamique (justifier bien entendu le bilan des moments en O des actions mécaniques sur Σ). En déduire l'expression de C_{01} .

Q12. Donner l'expression de l'équation précédente limitée au voisinage de la position du système de déploiement la plus défavorable. On supposera les effets dynamiques négligeables (le produit $K_{O\Sigma} \cdot \ddot{\theta}_1$ est négligeable).

Partie V - Validation du positionnement du module SEIS

Objectif : Valider les réglages de la commande des trois actionneurs linéaires associés aux pieds, afin de respecter les exigences liées à leur positionnement. On limitera l'étude à un des trois actionneurs.

La chaîne structurelle de l'actionneur électrique utilisé dans le système est donnée

Figure 9.

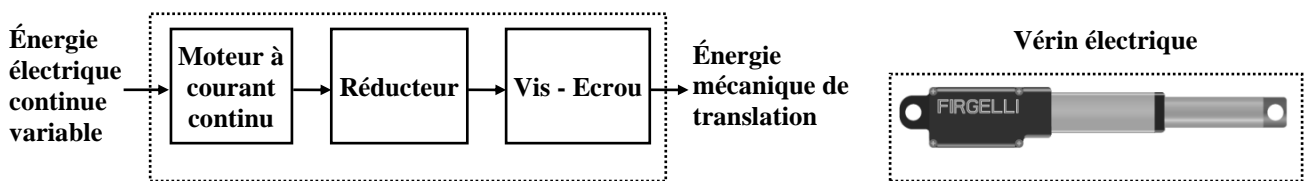


Figure 9 : Chaîne structurelle de l'actionneur électrique linéaire

Chaque actionneur électrique, appelé aussi vérin électrique, est asservi en position.

Notation et spécifications :

- Masse à déplacer pour chaque vérin : $M = 1 \text{ kg}$
- Pesanteur de la Terre : $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Rapport de réduction du réducteur : $r = 0,01$
- Rendement du réducteur : $\eta_r = 0,95$
- Pas de la vis du système vis-écrou : $p = 12 \text{ mm}$
- Rendement du système vis-écrou : $\eta_v = 0,96$
- Coefficient de frottement visqueux du moteur : $f = 0,002 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} / \text{rd}$
- Moment d'inertie équivalent total ramené sur l'arbre moteur : $J = 0,00004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- Résistance de l'induit de la MCC (Machine à Courant Continu): $R = 1 \Omega$
- Inductance de l'induit de la MCC : $L = 20 \mu\text{H}$

- Constante de couple : $K_c(t) = 0,35 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
- Constante de fcem : $K_e(t) = 0,35 \text{ V} \cdot \text{s} / \text{rd}$
- Tension d'alimentation de l'induit de la MCC : $u(t) [\text{V}]$
- Courant absorbé par l'induit de la MCC : $i(t) [\text{A}]$
- Vitesse de rotation en sortie de la MCC : $\omega(t) [\text{rad} / \text{s}]$
- Position angulaire en sortie de la MCC : $\theta(t) [\text{rad}]$
- Force contre électromotrice de la MCC : $e(t) [\text{V}]$
- Couple moteur de la MCC : $C_m(t) [\text{N} \cdot \text{m}]$
- Couple résistant total ramené sur l'arbre moteur : $C_r(t) [\text{N} \cdot \text{m}]$

Équations du moteur à courant continu :

- Équation électrique : $u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ (1)
- Équations de couplage électro-mécanique : $e(t) = K_e \cdot \omega(t)$ (2) ;
 $C_m(t) = K_c \cdot i(t)$ (3)

Transformée de Laplace :

- On se place dans les conditions d'Heaviside pour l'ensemble de l'étude (conditions initiales nulles).
- La transformée de Laplace d'une variable dans le domaine temporel, par exemple $h(t)$, sera notée en majuscule : $L[h(t)] = H(p)$

On s'intéresse dans un premier temps à la modélisation des différents constituants du vérin électrique (Figure 9).

V.1.Détermination du couple résistant appliqué à l'arbre moteur (système vis-écrou)

Une représentation du système vis-écrou et de la charge est donnée figure 10.

Notation et hypothèses :

- Le poids \vec{P} dû à la masse du SEIS s'applique sur l'écrou
- la masse du système vis-écrou est négligeable devant les autres masses
- \vec{F} représente l'effort développé par le vérin électrique (résultante de l'effort de la vis sur l'écrou).

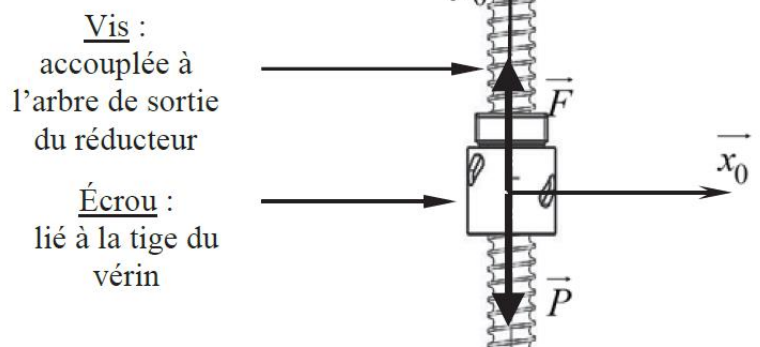


Figure 10 : Système vis-écrou

Q13. Effectuer un bilan des forces exercées sur l'écrou en équilibre statique afin d'obtenir l'expression liant F , la norme du vecteur \vec{F} , et la masse du système à déplacer, M . Préciser clairement le principe/théorème utilisé.

Q14. Justifier l'expression littérale de $C_r(t)$, Couple résistant total ramené sur l'arbre moteur, donnée ci-dessous. Calculer la valeur numérique de $C_r(t)$.

$$C_r(t) = \frac{M \cdot g \cdot p \cdot r}{2\pi \cdot \eta_v \cdot \eta_r}$$

V.2 - Modélisation de la motorisation

La structure du schéma bloc obtenue à partir du modèle de connaissance de la MCC est présentée sur le document réponse.

Q15. À partir des équations du moteur à courant continu (équations 1 à 3 page précédente), compléter en partie sous forme littérale le schéma blocs du document réponse modélisant la MCC.

Le Principe fondamental de la dynamique appliqué au rotor du moteur suivant son axe (ou le théorème de l'énergie cinétique) permet d'écrire l'équation de mouvement suivante : $J \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f\omega(t)$

Q16. Finir de compléter le schéma bloc sur le document réponse.

On se place dans le cas particulier d'un système non perturbé : d'où $C_r(p) = 0$.

Q17. Donner l'expression, sous sa forme canonique, de la fonction de transfert en boucle

$$\text{fermée } F_{m1}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}.$$

Le document réponse présente les résultats expérimentaux de l'évolution de la vitesse de rotation de la MCC, $\omega(t)$, suite à l'application d'un échelon de 12V de la tension $u(t)$ appliqué aux bornes de la MCC.

$$\text{On pose : } F_{m2}(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{F_0}{1 + T_0 \cdot p}$$

Q18. Justifier le choix d'une fonction de transfert d'ordre 1 pour modéliser le comportement de la MCC à partir des essais expérimentaux. Effectuer les constructions graphiques nécessaires sur le document réponse afin de déterminer la valeur du gain statique, F_0 , et de la constante de temps, T_0 , de $F_{m2}(p)$. Proposer une hypothèse simplificatrice permettant de justifier le passage à l'ordre 1 de $F_{m2}(p)$ de par rapport à $F_{m1}(p)$.

Problème N°3 : Stabilisateur gyroscopique (extraite Mines mp 2022)

1. PRESENTATION

1.1 Mouvement de roulis

Le système étudié est un dispositif de stabilisation gyroscopique pour bateau permettant de neutraliser le mouvement de roulis (voir **Figure 2**). Cette rotation suivant l'axe longitudinal du navire est la première cause du mal de mer. Dans tout le sujet, seul ce mouvement de roulis, rotation autour de l'axe (O, \vec{x}_0) , sera considéré. Si l'idée d'utiliser un gyroscope pour stabiliser un bateau remonte à plus d'un siècle, sa mise en œuvre n'est que très récente notamment grâce à la société Seakeeper. Les principaux verrous technologiques étaient la capacité à mettre et maintenir en rotation un volant d'inertie à des vitesses très élevées ainsi qu'à développer des moyens de contrôle actif afin de s'adapter à toutes les conditions de houle. La demande concerne en particulier la navigation de plaisance avec une exigence de performance forte lors de la phase de fonctionnement bateau à l'arrêt, ancre descendue.

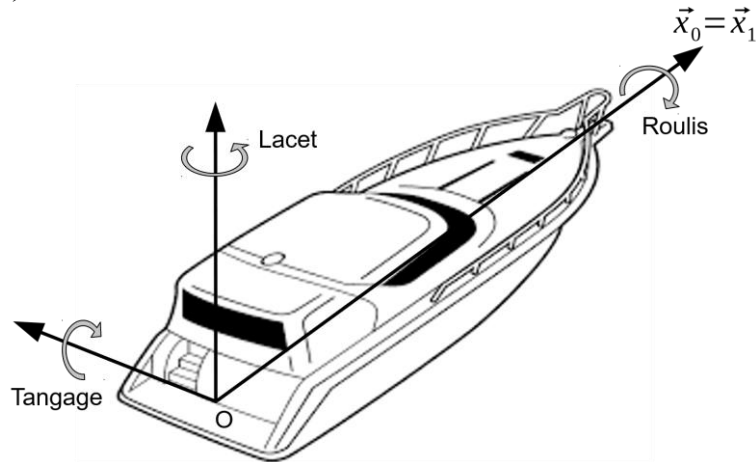


Figure 2 : Définition des 3 rotations orientant le bateau par rapport au référentiel terrestre

1.2 Le stabilisateur gyroscopique

Les stabilisateurs gyroscopiques peuvent être adaptés à tous les types d'embarcation grâce à un encombrement réduit et une masse limitée par rapport aux caractéristiques des navires. Le maintien de leur efficacité est assuré pour une grande variété de positionnement sur le bateau. Ainsi, leur installation peut être envisagée directement lors de la construction du navire aussi bien que par une intégration en cours de cycle de vie de l'embarcation. La **Figure 3** représente l'installation d'un stabilisateur dans le plan de symétrie du bateau $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$, configuration retenue par la suite de l'étude.

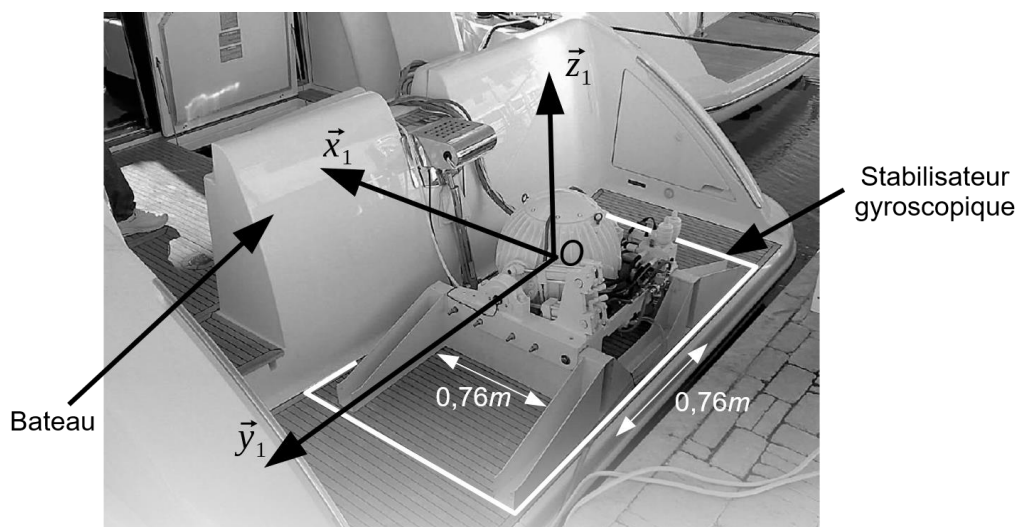


Figure 3 : Stabilisateur gyroscopique monté sur un bateau

Le stabilisateur (voir **Figure 4**) est constitué d'une enceinte **2** en liaison pivot selon l'axe de Cardan (O, \vec{y}_1) par rapport au bateau **1**. Un volant d'inertie **3**, en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_2) par rapport à l'enceinte **2**, est maintenu en rotation grâce à un moteur électrique.

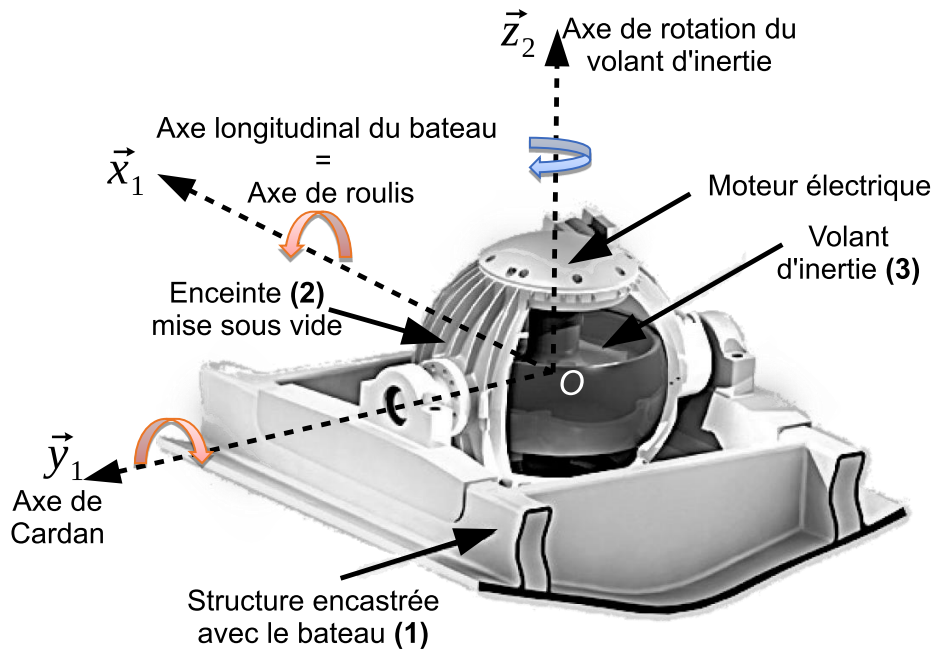


Figure 4 : Structure interne du stabilisateur gyroscopique

Les vitesses angulaires très élevées (de l'ordre de $10000 \text{ tr. min}^{-1}$ au maximum) du volant nécessitent :

- la mise sous vide de l'enceinte 2 afin de limiter les actions mécaniques aérodynamiques qui s'exercent sur le volant d'inertie 3 lors de son mouvement de rotation et ainsi minimiser la consommation électrique ;
- le développement d'une motorisation spécifique avec entraînement direct ;
- un guidage de haute précision (de l'ordre du micromètre) réalisé par des roulements à billes en céramique.

Si la compréhension de la dynamique du stabilisateur nécessite la mise en équation du système, le découpage séquentiel du fonctionnement peut être décrit de la manière suivante :

- l'initiation d'un mouvement de roulis du bateau 1 engendre un basculement de l'ensemble {enceinte 2, volant d'inertie 3} autour de l'axe de Cardan (effet gyroscopique) ;
- la combinaison de la rotation du volant et de celle de l'axe de Cardan génère alors un couple gyroscopique suivant la direction de roulis ;
- ce couple tend à s'opposer au mouvement du bateau 1 et ainsi à lui assurer une stabilisation suivant la direction de roulis ;
- il apparaît ainsi que les mouvements de roulis et de tangage sont couplés. En contrôlant le mouvement de rotation de l'axe de Cardan de façon active par un système hydraulique, les performances de stabilisation de roulis sont optimisées.

Le diagramme des exigences techniques du système Seakeeper est donné sur la Figure 5.

L'objectif des activités proposées dans ce sujet est d'analyser les solutions techniques qui rendent efficace le stabilisateur gyroscopique et notamment quantifier l'atténuation de l'amplitude des oscillations du bateau en roulis comme indiqué sur la Figure 6.

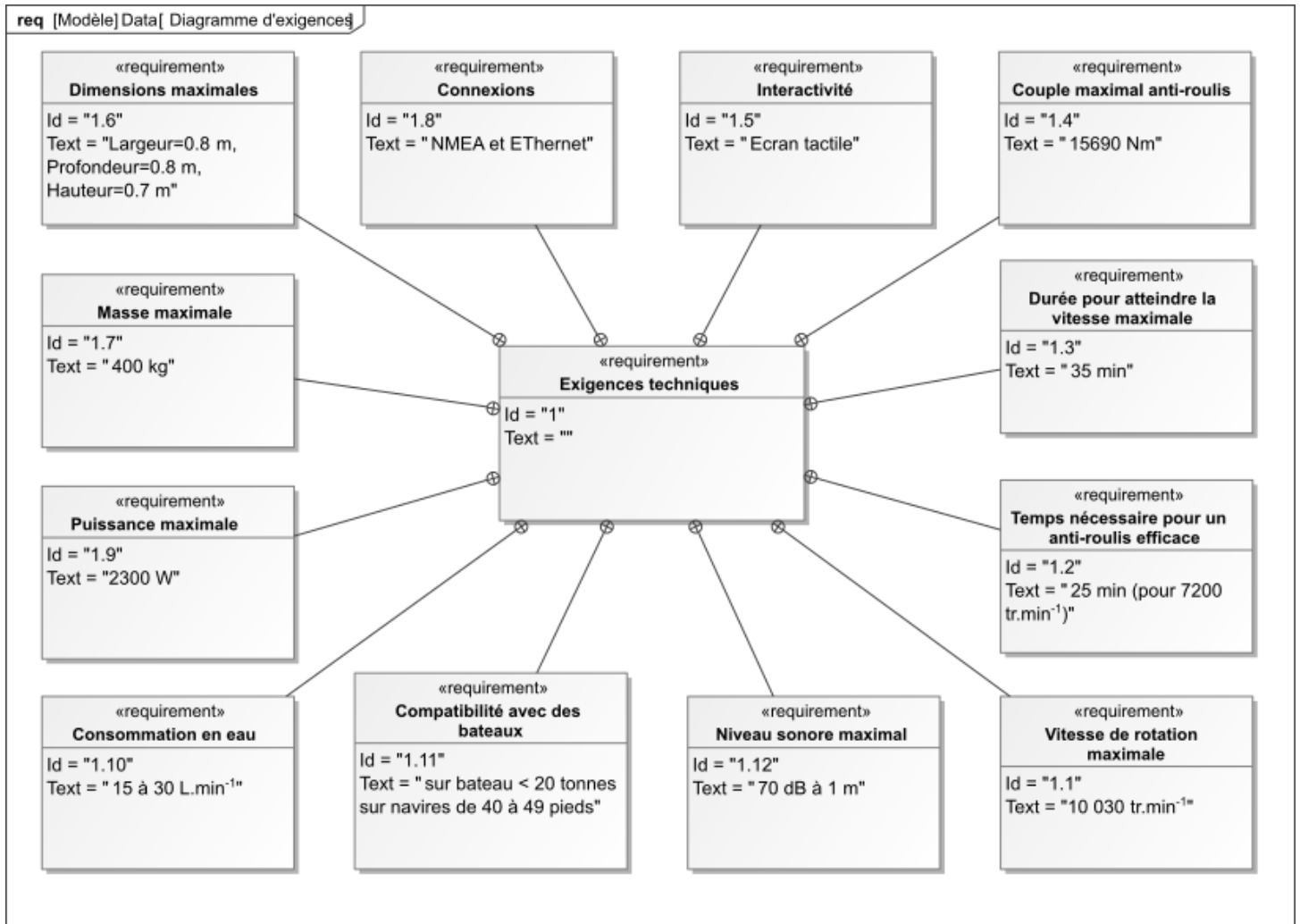


Figure 5 : Diagramme des exigences

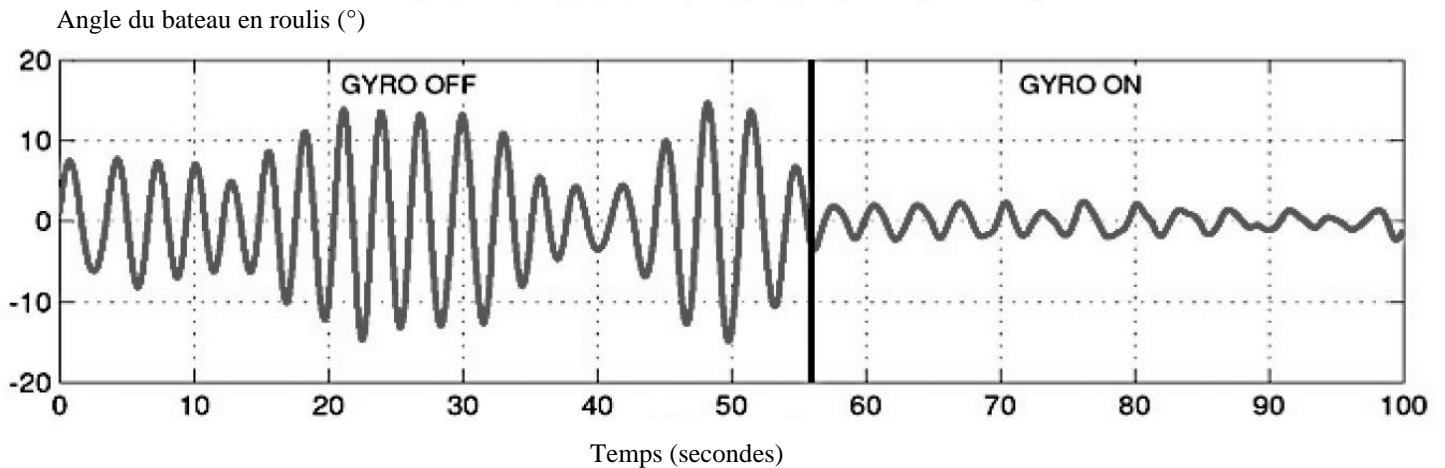


Figure 6 : Mesure des oscillations du bateau en roulis sans, puis avec, stabilisateur gyroscopique

2. GESTION DU SYSTEME

L'objectif de cette partie est d'appréhender les modes de fonctionnement du stabilisateur gyroscopique.

Le Seakeeper est équipé d'un écran tactile permettant de contrôler le fonctionnement du système. Comme nous le verrons dans la suite du sujet, il est nécessaire de mettre en rotation le volant d'inertie **3** et de pouvoir contrôler le système de stabilisation qui ne sera efficace que si la vitesse du volant d'inertie **3** est suffisante. La mise en place de la stabilisation prend du temps et il est indispensable d'informer l'utilisateur de l'état du système.

L'**annexe 1** présente une vue de cet écran en précisant les fonctions de chaque bouton.

L'écran tactile possède un menu d'accueil qui regroupe un certain nombre d'éléments pour gérer le fonctionnement du système. Un autre menu délivre des informations sur le fonctionnement du système par l'intermédiaire des capteurs qui équipent le Seakeeper (capteurs de température, de vitesse angulaire du volant d'inertie ω_m , d'angle de roulis α , de courant électrique...). Le passage du menu d'accueil aux autres menus n'est pas étudié ici.

La zone d'affichage peut être de type *courbe* ou *cadran* pour observer l'évolution de l'angle de roulis. Lorsqu'un bouton est appuyé, il change de couleur (il passe de gris à bleu et inversement).

Le diagramme d'état partiel de l'**annexe 3** caractérise le fonctionnement du système accessible depuis le menu Accueil.

On donne sur le document-réponse une liste d'événements correspondant à l'utilisation de l'écran tactile.

Q1. *En vous aidant du diagramme d'état, compléter le tableau du document-réponse en **entourant** pour chaque situation repérée S1 à S7 ce qui est affiché à l'écran et en précisant la couleur pour les boutons (bleu, gris ou caché si le bouton n'est pas présent). **Entourer** sur le chronogramme les actions sur les boutons qui sont impossibles.*

3. MODELISATION DU SYSTEME DE CONTROLE

La compréhension de l'architecture du stabilisateur gyroscopique et sa mise en équation permet dans cette partie d'aboutir à un modèle de la chaîne d'énergie.

3.1 Architecture du système

La figure de l'**annexe 2** présente l'architecture du régulateur hydraulique.

L'inclinaison suivant l'axe de Cardan du stabilisateur gyroscopique est commandée par un contrôleur électronique et un dispositif hydraulique de manière à optimiser le couple fourni pour diminuer le roulis du bateau.

Ce régulateur hydraulique est constitué d'un servo-distributeur commandé par le contrôleur électronique. Le servo-distributeur module le débit d'alimentation des deux vérins. La translation des vérins est transformée par la structure articulée en une rotation de l'ensemble enceinte **2** et volant d'inertie **3** autour de l'axe de Cardan. Un couple gyroscopique est alors généré sur l'axe de roulis du bateau afin de le stabiliser.

On réalise un asservissement en mesurant l'angle de roulis $\alpha(t)$ du bateau à l'aide d'une centrale inertielle. L'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne d'angle $\alpha_c(t)$ et la mesure de l'angle $\alpha(t)$ est traité par le contrôleur électronique qui délivre le courant de commande $i(t)$ au servo-distributeur.

Q2. *A l'aide du texte descriptif, compléter le tableau du document-réponse associé aux constituants du schéma-blocs fonctionnel de l'asservissement en position du bateau.*

3.2 Modélisation de la chaîne d'énergie

3.2.1 Stabilisateur gyroscopique et bateau

Un schéma cinématique partiel du stabilisateur gyroscopique est fourni **Figure 7**. Il sera enrichi au fur et à mesure de l'étude du sujet. Le paramétrage s'établit de la manière suivante :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, repère supposé galiléen lié à la terre ;
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, repère lié au bateau **1**. La configuration cinématique retenue est un bateau **1** soumis à un unique mouvement de roulis d'axe (O, \vec{x}_0) par rapport à R_0 . Par souci de simplicité, on modélise la liaison entre le bateau et le repère terrestre par une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_0) .

Le torseur cinématique est alors : $\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \frac{d\alpha(t)}{dt} \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ avec $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$,

M_1 la masse du bateau **1** et $[I(O, 1)] = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)}$ la matrice d'inertie du bateau **1** au point

O. Le centre d'inertie du bateau G_1 appartient à l'axe (O, \vec{x}_0) ;

- $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, repère lié à l'enceinte **2**. L'enceinte **2** est en liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1) avec le bateau **1**, paramétrée par $\beta(t) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Les caractéristiques de masse et inertie de **2** sont négligées.

$$\vec{\Omega}_{2/1} = \frac{d\beta(t)}{dt} \vec{y}_1 ;$$

- $R_3(O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$, repère lié au volant d'inertie **3**. Le volant **3** est en liaison pivot d'axe (O, \vec{z}_2) avec l'enceinte **2**, paramétrée par $\gamma(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$, M_3 la masse du volant **3**

et $[I(O, 3)] = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_2 = \vec{z}_3)}$ la matrice d'inertie du volant **3** au point O, centre d'inertie du

solide **3**.

$\vec{\Omega}_{3/2} = \frac{d\gamma(t)}{dt} \vec{z}_2 = \omega_m \vec{z}_2$ avec ω_m la vitesse angulaire du volant **3** par rapport à **2** supposée connue et constante.

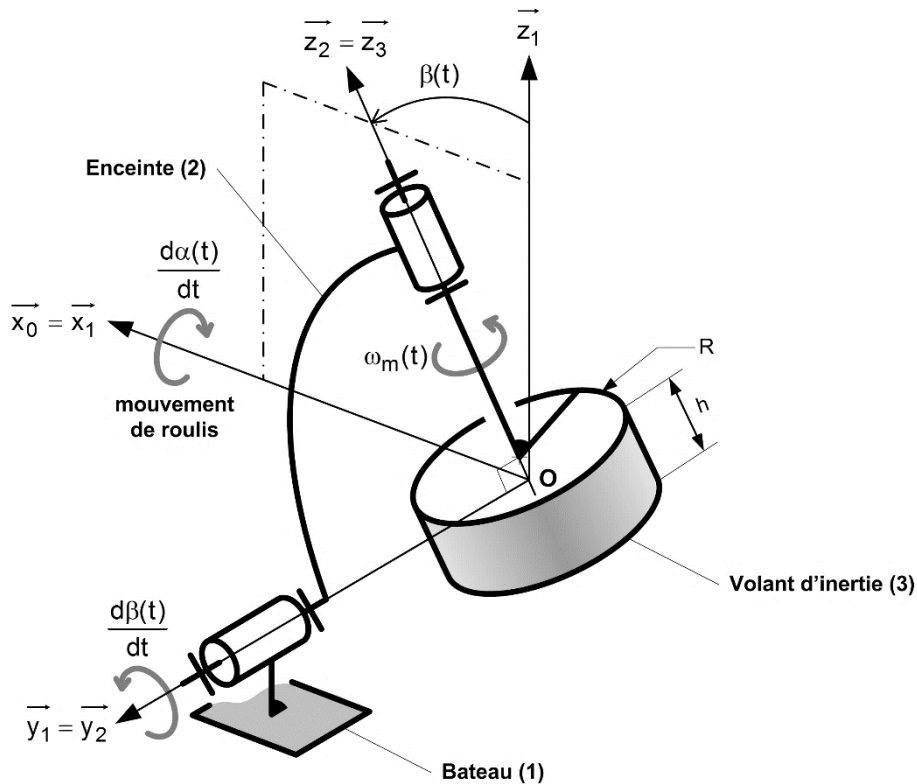


Figure 7 : Schéma cinématique partiel du stabilisateur gyroscopique (motorisation non représentée)

Q3. Donner les figures de changement de bases associées au paramétrage des 3 rotations. Déterminer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}_{3/0}$ en l'exprimant dans la base associée au repère R_2 .

La **Figure 8** ci-dessous représente le volant d'inertie à l'intérieur de l'enceinte.

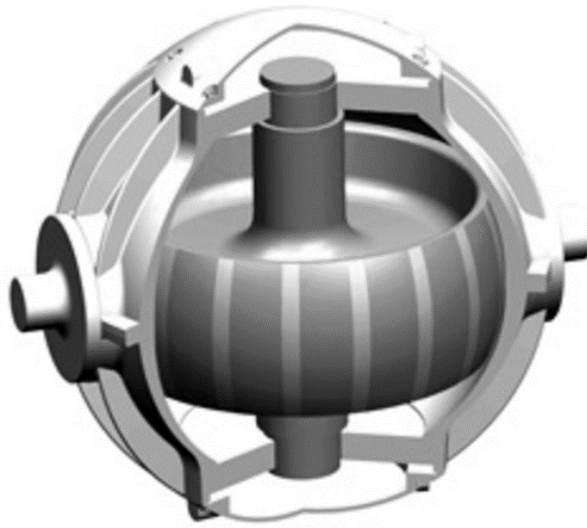


Figure 8 : Représentation du volant d'inertie

Q4. Justifier la forme de la matrice d'inertie du volant 3.

Les liaisons sont supposées énergétiquement parfaites. Le champ de gravitation est noté $-g \vec{z}_0$.

Un moteur monté entre 2 et 3 (stator lié à 2 et rotor lié au volant d'inertie 3) exerce un couple moteur modélisé par le torseur couple suivant :

$$\{T_{Moteur \rightarrow 3}\} = {}_{\forall M} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{mot}(t) \vec{z}_3 \end{Bmatrix}$$

Un système nommé « modulateur hydraulique » monté entre 1 et 2 exerce une action mécanique modélisée par le torseur suivant :

$$\{T_{Modulateur \rightarrow 2}\} = {}_o \begin{Bmatrix} \vec{R}_h(t) \\ C_h(t) \vec{y}_2 \end{Bmatrix}$$

L'eau exerce sur le bateau 1 une action mécanique modélisée par le torseur suivant :

$$\{T_{eau \rightarrow 1}\} = {}_o \begin{Bmatrix} \vec{R}_{eau}(t) \\ C_{eau}(t) \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

Q5. Compléter le graphe des liaisons du document-réponse. Vous y ferez apparaître notamment l'ensemble des actions mécaniques autres que celles transmissibles par les liaisons.

Q6. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à l'ensemble {2, 3}, déterminer l'équation de mouvement donnant l'évolution du paramètre $\beta(t)$. Vous veillerez à expliciter votre démarche et à justifier l'équation retenue (résultante ou moment, point d'application éventuel, projection effectuée).

Pour simplifier l'étude du système, il est nécessaire de linéariser l'équation de mouvement autour du point de fonctionnement défini par $\beta = 0$ et $\alpha = 0$. On considère également que $\omega_m \gg \frac{d\alpha}{dt}$.

Q7. Linéariser l'équation de mouvement obtenue à la Q6 en tenant compte des hypothèses formulées précédemment. L'équation sera mise sous la forme suivante, où vous préciserez l'expression de I_g :

$$I_g \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} = C_h(t) + C_3 \omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (\text{eq 1})$$

L'équation associée au comportement dynamique en roulis du bateau 1 par rapport au repère R_0 est admise :

$$I_b \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = \underbrace{C_{mer}(t) - f_b \frac{d\alpha(t)}{dt} - k_b \alpha(t)}_{C_{eau}(t)} - C_3 \omega_m \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (\text{eq 2})$$

- $C_{mer}(t)$ représente le moment induit par les vagues entretenant le mouvement de roulis ;
- $-f_b \frac{d\alpha(t)}{dt}$ caractérise le moment des actions mécaniques dissipatives liées au mouvement relatif entre l'eau et la coque (f_b : coefficient de frottement visqueux) ;
- $-k_b \alpha(t)$ caractérise le moment de redressement lié à l'action combinée de la pesanteur et de la pression de l'eau sur la coque (poussée d'Archimède) ;
- le terme $C_3 \omega_m \frac{d\beta(t)}{dt}$ provient du couplage gyroscopique et sera détaillé dans la suite.

Q8. A partir des deux équations de dynamique (eq1, eq2), déterminer la fonction de transfert $H(p)$ telle que $\alpha(p) = H(p) \cdot C_{mer}(p)$ (avec $C_h = 0$) et la mettre sous la forme $\frac{1}{K+A p+B p^2}$ où les expressions de K , A et B seront précisées. Indiquer en le justifiant si le système, de fonction de transfert $H(p)$, est stable.

3.2.2 Modélisation de la structure articulée

Pour compléter le modèle de la chaîne d'action globale, il est nécessaire de déterminer les équations qui caractérisent le système hydraulique. Le système est modélisé par le schéma cinématique de la **Figure 9**.

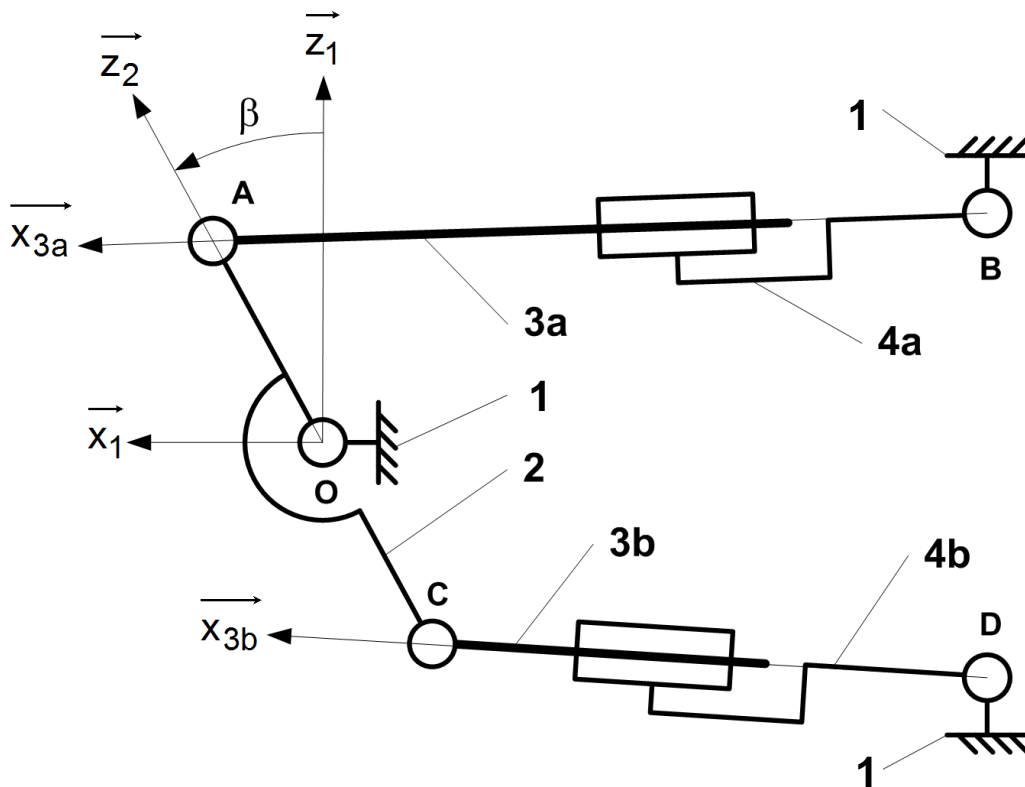


Figure 9 : Schéma cinématique de la structure articulée

On associe :

- le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ au carter du système lié au bateau 1 ;
- le repère $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à l'enceinte 2. On note $\beta = (\vec{z}_1, \vec{z}_2) = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ l'angle de l'enceinte 2 par rapport à 1 selon \vec{y}_1 ;
- le repère $R_{3a}(A, \vec{x}_{3a}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3a})$ au vérin a (constitué d'une tige notée 3a et d'un corps noté 4a)
- et le repère $R_{3b}(C, \vec{x}_{3b}, \vec{y}_1, \vec{z}_{3b})$ au vérin b (tige 3b et corps 4b).

Les angles formés par ces vérins avec \vec{x}_1 sont notés :

$$\gamma_a = (\vec{z}_1, \vec{z}_{3a}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_{3a}) \text{ et } \gamma_b = (\vec{z}_1, \vec{z}_{3b}) = (\vec{x}_1, \vec{x}_{3b}).$$

On donne :

$$\begin{aligned} \vec{OA} = \vec{CO} = e \vec{z}_2 & \quad \vec{BA} = \lambda_a(t) \vec{x}_{3a} & \quad \vec{DC} = \lambda_b(t) \vec{x}_{3b} \\ \vec{OB} = -L \vec{x}_1 + d \vec{z}_1 & \quad \text{et} & \quad \vec{OD} = -L \vec{x}_1 - d \vec{z}_1. \end{aligned}$$

Q9. Déterminer une équation donnant l'évolution de λ_a en fonction de β et une autre équation reliant l'angle γ_a en fonction β .

Une hypothèse de modélisation plane des actions mécaniques est faite, dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$.

On note \vec{F}_a (respectivement \vec{F}_b) la résultante de l'action mécanique exercée par la tige du vérin **3a** (respectivement **3b**) sur l'enceinte **2** (action mécanique de type glisseur en modélisation plane). L'action mécanique exercée par le bâti sur le corps du vérin **4a** (respectivement **4b**) est également un glisseur. Le moment global exercé par les deux vérins sur l'enceinte **2** au point O en projection sur \vec{y}_1 est noté C_h . Les quantités dynamiques associées aux vérins sont supposées négligeables devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

Q10. Justifier que $\vec{F}_a = F_a \vec{x}_{3a}$ (respectivement $\vec{F}_b = F_b \vec{x}_{3b}$). Détailler le ou les systèmes mécaniques isolés, le bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur ces systèmes, le ou les théorèmes généraux utilisés.

Q11. Déterminer le moment C_h correspondant à la somme des moments en O exercés par les deux vérins.

A partir des résultats de la **Q9**, l'évolution de l'angle γ_a en fonction de β est tracée.

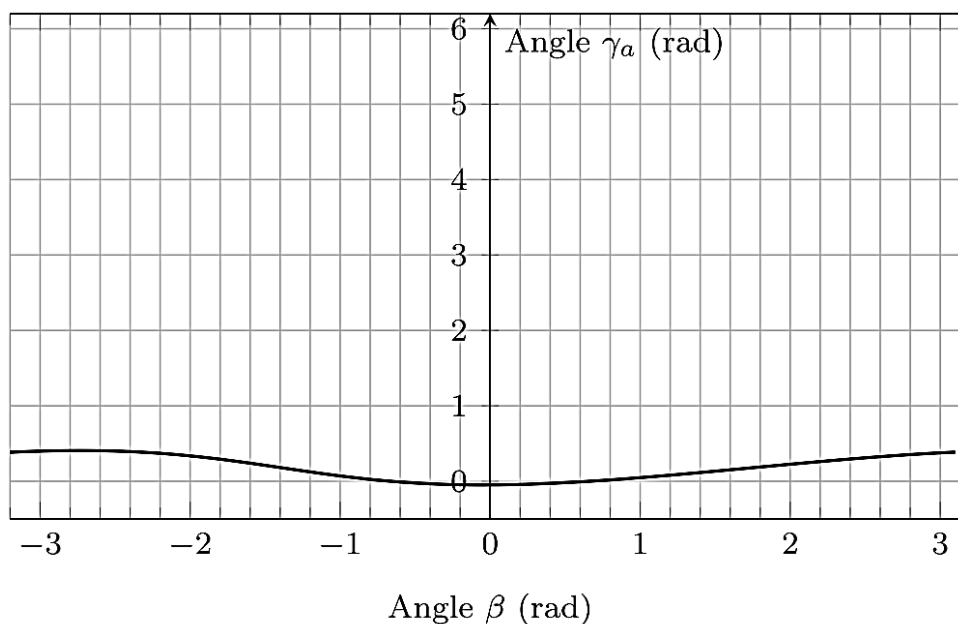


Figure 10 : Evolution de l'angle γ_a en fonction de β

Q12. A partir de la courbe **Figure 10**, formuler une hypothèse sur les angles γ_a et γ_b sachant que l'angle β varie entre $\pm 45^\circ = \pm 0,7$ rad. En déduire une relation approchée sur le moment C_h tenant compte de l'hypothèse formulée.

On adopte les notations suivantes $\Omega_\alpha(p)$ et $\Omega_\beta(p)$ transformées de Laplace respectives des vitesses angulaires :

$$\omega_\alpha(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt} \text{ et } \omega_\beta(t) = \frac{d\beta(t)}{dt}.$$

En utilisant les équations simplifiées obtenues par l'étude géométrique et le principe de conservation de la masse pour un fluide compressible, on peut établir l'équation suivante reliant le débit volumique total $q(t)$, la vitesse angulaire $\omega_\beta(t)$ et le couple $C_h(t)$:

$$q(t) = S \cdot e \frac{d\beta(t)}{dt} + \frac{V_0}{2.B.S.e} \frac{dC_h(t)}{dt} \quad (\text{eq 3})$$

où S représente la section utile équivalente, aux 2 vérins identiques **a** et **b**, sur laquelle s'exercent les actions mécaniques de pression du fluide, V_0 est le demi volume équivalent aux 2 vérins et B le coefficient de compressibilité isotherme de l'huile.

Le servo-distributeur fournit un débit $q(t)$ proportionnel au courant $i(t)$ tel que $q(t) = K_{sv} i(t)$.

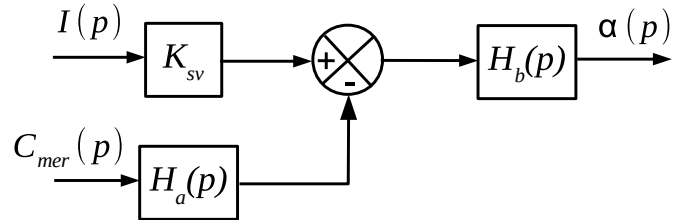
On rappelle que les équations qui caractérisent le bateau et le stabilisateur gyroscopique sont les suivantes :

$$I_g \frac{d^2\beta(t)}{dt^2} = C_h(t) + C_3\omega_m \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (\text{eq 1})$$

$$I_b \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + f_b \frac{d\alpha(t)}{dt} + k_b\alpha(t) = C_{mer}(t) - C_3\omega_m \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (\text{eq 2})$$

Q13. A l'aide des équations (eq 1, eq 2, eq 3) et en supposant les conditions initiales nulles, donner les fonctions de transfert H_1 à H_6 du schéma-blocs du document-réponse.

Q14. Montrer que ce schéma-blocs peut être mis sous la forme suivante où l'on précisera l'expression de H_a et H_b en fonction de H_1 à H_6 uniquement. (Ne surtout pas remplacer par les expressions trouvées à la question précédente).

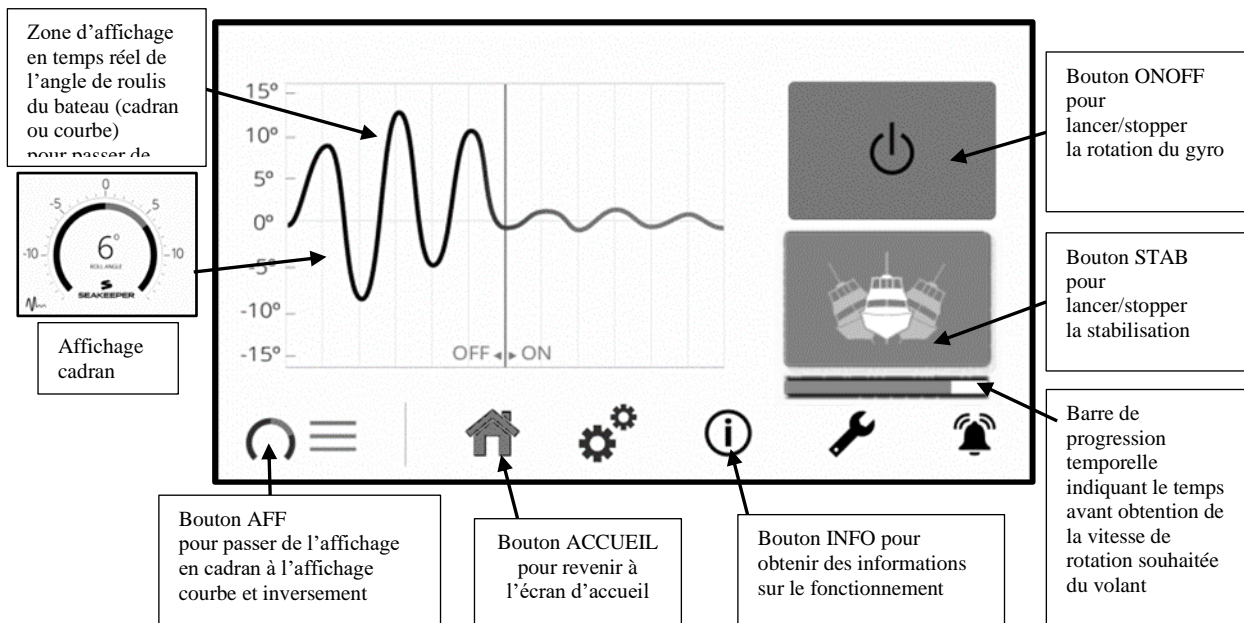


On donne, dans le document-réponse, la réponse indicielle $\alpha(t)$ pour un entrée de $i(t) = 1 A$ avec $C_{mer} = 0$.

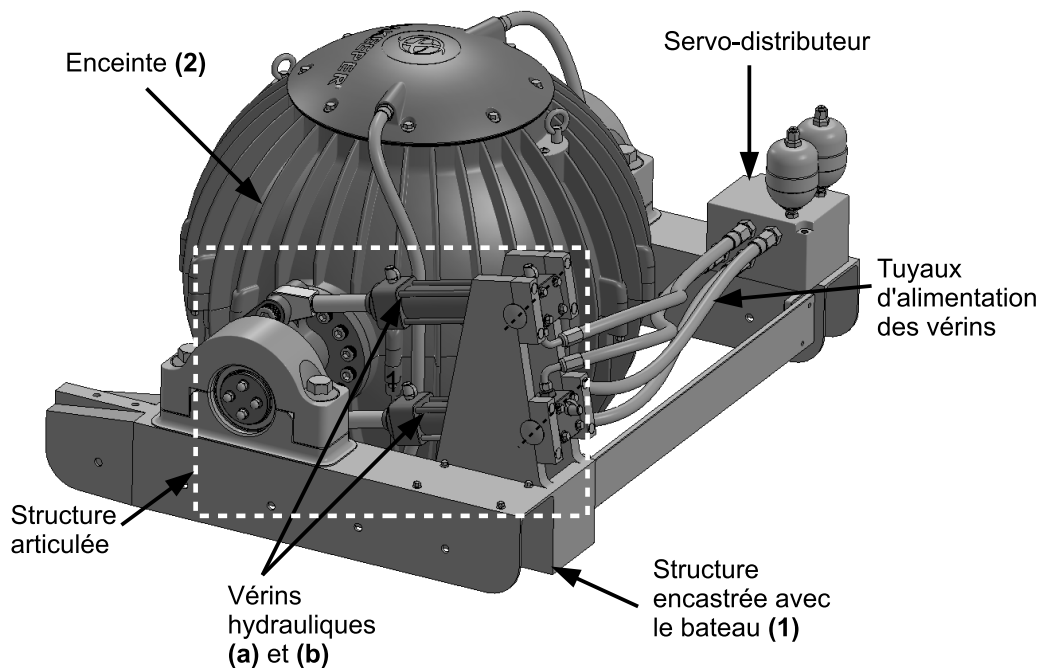
Q15. Proposer un modèle de comportement de la chaîne d'action (fonction de transfert $G(p) = K_{sv}H_b(p)$) à partir de la réponse indicielle. Identifier les valeurs numériques des paramètres caractéristiques intervenant dans la fonction de transfert. Vous justifierez votre réponse en reportant les tracés nécessaires sur le document-réponse. On pourra utiliser les abaques donnés en **annexe 4**.

Annexes

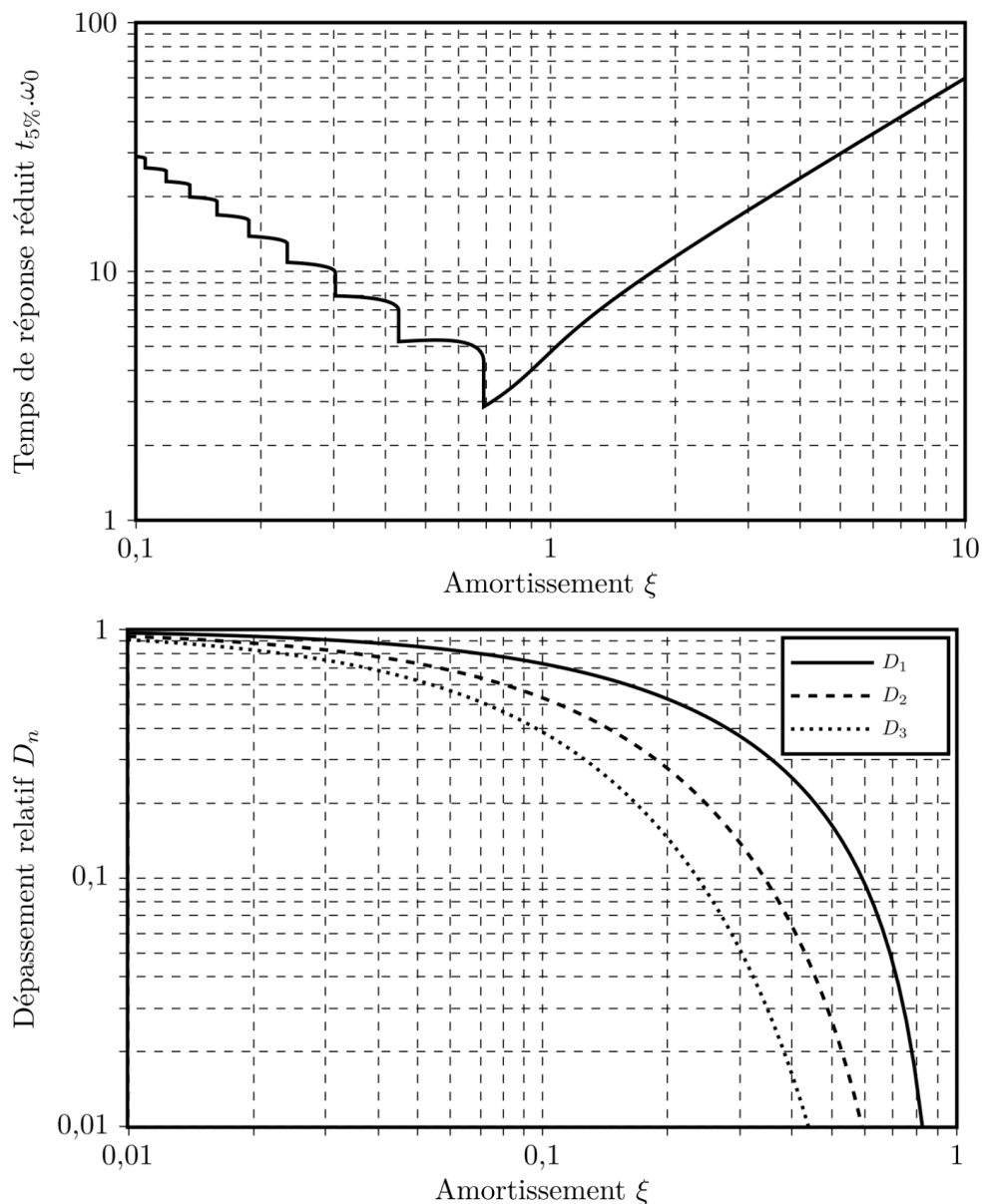
Annexe 1 : Ecran du pupitre de contrôle



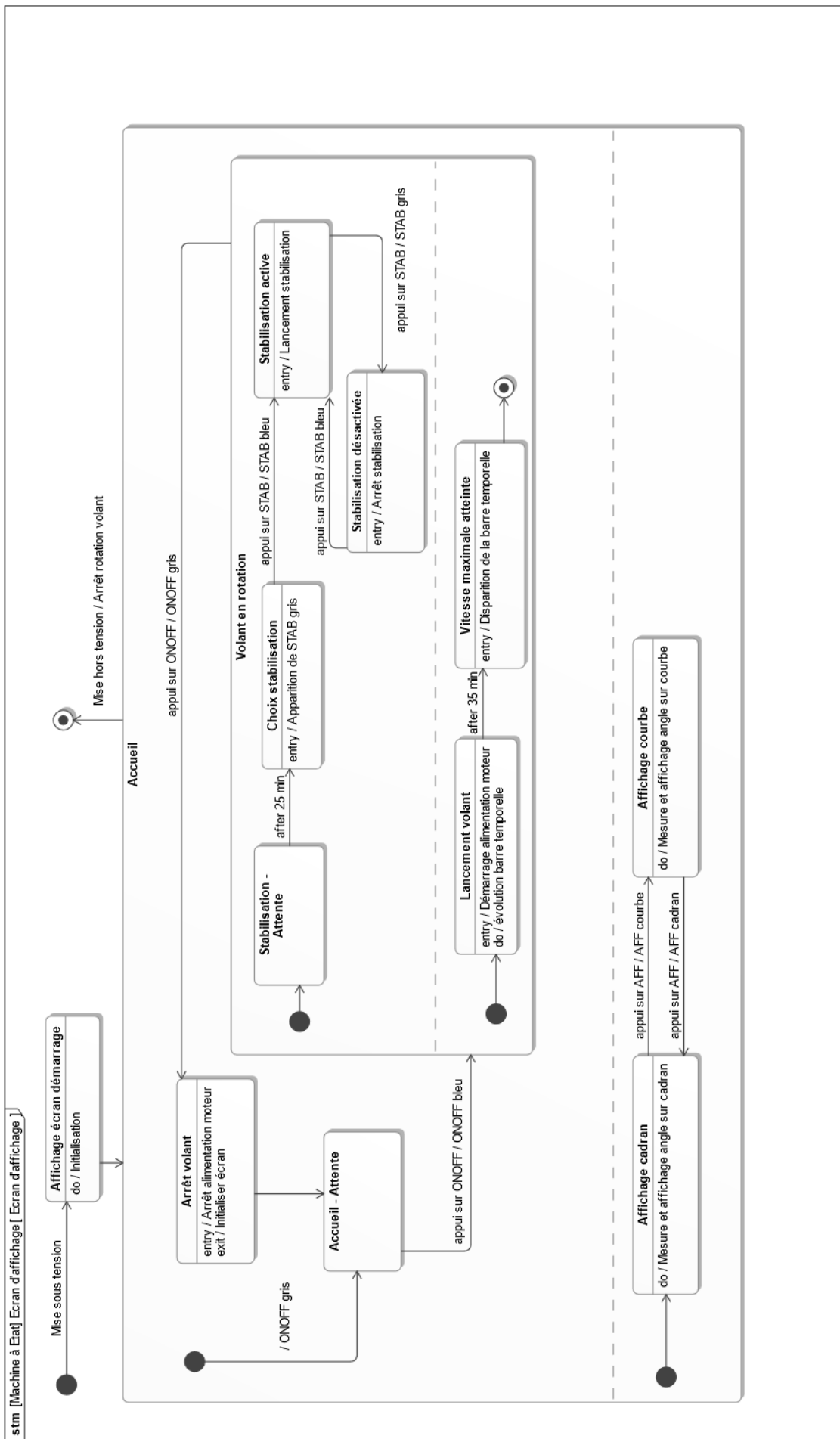
Annexe 2 : Principaux constituants du régulateur hydraulique



Annexe 4 : Abaques d'identification d'un système du second ordre



Annexe 3 : Diagramme d'état partiel du système



Remarque : L'action « Initialiser écran » implique :

- la disparition de la barre temporelle ;
- la disparition du bouton STAB.

Problème N°4 : Bassin de traction du LHEEA (extrait Centrale mp 2021)

I. Présentation

Le système étudié, nommé bassin de traction, est un des nombreux bassins d'essais du *Laboratoire de recherche en Hydrodynamique, Énergétique et Environnement Atmosphérique (LHEEA)* situé à Nantes.

Ce bassin de traction mesure 140 m de long, 5 m de large, et a une profondeur constante de 3 m. Il est équipé d'un chariot de traction pouvant se déplacer dans l'une ou l'autre des directions, avec des vitesses atteignant jusqu'à $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. À une extrémité du bassin se trouve un batteur à houle permettant de générer des houles unidirectionnelles régulières de hauteur crête-à-creux maximale de 0,5 m. A son autre extrémité, une plage d'amortissement sert à faire déferler les vagues pour limiter leur réflexion dans le bassin.



figure 1 : bassin de traction

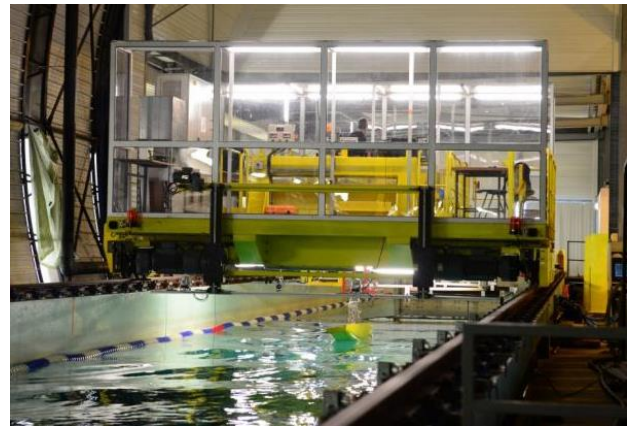


Figure 2 : Chariot de traction

Ce bassin, 2^{ème} plus grand bassin de traction en France et le 1^{er} au niveau académique, permet de mener un certain nombre d'expériences :

- études de navires sur eau calme et sur houle ;
- tests de résistance à l'avancement de navires avec ou sans houle ;
- optimisations de carènes, tenue à la mer de navires ou structures flottantes ;
- tests de technologies en Energies Marines Renouvelables.

II. Étude de l'exigence 1.1.1 : « Durée de l'essai »

Objectif : Choisir un matériau pour la bande de roulement de chaque roue en contact avec le rail, afin de permettre des mesures correctes pendant une durée minimale de mesure t_{acq} donnée.

II.1. Détermination de l'accélération minimale

Dans un premier temps, on va déterminer l'accélération minimale nécessaire pour que le chariot puisse se déplacer à une vitesse constante $V_m = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ pendant une durée d'acquisition $t_{acq} = 10 \text{ s}$.

Modélisation :

Lors d'un essai, le chariot (3) (voir Figure) se déplace par rapport au sol (0) en translation rectiligne à une vitesse $V_3(t)$ qui suit une loi de vitesse (Figure) découpée en 3 phases :

- première phase : accélération $\gamma = \frac{dV_3(t)}{dt}$ constante ($\gamma > 0$) jusqu'à atteindre la vitesse terminale souhaitée $V_3(T_1) = V_m$;
- deuxième phase : vitesse terminale conservée pendant la durée de l'acquisition $t_{acq} = T_2 - T_1$;
- troisième phase : décélération $-\gamma = \frac{dV_3(t)}{dt}$ constante ($\gamma > 0$) jusqu'à l'arrêt complet.

Le profil de vitesse adopté est le suivant :

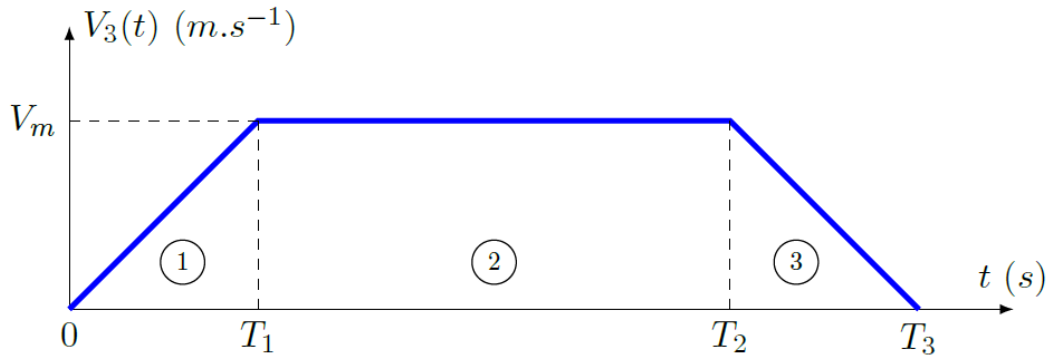


Figure 3 : Profil de vitesse souhaité du chariot

A chaque essai, le chariot part d'une position initiale X_0 et termine sa course à une position finale X_f .

Données :

Pour rappel, la longueur complète du bassin est de 140 m. Le chariot doit observer une distance de sécurité à chaque côté du bassin. Autrement dit on prendra $X_0 = 10$ m et $X_f = 130$ m.

La vitesse de déplacement du chariot pendant la deuxième phase sera prise maximale et égale à $V_m = 8$ m.s⁻¹. La durée de l'acquisition sera prise égale à $t_{acq} = 10$ s.

Q1. A partir de la Figure , donner l'expression du temps T_1 nécessaire avoir que $t_{acq} = 10$ s. En déduire l'expression littérale de l'accélération γ de la première phase en fonction de V_m , t_{acq} , X_0 et X_f . Faire l'application numérique.

II.2. Détermination du facteur de frottement minimal

Afin d'éviter un phénomène de glissement entre les roues motrices et le rail au moment où l'accélération est maximale (phase 1 de la figure 3), il est nécessaire de déterminer le facteur de frottement minimal entre le rail et les roues. On pourra ainsi valider l'hypothèse de roulement sans glissement.

Modélisation :

Le chariot est composé (comme l'indique le Diagramme de Définition de Blocs en Annexes) de quatre roues motrices et de quatre roues libres en rotation. Pour des raisons de symétrie, on ne considère qu'une moitié du chariot. On fait alors l'hypothèse de **problème plan**, dans le plan $(G_3, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Il ne reste alors que deux roues motrices et deux roues libres en rotation (comme l'illustre le schéma cinématique complet en Annexes).

Pour les questions 2 à 8, et par souci de simplification, **on fera l'étude à partir du schéma cinématique simplifié de la figure 4** où seules les deux roues motrices ont été conservées.

Schéma de principe :

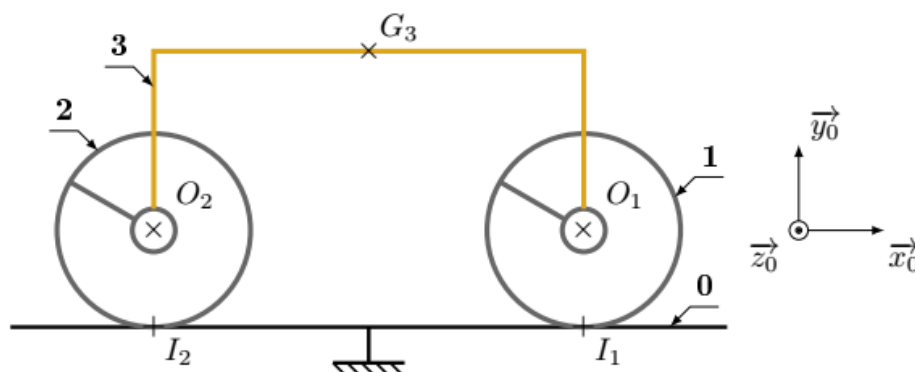


Figure 4 : Modélisation plane simplifiée du chariot (moteurs et réducteurs non représentés)

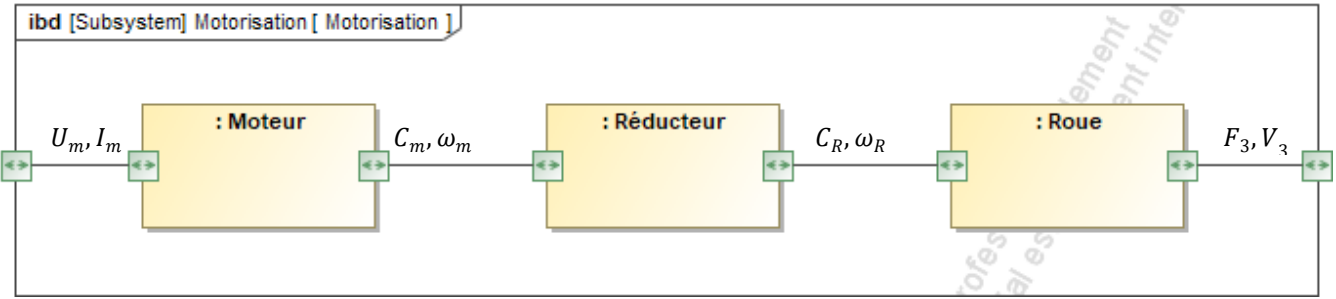
Chaîne de puissance :

Figure 5 : Chaîne de puissance de la motorisation pour une roue

Données et notations :

- La plateforme (3) a pour centre de gravité le point G_3 et pour masse m_3 .
 - Le mouvement de la plateforme sera défini par la vitesse $\overrightarrow{V_{G_3 \in 3/0}} = V_3 \cdot \vec{x}_0$ et par l'accélération $\overrightarrow{\Gamma_{G_3 \in 3/0}} = \gamma \cdot \vec{x}_0$
 - Le point O_1 est le centre d'inertie de la roue motrice avant (1), le point O_2 est celui de la roue motrice arrière (2). Chaque roue motrice possède une masse m_R et un moment d'inertie J_R par rapport à son axe de rotation dans son mouvement par rapport à (3). Le rayon de chaque roue motrice est R .
 - On définit les 2 grandeurs cinématiques suivantes : ω_m vitesse de rotation du rotor du moteur par rapport à (3) et ω_R vitesse de rotation des roues (1) et (2) par rapport à (3). Le moteur est alimenté en puissance électrique caractérisée par le courant I_m parcourant le moteur et par la tension U_m aux bornes de son induit.
 - Au niveau de chaque roue, le réducteur (non représenté sur la figure 4) positionné entre le moteur et la roue motrice possède un rapport de réduction noté k vérifiant $\omega_R = k \cdot \omega_m$.
- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\overrightarrow{O_1 G_3} = -L \cdot \vec{x}_0 + H \cdot \vec{y}_0$ • $m_3 = 6000 \text{ kg}$ • $m_R = 200 \text{ kg}$ • $J_R = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ • $\vec{g} = -g \cdot \vec{y}_0$ avec $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\overrightarrow{O_2 G_3} = L \cdot \vec{x}_0 + H \cdot \vec{y}_0$ • $R = 0,25 \text{ m}$ • $L = 2 \text{ m}$ • $H = 1 \text{ m}$ • $k = \frac{1}{25}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Hypothèses :

- Les contacts entre les roues et le rail seront considérés avec frottement (le facteur de frottement est noté f et on néglige la résistance au roulement), et on fait l'hypothèse de roulement sans glissement au niveau de ces contacts.
- Toutes les autres liaisons seront supposées parfaites. On supposera aussi que le réducteur est de rendement énergétique unitaire (pas de frottement).
- Les actions mécaniques résistant à l'avancement et dues à l'action de l'air sur le chariot et à l'action de l'eau sur la maquette seront négligées par rapport aux effets dynamiques.
- Les masses et moments d'inertie des moteurs et des réducteurs seront négligés.
- Le sol du laboratoire (0) sera pris comme un référentiel galiléen de base $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Modélisation des actions mécaniques :

- Pour toutes les actions mécaniques inconnues qu'il sera pertinent de définir, on utilisera la notation suivante (écriture avec hypothèse de problème plan) :

$$\{T_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{i \rightarrow j}} \\ \overrightarrow{M_{K, i \rightarrow j}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{array} \right\}_{b_0}$$

- Pour la motorisation des roues (1) et (2), les actions respectives du rotor du moteur sur l'arbre d'entrée du réducteur seront modélisées par :

$$\{T_{mot_1 \rightarrow red_1}\} = {}_{o_1} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} \quad \{T_{mot_2 \rightarrow red_2}\} = {}_{o_2} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

- De la même manière, les actions respectives de l'arbre de sortie du réducteur sur la roue seront modélisées par :

$$\{T_{red_1 \rightarrow 1}\} = {}_{o_1} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_R \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} \quad \{T_{red_2 \rightarrow 2}\} = {}_{o_2} \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_R \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\}$$

On prendra $\omega_R = -\frac{V_3}{R}$ la vitesse de rotation des roues motrices (1) et (2) par rapport à la plateforme (3).

Les réducteurs étant considérés parfaits, on admettra que : $C_m = k \cdot C_R$

Par ailleurs, le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble mobile a permis d'obtenir :

$$-\frac{C_m}{k \cdot R} = \frac{M_{eq}}{2} \gamma \quad \text{avec} \quad M_{eq} = m_3 + 2 \cdot m_R + 2 \cdot \frac{J_R}{R^2}$$

- Q2.** Donner l'expression du moment dynamique $\overline{\delta_{O_{1,1}/0}}$ de la roue avant (1) au point O_1 dans son mouvement par rapport au sol (0) en fonction de $\frac{d\omega_R}{dt}$. Réaliser l'inventaire des actions mécaniques extérieures agissant sur (1) (donner l'expression de chaque torseur).
- Q3.** On isole la roue avant (1). Écrire le théorème du moment dynamique appliqué à la roue (1) au point O_1 projeté sur \vec{z}_0 , puis en déduire l'expression littérale de la composante X_{01} (de l'action tangentielle du sol (0) sur la roue (1)) en fonction uniquement de l'accélération γ et des masses. Donner alors, sans faire le calcul, l'expression littérale de la composante X_{02} de l'action du sol (0) sur la roue (2).
- Q4.** On isole l'ensemble du chariot (Σ)=(1)∪(2)∪(3)∪(moto-réducteurs). Proposer le théorème utilisé (T.R.D. ou T.M.D., la projection, éventuellement le point) permettant de déterminer la composante Y_{01} . Donner l'expression de la composante du torseur dynamique correspondant en fonction de γ , des différentes masses et/ou inerties ainsi que des grandeurs géométriques.
- Q5.** Proposer uniquement la démarche (isolement(s), inventaire des actions mécaniques, théorème(s) utilisé(s)) permettant ensuite de déterminer la composante Y_{02} de l'action du sol (0) sur la roue (2).
- Q6.** Justifier l'expression de la masse équivalente : $M_{eq} = m_3 + 2 \cdot m_R + 2 \cdot \frac{J_R}{R^2}$.
- Q7.** comment peut-on retrouver le résultat donné : $-\frac{C_m}{k \cdot R} = \frac{M_{eq}}{2} \gamma$ sans utiliser le théorème de l'énergie cinétique ?

Une application numérique a permis de déterminer, sous les hypothèses fournies précédemment, la valeur minimale pour assurer le non-glissement du facteur de frottement noté f_1 au niveau de la roue motrice avant (1) puis celle du facteur de frottement noté f_2 au niveau de la roue motrice arrière (2) : $f_1 = 0,177$ et $f_2 = 0,146$.

- Q8.** Dans un premier temps, en se basant sur les lois de Coulomb, indiquer la démarche qui a été mise en œuvre pour déterminer les valeurs minimales de f_1 et f_2 .

En réalité, le chariot ne possède pas seulement quatre roues motrices (deux de chaque côté), mais deux bogies constitués chacun de deux roues motrices et de deux roues libres en rotation (Annexes). La présence d'une roue libre en rotation sur chaque côté d'un bogie permet de soulager environ de moitié l'effort normal sur chaque roue motrice, tandis que l'effort tangentiel sur chaque roue motrice reste identique.

Le rail sur lequel les roues roulent sans glisser est en acier. On souhaite utiliser le même matériau pour toutes les roues (avants comme arrières, motrices comme libres).

On adoptera un coefficient de sécurité $s = 2$ afin de garantir la pertinence des résultats en tenant compte des hypothèses simplificatrices adoptées lors de la modélisation.

Q9. A partir des indications fournies, proposer une valeur du facteur de frottement à retenir et justifier. Enfin, à partir du Tableau 1 ci-dessous, proposer un choix de bandage (matériau de chaque roue) qui permette d'éviter le glissement en phase d'accélération, pour ainsi respecter l'exigence 1.1.1.

Matériau 1	Matériau 2	Facteur de frottement - sec
Acier	Téflon	0,05
Acier	Acier (sec)	0,2
Acier	PVC	0,5
Acier	Caoutchouc	1 à 4

Tableau 1 : Facteur de frottement en fonction du couple de matériaux - contact sec

II.3. Etude du système de levage

L'étude précédente a permis de montrer qu'il faut choisir un bandage (couche de matière entourant chaque roue du chariot) pour obtenir le facteur de frottement nécessaire pour assurer l'exigence 1.1.1.

Lors des phases statiques, ce bandage va se déformer de manière permanente sous le propre poids du chariot. Le risque est de se retrouver avec des roues qui possèdent des zones aplaties et qui n'ont plus un profil circulaire et par conséquent de voir les essais perturbés par des vibrations.

La solution proposée est de maintenir le chariot surélevé par des vérins lors des phases statiques. C'est pourquoi, deux mécanismes identiques de levée (un pour chaque côté) sont intégrés au chariot. La structure d'un mécanisme de levage est présentée sur le Diagramme de Bloc Interne ci-dessous.

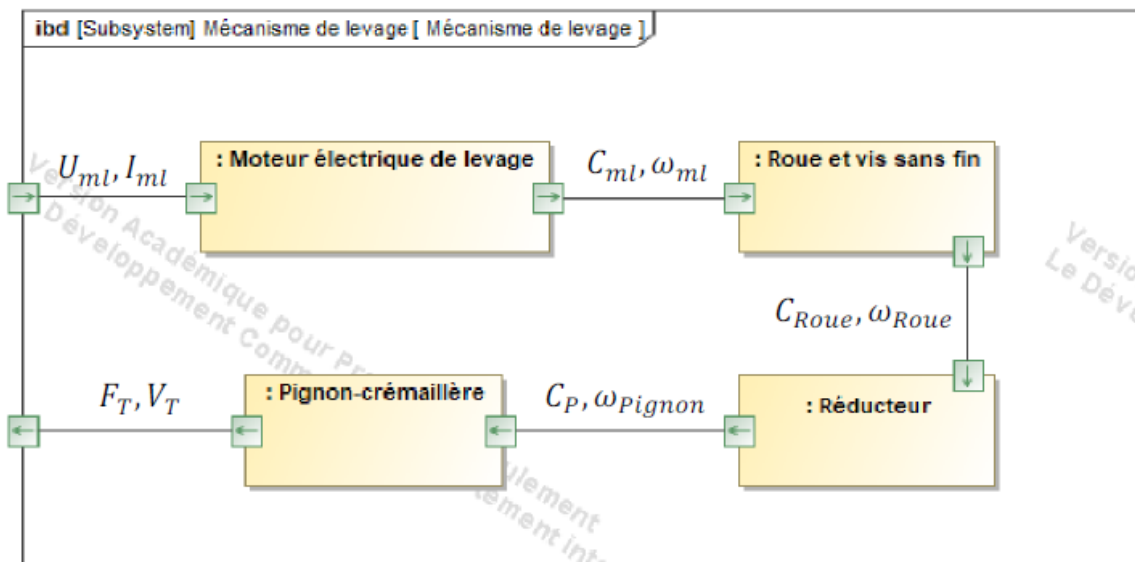


Figure 6 : Diagramme de Blocs internes du mécanisme de levage

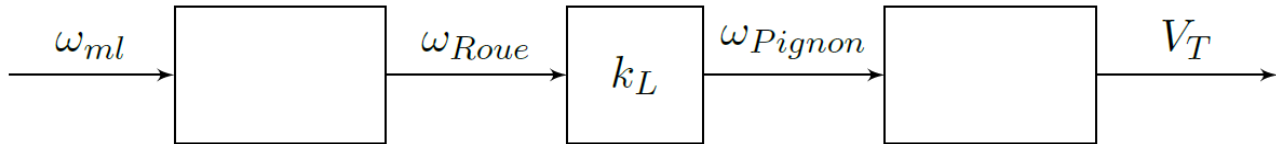
Données :

- Moteur de levage :
 - Vitesse de rotation en charge : $\omega_{ml} = 200 \text{ rad. s}^{-1}$
- Réducteur Roue et Vis sans fin :
 - Nombre de filets de la vis : $n_{vis} = 2$
 - Nombre de dents de la roue : $Z_{Roue} = 50$
- Réducteur levage :
 - Rapport de réduction : $\omega_{pignon} = k_L \cdot \omega_{Roue}$ avec $k_L = \frac{1}{40}$

- Pignon crémaillère :
 - Diamètre primitif du pignon : $d_{\text{pignon}} = 0,02 \text{ m}$
- Tige du vérin :
 - Course : $C_T = 0,01 \text{ m}$

La tige de vérin est solidaire de la crémaillère.

Q10. Recopier et compléter le schéma-blocs (ci-dessous) modélisant les lois cinématiques de chaque bloc (préciser le nom du composant sous chaque bloc). En déduire l'expression littérale de la vitesse de la tige V_T en fonction de la vitesse de rotation du moteur de levage ω_{ml} . Faire l'application numérique.



Q11. Donner l'expression littérale du temps de manœuvre T_V . Faire l'application numérique puis conclure quant au respect de l'exigence 3.3.2 du cahier des charges.

III. ÉTUDE DE L'EXIGENCE 1.2 : « GARANTIR UN DEPLACEMENT DU CHARIOT À VITESSE CONSTANTE »

Objectif : Modéliser l'asservissement en vitesse du chariot de traction puis régler les paramètres du correcteur afin de satisfaire tous les critères de l'exigence 1.2 du cahier des charges.

Dans toute la partie 3, on notera F la transformée de Laplace de la fonction f : $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$

III.1. Modélisation de l'asservissement en vitesse

Principe de fonctionnement et schéma-blocs :

On étudie l'asservissement en vitesse du chariot de traction dont le schéma-blocs est donné en Figure 7.

- Un **adaptateur** de gain K_1 permet de fournir l'image $U_C(p)$ de la consigne de vitesse $V_C(p)$.
- Un **capteur de vitesse en rotation** de gain K_{11} renvoie une tension $U_{mes}(p)$ proportionnelle à la vitesse de rotation $\Omega_{mes}(p)$ de son axe. Par ailleurs, une **roue libre en rotation** de gain K_9 associée à un **réducteur de vitesse épicycloïdal** de gain K_{10} permettent de transformer la vitesse du chariot $V(p)$ en vitesse de rotation $\Omega_{mes}(p)$ de l'axe du capteur de vitesse de rotation.
- L'écart $\varepsilon_U(p)$ entre $U_C(p)$ et $U_{mes}(p)$ est ensuite corrigé par un **correcteur** de fonction de transfert $C(p)$ afin de piloter un **variateur** de gain K_2 .
- La tension de commande $U_m(p)$ du **moteur** va induire la vitesse angulaire $\Omega_m(p)$ de l'axe moteur.
- Un **réducteur de vitesse** de gain K_7 puis le **système roue-rail** de gain K_8 transforment le mouvement pour obtenir une vitesse $V(p)$ de translation du chariot.
- On notera $F_{res}(p)$ la force de l'eau sur la maquette en mouvement. $C_{res}(p)$ représente le couple équivalent à $F_{res}(p)$ ramené sur l'axe moteur.

On rappelle qu'il y a roulement sans glissement entre la roue libre en rotation et le rail, ainsi qu'entre la roue motrice et le rail.

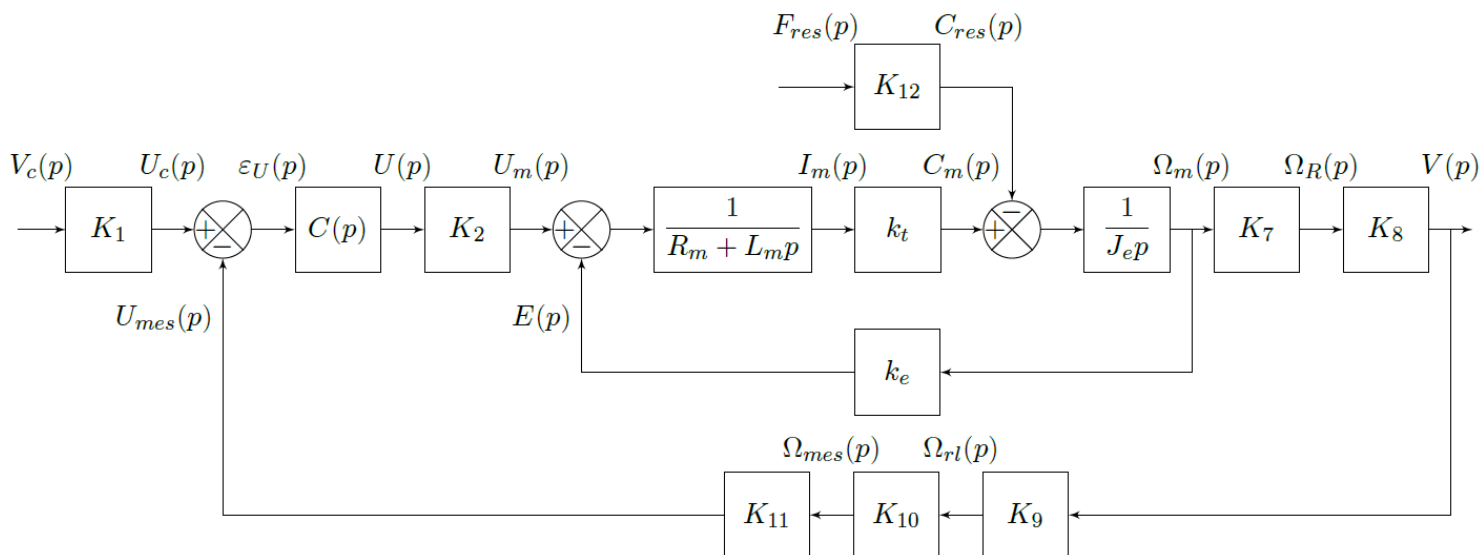


Figure 7 : Schéma-blocs de l'asservissement en vitesse du chariot

Données générales :

- Rayon de la roue motrice : $R = 0,25 \text{ m}$
- Rayon de la roue libre en rotation : $r = 0,15 \text{ m}$
- Capteur de vitesse en rotation : $K_{11} = 60 \text{ V. s. rad}^{-1}$
- Autres données :

$$K_2 = 1 \quad K_7 = \mu = \frac{1}{25}$$

$$K_{10} = \frac{1}{2,5} \quad K_{12} = R \cdot \mu$$

On souhaite compléter la modélisation de l'asservissement à partir du principe de fonctionnement fourni et des données générales.

Q12. Indiquer les expressions littérales des gains K_8 et K_9 . Déterminer ensuite K_1 en fonction des autres gains K_i permettant d'obtenir un écart $\varepsilon_U(p)$ nul lorsque la sortie $V(p)$ est égale à la consigne $V_c(p)$ (vous préciserez les unités de chacun des gains demandés).

ANNEXES

Id	Exigences	Id	Exigences	Niveaux
1	Déplacer la maquette en ligne droite, dans les 2 sens			
1.1	Adapter les déplacements du chariot aux conditions de l'essai.	1.1.1	Durée de l'essai	$t_{acq} \geq 10s$
		1.1.2	Distance de freinage	$D_{FU} \leq 10m$
		1.1.3	Glissement de la roue libre en rotation sur le rail	Nul
1.2	Garantir un déplacement du chariot à vitesse constante	1.2.1	Rapidité : Temps de réponse à 5%	$T_{r5\%} \leq 3s$
		1.2.2	Stabilité : Marge de gain	$M_G \geq 12dB$
			Marge de phase	$M_\varphi \geq 45^\circ$
		1.2.3	Précision : Erreur statique pour une entrée : $v_c(t) = V_0 \cdot u(t)$ avec $V_0 = 8 m \cdot s^{-1}$ Erreur de traînage pour une entrée : $v_c(t) = \gamma_0 t \cdot u(t)$ avec $\gamma_0 = 1,6 m \cdot s^{-2}$	$E_S = 0$
$E_T \leq 0,16 m \cdot s^{-1}$				
1.2.4	Dépassement : En réponse à un échelon de vitesse En réponse à un trapèze de vitesse (d'accélération maximale γ_0)	$D_{1E} \leq 10\%$		
		$D_{1T} \leq 0,1 m \cdot s^{-1}$		
2	Générer une houle unidirectionnelle régulière			
3	Réaliser de bonnes acquisitions relatives au comportement de la maquette			

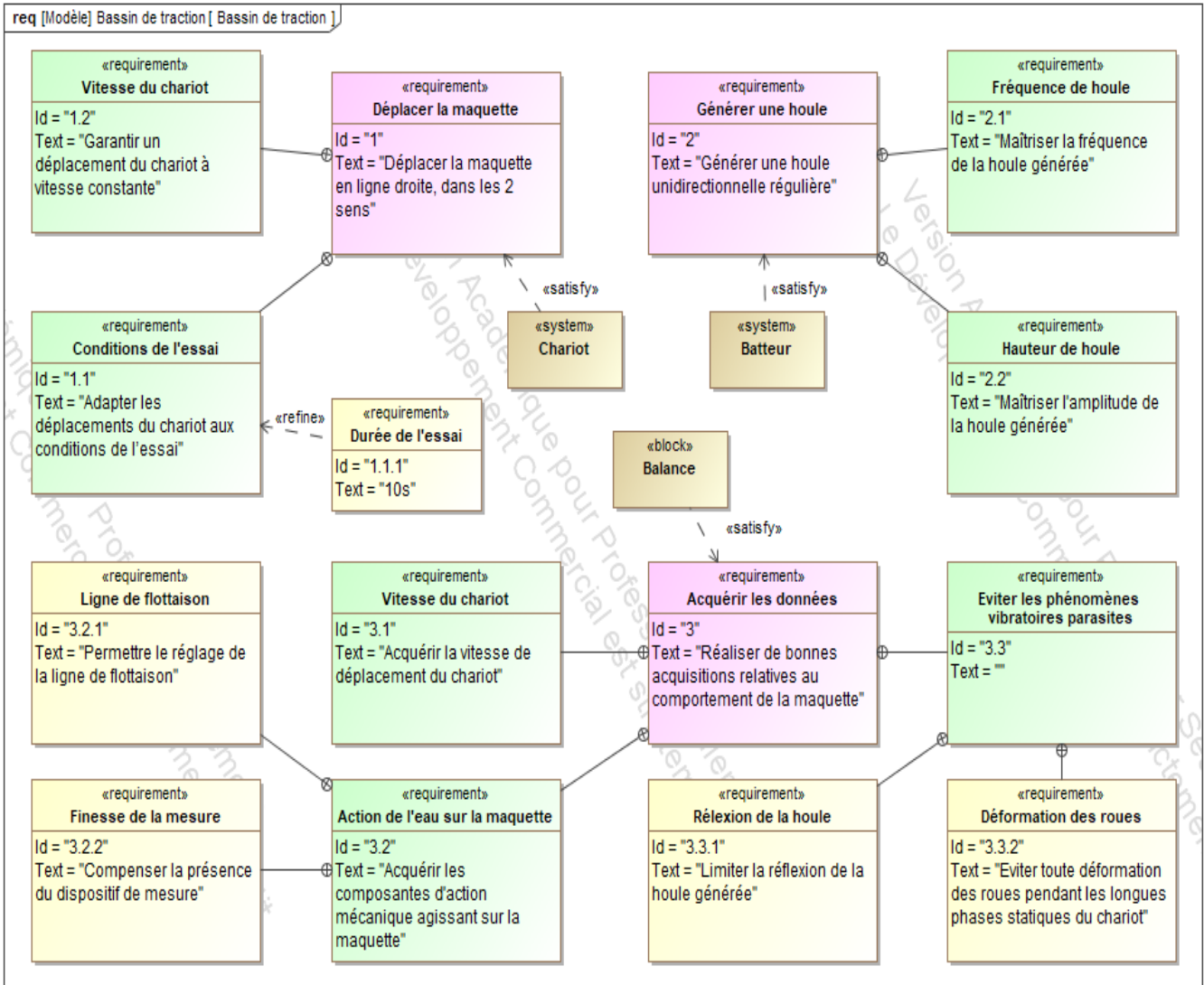


Tableau et diagramme des exigences (partiels)

ARCHITECTURE ORGANIQUE DU SYSTEME

Le bassin de traction est composé d'un bassin rempli d'eau, d'un batteur générant une houle, de deux rails sur lesquels un chariot est mis en mouvement pour générer une vitesse relative d'une maquette par rapport à la surface de l'eau.

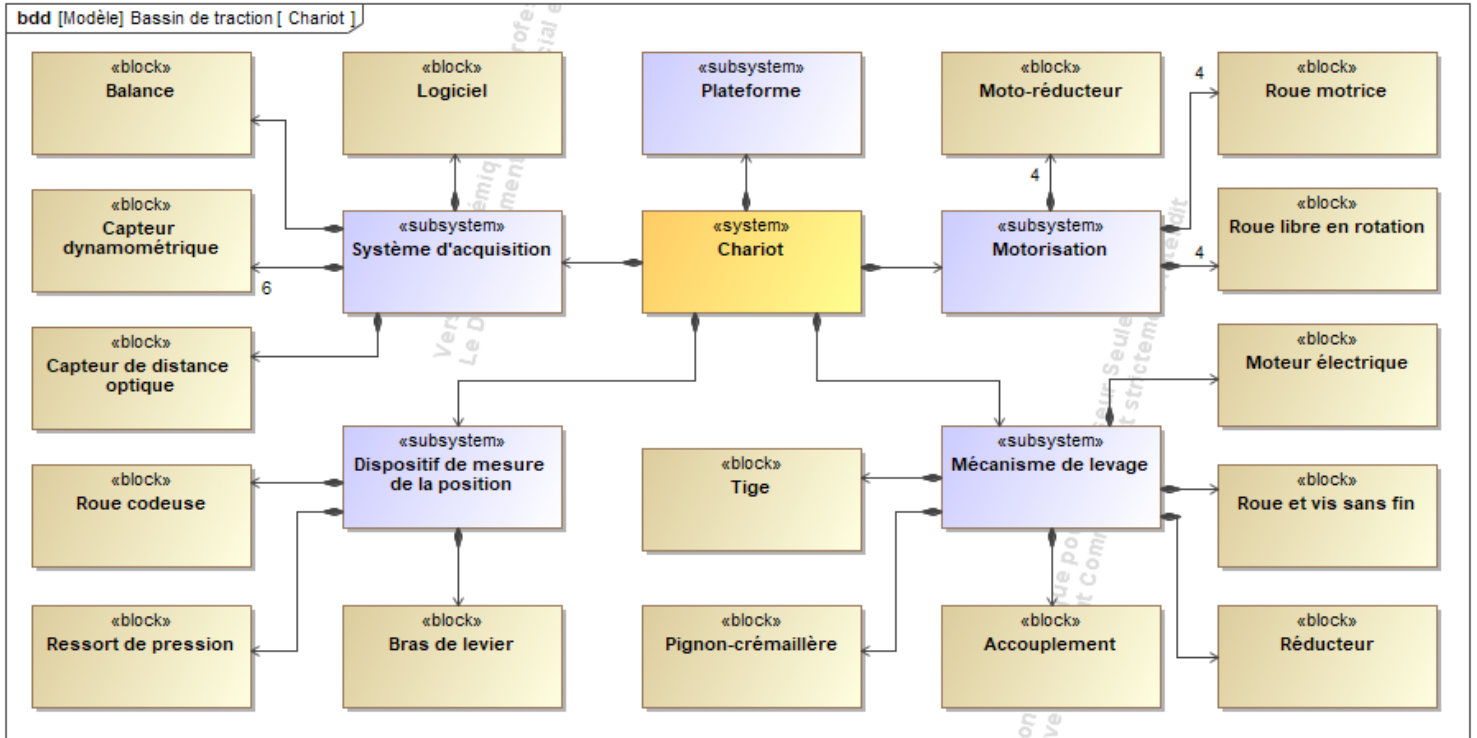
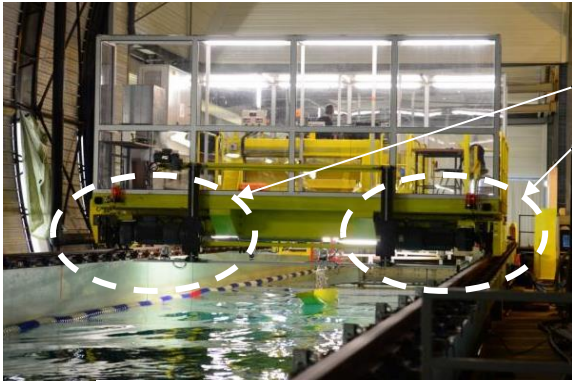


Diagramme partiel de définition des blocs

MODELISATION DU CHARIOT ET DE SON GUIDAGE



La plateforme se déplace sur deux rails (voir ci-contre). Le schéma ci-dessous représente l'architecture du guidage sur un seul rail. Le système est considéré symétrique.

Dans tout l'énoncé, on utilisera la base orthonormée directe $b_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ comme présentée dans la figure ci-dessous.

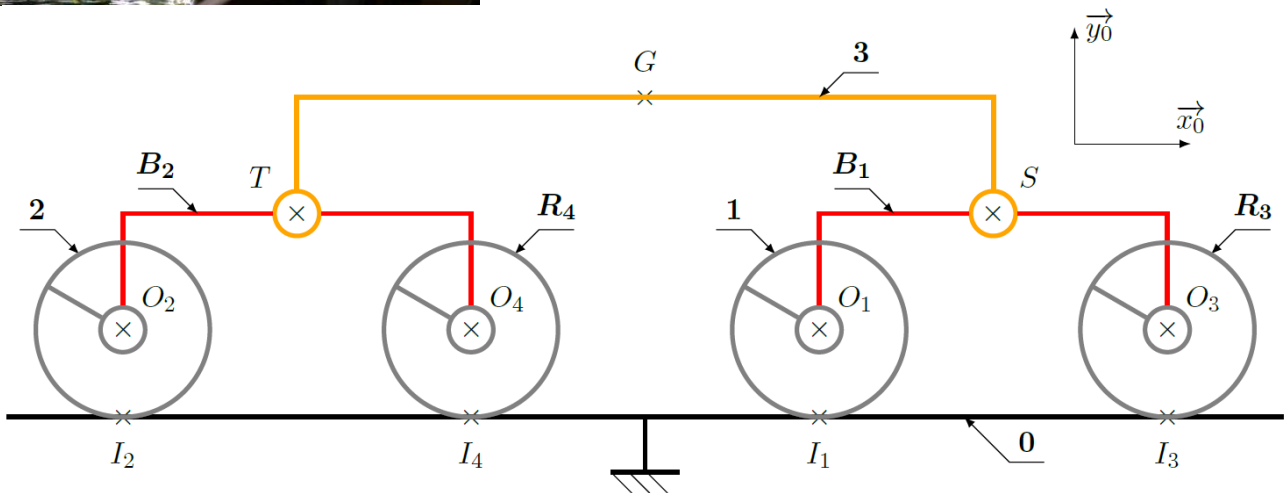


Schéma cinématique complet du chariot

Modélisation du batteur à houle

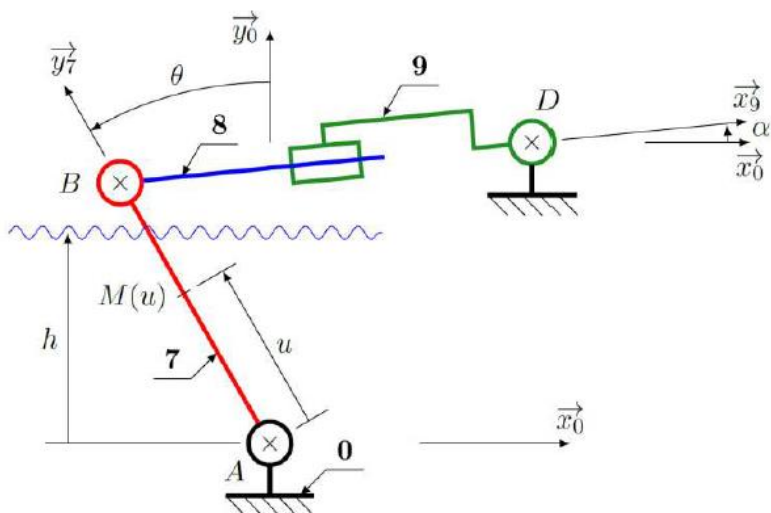


Figure 11 : Schéma cinématique du batteur

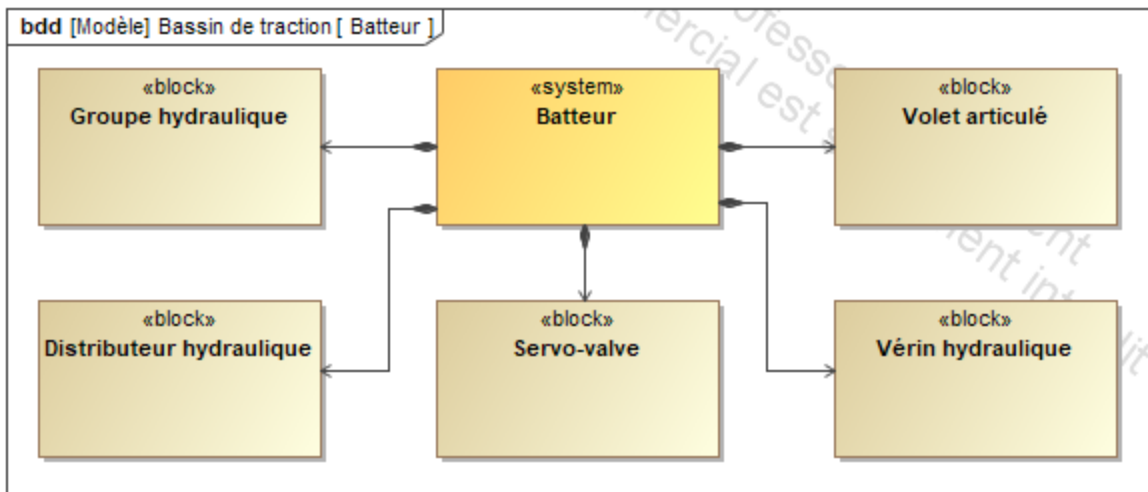


Diagramme de Définition de Blocs du batteur

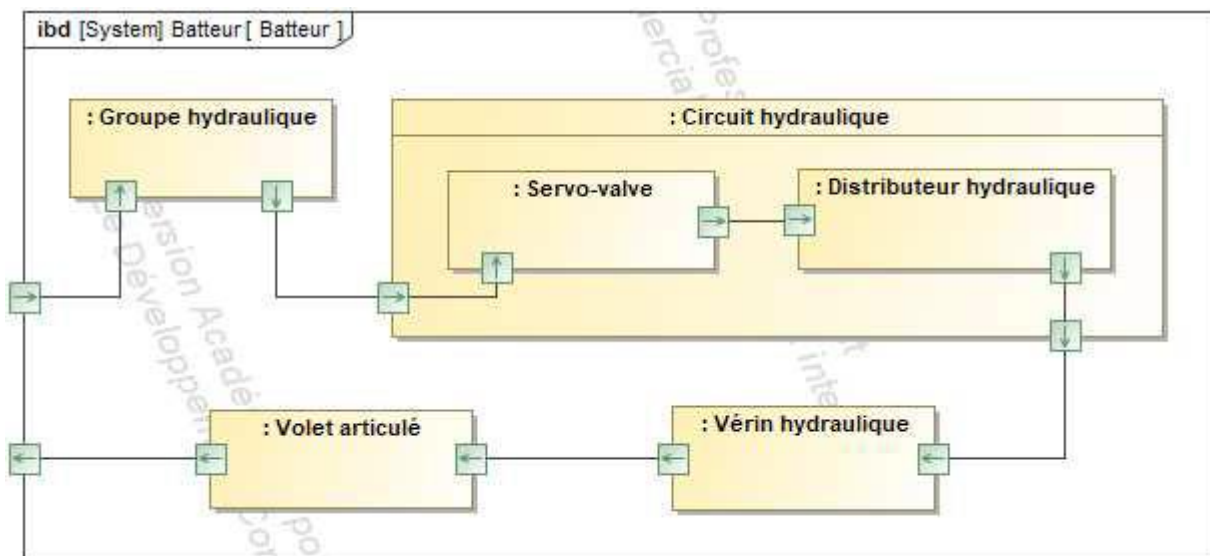
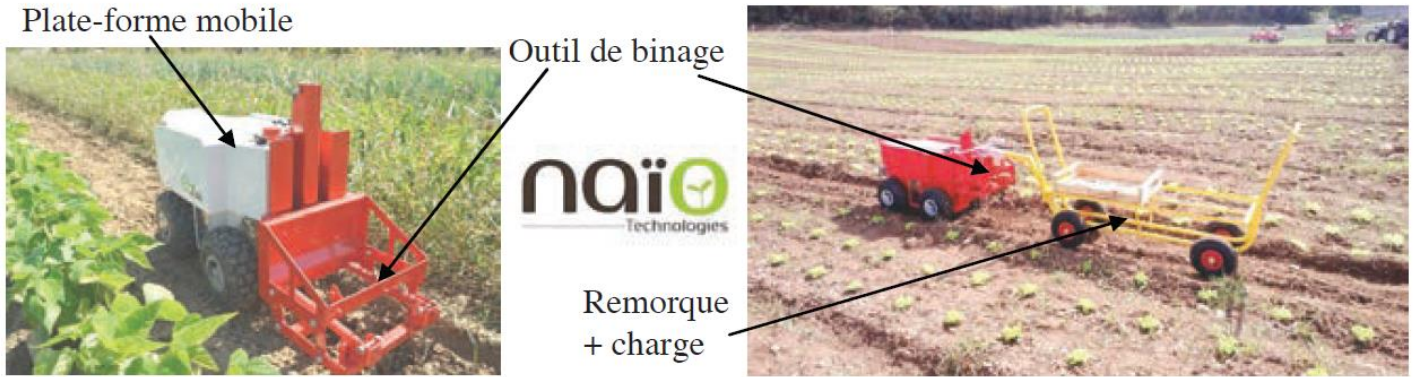


Diagramme de Bloc Interne du batteur

Problème N°5 : robot maraîcher (extrait ccp mp 2016)

Le robot de maraîchage Oz 440 développé par la société Naïo Technologies est un outil autonome agricole, alliant robustesse et écologie, capable d'assister les maraîchers dans les tâches les plus pénibles comme le transport de charges lors des récoltes et le désherbage mécanique à l'aide d'un outil de binage.



Ce robot est constitué d'une plate-forme mobile électrique à **4 roues motrices** sur laquelle sont fixés divers outils et capteurs. La **figure 1** donne la structure du robot sous la forme d'un diagramme de définition de blocs (BDD) avec les propriétés principales de chaque constituant, utiles pour la résolution du problème.

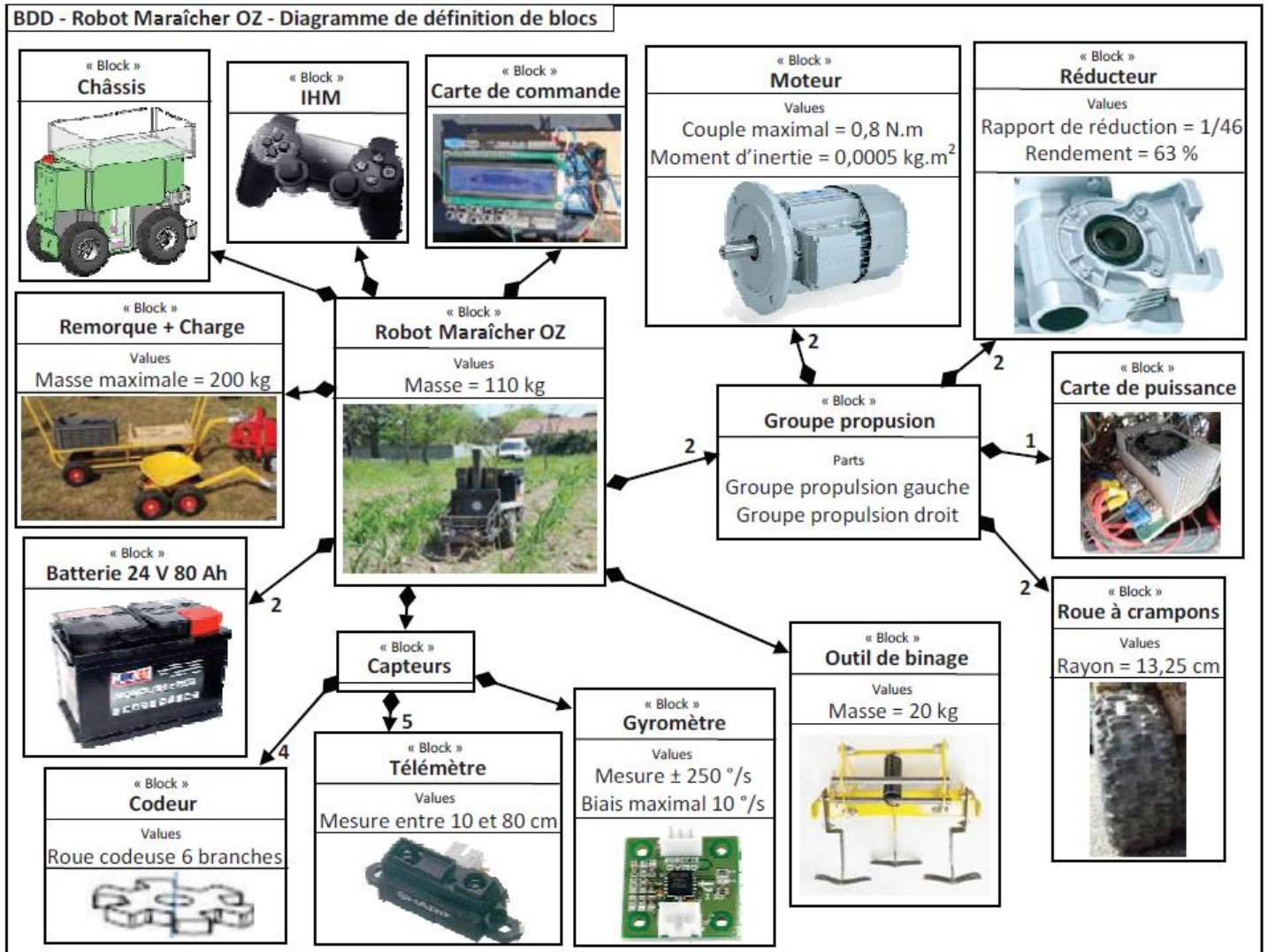


Figure 1 - diagramme de définition de blocs

Ce robot de petite taille évolue directement entre les rangées de cultures pour un travail de précision. Il peut, par exemple, désherber et aussi suivre des personnes lors de la récolte tout en transportant des charges. Bien plus petit qu'un tracteur classique, il ne casse pas la structure naturelle du sol et évite ainsi le phénomène de compaction des

sols provoqué habituellement par les tracteurs ou le piétinement de l'homme. Il roule lentement et passe au plus près des cultures sans risquer de les abîmer. Selon le vieil adage « un binage vaut deux arrosages », le fait de pouvoir utiliser ce robot régulièrement, sans perte de temps, permet de toujours avoir un sol parfaitement biné et ainsi de diminuer les effets d'évaporation de l'eau.

La **figure 2** donne le diagramme partiel des exigences du robot. Les exigences étudiées dans chaque partie du sujet y sont repérées.

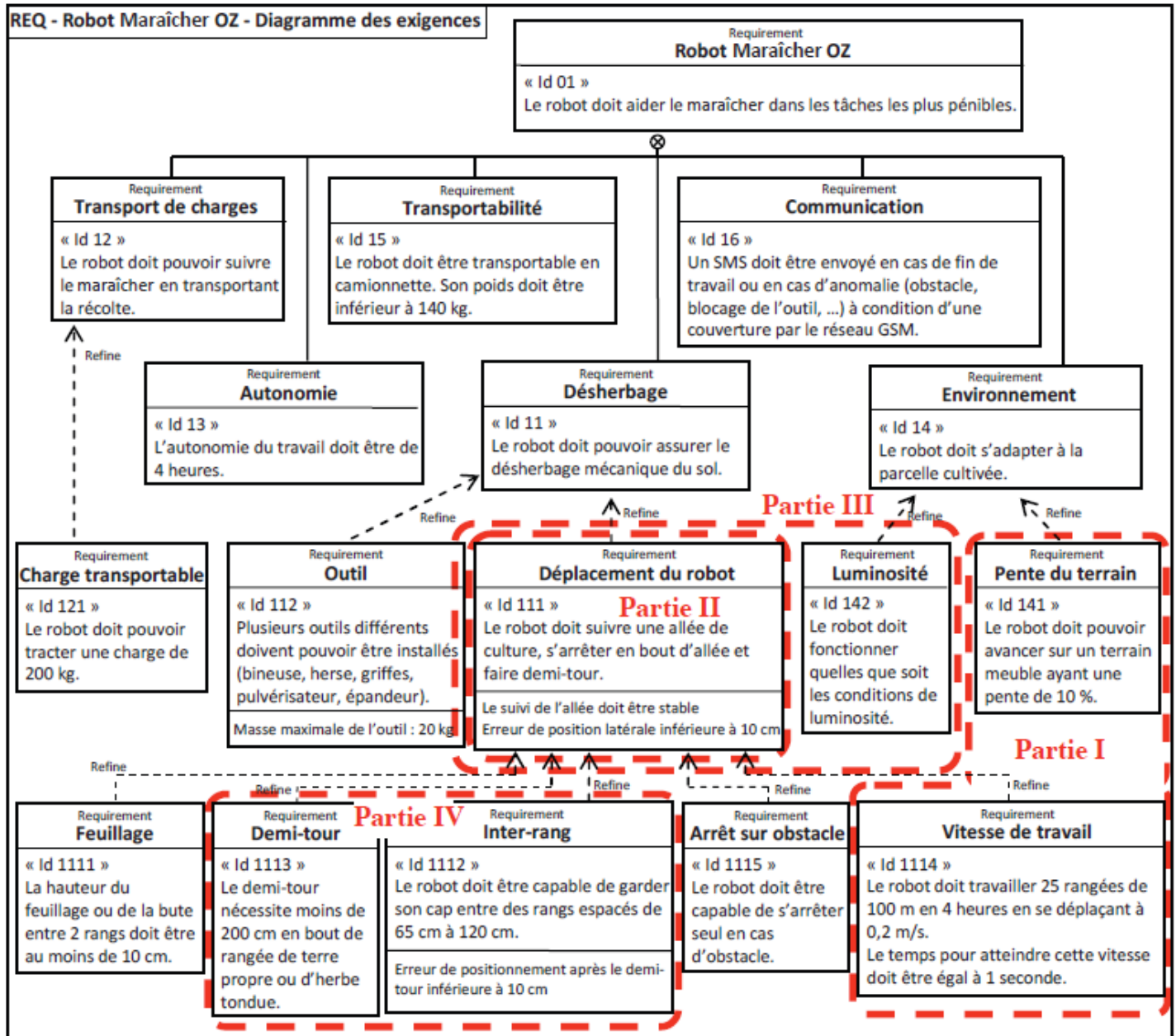


Figure 2 - Diagramme partiel des exigences.

Objectif

L'objectif du sujet, qui comporte à l'origine 4 parties, sera d'analyser si les solutions techniques retenues sur le système permettent de vérifier ou non les exigences du cahier des charges identifiées sur le diagramme des exigences donné **figure 2**. On se limite dans ce problème à la partie I qui traite de la validation des capacités de déplacement.

Validation des capacités de déplacement du robot dans son environnement

Objectif : Dans cette partie, on souhaite vérifier que les couples fournis par les moteurs ont une valeur suffisante pour assurer le déplacement correspondant aux exigences ci-dessus.

Question 1. A l'aide du diagramme de définition de blocs disponible (**figure 1, page 2**), compléter sur le **document réponse DRI** le diagramme correspondant à la chaîne d'énergie de l'ensemble groupe propulsion droit du robot.

Hypothèses de modélisation :

- Le robot se déplace en ligne droite en montée sur une pente de 10 %.
- Le robot est équipé d'un outil de binage et tracte la charge maximale spécifiée dans les exigences du cahier des charges (**figure 2**).
- On suppose qu'il n'y a pas de glissement des roues sur le sol et une équi-répartition des charges sur les roues.
- Les 4 moteurs sont parfaitement équilibrés et délivrent la même puissance.
- Conformément à l'exigence « id 1114 », le robot est commandé en trapèze de vitesse (c'est-à-dire une phase uniformément accélérée, une longue phase de mouvement uniforme et une phase uniformément décélérée). **On se placera dans la partie la plus défavorable du trapèze de vitesse pour le calcul des couples moteurs.**
- Seul le rendement du réducteur de type roue/vis sans fin sera pris en compte. Les autres composants seront supposés parfaits.

Notations :

- Masse du robot sans outil (Plate-forme mobile + 4 roues + 4 moteurs + 4 réducteurs) : \mathbf{M} .
- Rayon des roues : \mathbf{r} .
- Vitesse de rotation de l'arbre moteur : $\boldsymbol{\omega}_m$.
- Moment d'inertie arbre moteur seul suivant l'axe de rotation du moteur : \mathbf{J}_m .
- Pente du terrain : $\boldsymbol{\alpha}$ avec $\alpha = 0,1$ rad.
- Masse tractée : \mathbf{m}_t .
- Masse de l'outil de binage : \mathbf{m} .
- Vitesse du robot par rapport au sol lors de la phase de mouvement uniforme du trapèze de vitesse : \mathbf{V} .
- Accélération du robot par rapport au sol : \mathbf{a} .
- Vitesse de rotation des roues : $\boldsymbol{\omega}_r$.
- Rendement du réducteur : $\boldsymbol{\eta}$.
- Moment d'inertie de l'ensemble $E = (1 \text{ roue} + \text{son réducteur associé})$ suivant l'axe de rotation de la roue : \mathbf{J}_r avec $J_r = 0,38 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.
- Couple fourni par un seul moteur : \mathbf{C}_m .
- Rapport de réduction du réducteur : $\boldsymbol{\rho}$ ($\boldsymbol{\rho} = \frac{\omega_r}{\omega_m}$).

Pour déterminer les couples moteurs, on applique le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble robot + outil de binage + charge tractée.

Question 2. Donner l'expression de l'énergie cinétique du robot avec l'outil de binage et la charge tractée dans son mouvement par rapport au sol.

Question 3. En déduire l'expression de l'inertie équivalente \mathbf{J}_{eq} ramenée sur l'arbre moteur.

Question 4. Calculer la valeur de \mathbf{J}_{eq} en utilisant les données fournies dans le diagramme de définition de blocs (**figure 1**).

Question 5. Déterminer l'expression littérale des puissances des actions mécaniques extérieures.

Question 6. Déterminer l'expression de la puissance d'inter-effort en fonction de \mathbf{C}_m , $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\omega}_m$.

Question 7. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire l'expression du couple moteur \mathbf{C}_m nécessaire pour déplacer le robot en fonction de la pente du terrain, de l'accélération du robot et en fonction des caractéristiques définies dans le diagramme de définition de blocs (**figure 1**) ou dans la partie notations.

Question 8. Calculer la valeur du couple \mathbf{C}_m et conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Problème N°6 : Découpe de tissus (extrait ccp mp 2018)

I. Mise en situation

Le système étudié dans ce sujet est une tête de coupe de tissus conçue et réalisée par la société française Lectra, leader mondial dans la découpe automatisée des tissus.

Un système de découpe automatisé de tissus est composé (figure 1)

- d'une table de découpe sur laquelle le tissu à découper (appelé matelas) est maintenu en position par aspiration
- d'un bras transversal qui se déplace en translation de direction \vec{y}_0 par rapport à la table
- d'une tête de coupe qui se déplace en translation de direction \vec{x}_0 par rapport au bras transversal
- d'un ordinateur qui pilote l'ensemble du système.

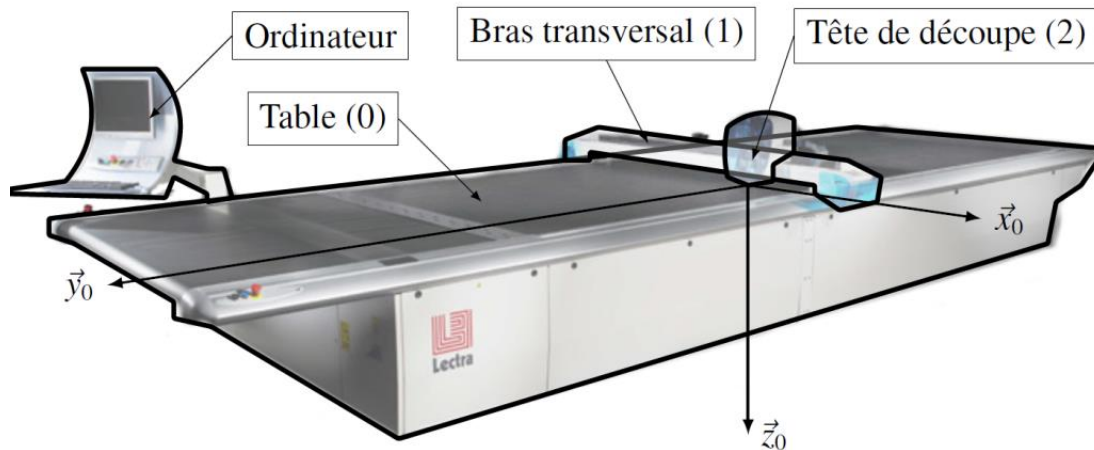
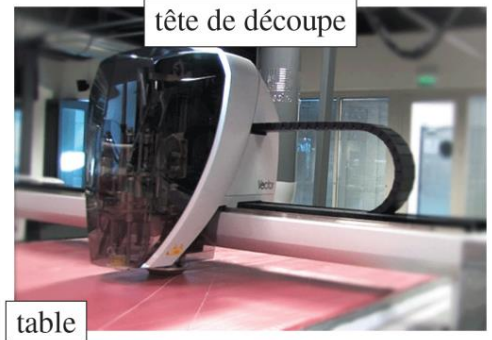


Figure 1 : Structure d'une table de découpe de tissus

II. Fonctionnement mécanique de la tête de découpe

La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle représenté sur la figure 2 où :

- la motorisation (moteur à courant continu) entraîne un excentrique en rotation autour de A
- l'excentrique entraîne la bielle à partir d'une liaison pivot réalisée en B
- la lame est entraînée par la bielle via la liaison pivot en C, le mouvement de la lame est alors une translation alternative.

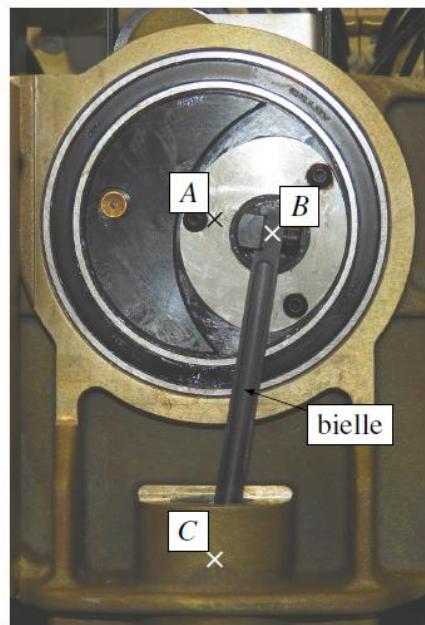
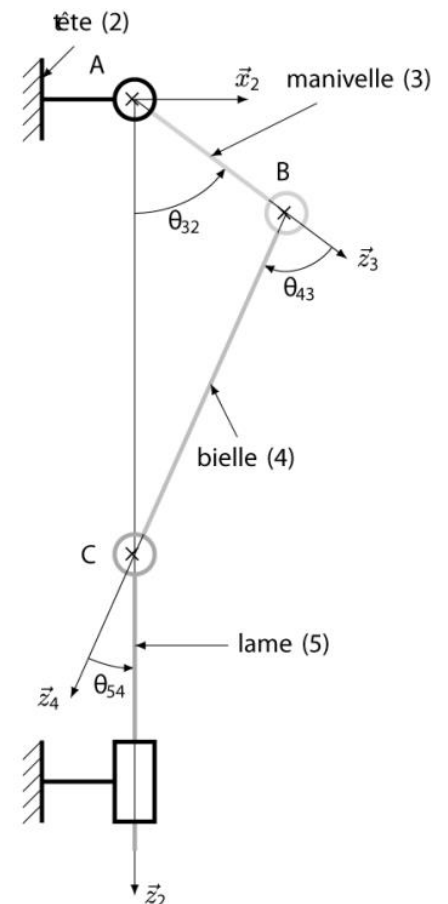


Figure 2 : mécanisme tête de découpe et schéma cinématique plan



Le moteur entraînant la lame possède une vitesse de rotation nominale de 3000 tr/min.

L'évolution de l'effort de coupe relevé sur le système réel pour une vitesse de rotation nominale du moteur est donnée sur la figure 3. Le diagramme des exigences relatif au fonctionnement du système de découpe de tissus est donné en fin de sujet.

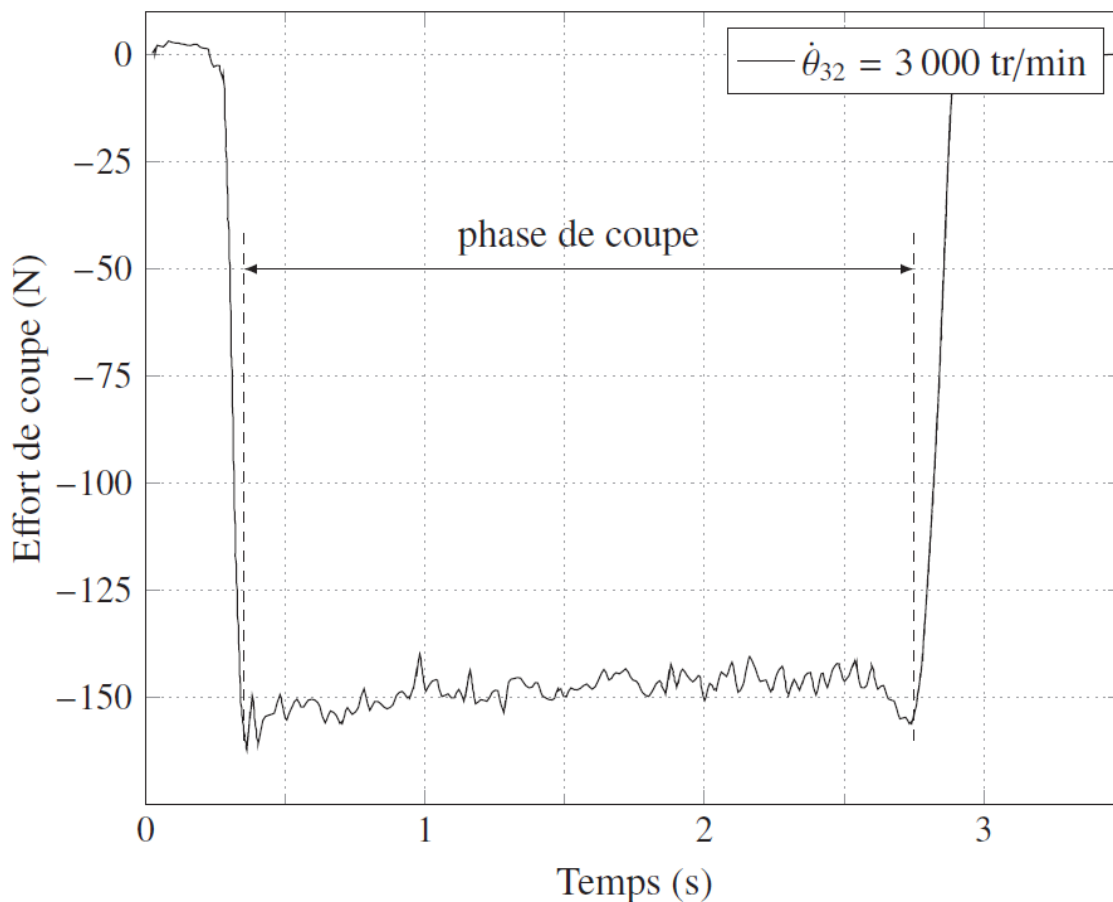


Figure 3 : Evolution de l'effort de coupe

Q1. *Durant la phase de coupe, déterminer les valeurs moyenne, maximale et minimale de l'effort de coupe et conclure sur la validation de l'exigence 1.2.1.1. Justifier.*

On constate sur la figure 3 des vibrations importantes du système à cause des effets inertiels de l'ensemble lame et support de lame.

L'objectif de l'étude est de déterminer le paramètre physique responsable des vibrations et de proposer une solution d'équilibrage permettant de limiter les vibrations de la lame pour valider l'exigence 1.2.2.2.

III. Modélisation du comportement mécanique la tête de coupe

Objectif : modéliser le comportement dynamique de la tête de coupe afin d'identifier un phénomène de vibration néfaste au regard de l'exigence 1.2.2.

III.1. Modélisation du comportement cinématique de la tête de coupe

Objectifs : déterminer la loi entrée/sortie de la chaîne cinématique de la tête de coupe et valider son comportement vis-à-vis des exigences 1.2.2.3 et 1.2.2.4.

La découpe du tissu est réalisée par un mouvement de translation alternative d'une lame par rapport au matelas de tissus. Ce mouvement est obtenu par un système bielle-manivelle dont le schéma cinématique est donné par la figure 2. Les mouvements de translation de la tête de coupe par rapport à la table impliquent que les bases $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ et $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, liées respectivement à la tête de coupe et à la table, sont identiques (figure 2).

Modélisation des liaisons et paramétrage du système :

On associe le repère $\mathcal{R}_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la tête 2, le repère $\mathcal{R}_3 = (A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ à la manivelle 3, le repère $\mathcal{R}_4 = (B, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ à la bielle 4 et le repère $\mathcal{R}_5 = (C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ à la lame 5.

La manivelle 3 est en liaison pivot avec la tête 2, d'axe (A, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{32}(t) = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$.

La manivelle 3 est en liaison pivot avec la bielle 4, d'axe (B, \vec{y}_2) et d'angle $\theta_{43}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_4) = (\vec{z}_3, \vec{z}_4)$.

La bielle 4 est en liaison pivot avec la lame 5, d'axe (C, \vec{y}_0) et d'angle $\theta_{54}(t) = (\vec{x}_4, \vec{x}_2) = (\vec{z}_4, \vec{z}_2)$.

La lame 5 est en liaison glissière avec la tête 2, de direction \vec{z}_2 et de paramètre linéaire $\lambda(t)$.

On pose :

$$\omega_{ij}(t) = \frac{d\theta_{ij}(t)}{dt} = \dot{\theta}_{ij}(t), \overline{AB} = L_3 \vec{z}_3 \text{ avec } L_3 = 12,5 \text{ mm}, \overline{BC} = L_4 \vec{z}_4 \text{ avec } L_4 = 80 \text{ mm et } \overline{AC} = \lambda(t) \vec{z}_2.$$

- Q2.** À l'aide d'une fermeture géométrique angulaire, déterminer la relation entre les paramètres angulaires $\theta_{32}(t)$, $\theta_{43}(t)$ et $\theta_{54}(t)$.
- Q3.** À l'aide d'une fermeture géométrique linéaire, déterminer la relation entre le paramètre $\lambda(t)$, l'angle $\theta_{32}(t)$ et les données géométriques du système.
- Q4.** En déduire l'expression littérale de l'amplitude des oscillations de la lame, notée Δz . Faire l'application numérique et conclure sur le respect de l'exigence 1.2.2.3.
- Q5.** Evaluer le rapport $\left(\frac{L_4}{L_3}\right)^2$ et montrer alors que la loi obtenue à la question 3 peut se mettre sous la forme $\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4$.

Afin de valider cette approximation, les deux fonctions mathématiques ont été tracées sur un tour de l'arbre moteur (figures 4 et 5).

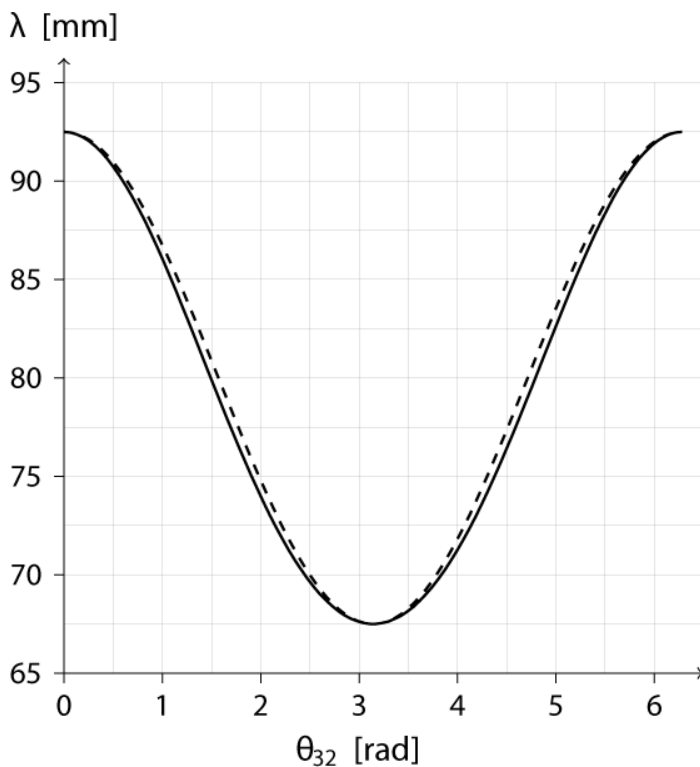


Figure 4 – Évolutions théorique (—) et approximée (---) du paramètre λ

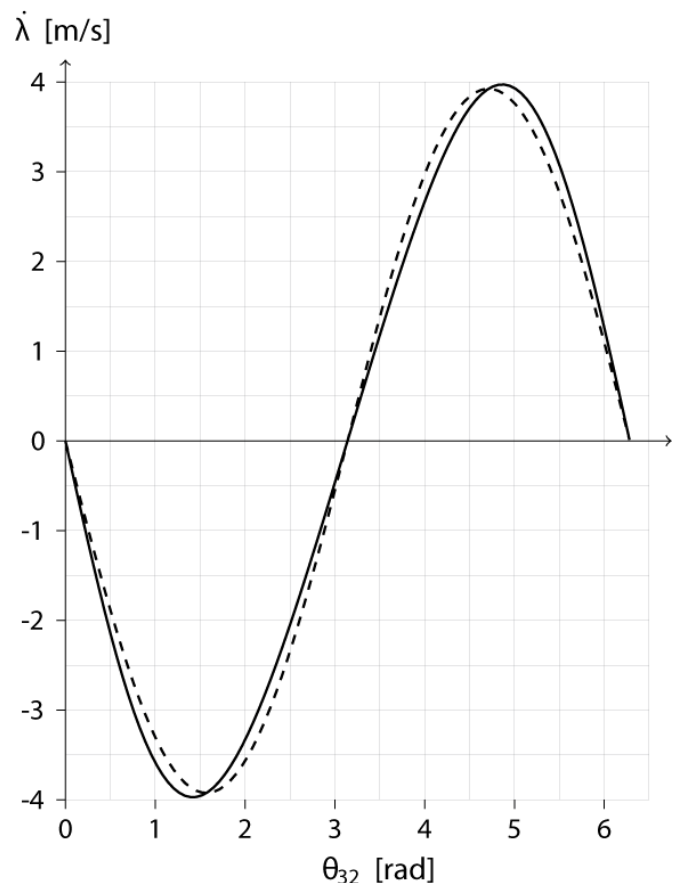


Figure 5 – Évolutions théorique (—) et approximée (---) de la vitesse $\dot{\lambda}$ pour une vitesse $\dot{\theta}_{32} = 3\,000 \text{ tr/min}$

Q6. *Evaluer les écarts entre modèles sur la figure 4 et conclure sur l'adoption de la loi approximée dans la suite de l'étude.*

Afin de valider le critère associé à l'exigence de vitesse de coupe, il est nécessaire de déterminer la loi en vitesse de la lame notée $\dot{\lambda}(t)$.

Q7. *Déterminer l'expression littérale de $\dot{\lambda}(t)$ à partir du modèle simplifié de $\lambda(t)$.*

Cette loi en vitesse simplifiée a été tracée (figure 5) pour être comparée à la loi obtenue à partir du modèle établi en question 3.

Q8. *La simplification de la loi en vitesse permet-elle de valider l'exigence 1.2.2.4. ?*

III.2. Modélisation du comportement dynamique de la tête de coupe

Objectif : identifier la cause des vibrations à partir de la modélisation dynamique du comportement de la tête de coupe.

Hypothèses de modélisation et notations

- le référentiel lié à la table de découpe est supposé galiléen ;
- les liaisons sont supposées parfaites ;
- l'action mécanique du moteur sur la manivelle 3 est modélisée par un couple $\overrightarrow{C}_m = C_m(t)\overrightarrow{y}_2$;
- lors de la coupe, le matelas de tissus exerce une action mécanique sur la lame

$$\vec{F}_{\text{matelas} \rightarrow \text{lame}} = F_c \cdot \vec{z}_0 \quad \text{avec } F_c \text{ l'effort de coupe.}$$

- On suppose V_a la vitesse d'avance du bras par rapport à la table nulle. L'effort d'avance est donc considéré nul : $F_a \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}$
- la lame, en mouvement de translation par rapport à la table, a une vitesse notée : $\vec{V}_{\text{lame}/\text{table}} = \dot{\lambda}(t)\vec{z}_0$
 $\dot{\lambda}(t)$ la vitesse de coupe telle que $\dot{\lambda}(t) = -L_3\omega_{32} \sin \theta_{32}(t)$;
- l'effet de la pesanteur est négligeable devant les autres actions mécaniques ;
- le moment d'inertie suivant l'axe (A, \vec{y}_2) de la manivelle, de masse $M_3 = 0,350 \text{ kg}$, ramenée à l'arbre moteur est $J_3 = 1,2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; Cette manivelle a une géométrie symétrique par rapport au plan $(A, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$.
- la masse et l'inertie de la bielle 4 sont négligées ;
- la masse de l'ensemble mobile lié à la lame est $M_5 = 0,1 \text{ kg}$.

Q9. *Donner la forme de la matrice d'inertie de la manivelle au point A dans le repère de celle-ci.*

Q10. *Réaliser un graphe des liaisons du mécanisme étudié et faire apparaître sur celui-ci les actions mécaniques extérieures.*

En régime permanent, l'expression du couple moteur est :

$$C_m = [F_c + M_5 L_3 \dot{\theta}_{32}^2 \cos \theta_{32}] L_3 \sin \theta_{32}$$

Q11. *Donner la démarche, solide(s) isolé(s), théorème(s) utilisé(s) pour chaque isolement et vecteur(s) de projection, permettant d'obtenir l'équation de mouvement ci-dessus.*

Q12. *Développer les équations scalaires issues de la démarche proposée question 11. La résolution complète n'est pas demandée.*

Q13. Pourquoi le couple moteur n'est-il pas constant en régime permanent ? Quelle en est la conséquence sur le comportement du système ?

Q14. Expliquer comment a été mesuré l'effort de coupe dont l'évolution est donnée figure 3.

IV. Optimisation du comportement dynamique de la tête de coupe

Objectifs : identifier le paramètre physique responsable des vibrations et proposer une solution d'équilibrage permettant de valider l'exigence 1.2.2.2.

IV.1. Analyse théorique du phénomène vibratoire

Objectif : identifier la pièce à l'origine des vibrations à partir du modèle de comportement dynamique de la tête de coupe.

Hypothèses de modélisation et notations :

- seules les vibrations créées par les effets inertiels des pièces sont étudiées dans cette partie ;
- le problème est considéré plan, dans le plan de normale \vec{y}_0 ;
- l'étude sera faite en régime permanent $\dot{\theta}_{32} = cste$;
- soit le point G_3 , centre d'inertie de la manivelle 3 de masse M_3 tel que $\overrightarrow{AG_3} = a_3 \vec{z}_3$;
- soit le point G_5 , centre d'inertie de la lame 5 de masse M_5 tel que $\overrightarrow{AG_5} = a_5 \vec{z}_0$;
- l'inertie et la masse de la bielle 4 sont négligées ;
- on note $\vec{V}(P \in i/j)$ la vitesse d'un point P lié au solide i en mouvement par rapport au solide j ;
- on note $\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{i \rightarrow j} \\ \vec{M}_{P, i \rightarrow j} \end{array} \right\}_P$ le torseur des actions mécaniques du solide i sur le solide j au point P ;
- on suppose $V_a = 0 \text{ m/s}$.

Valeurs numériques

$$a_3 = 0,5 \text{ mm}$$

$$a_5 = 120 \text{ mm}$$

$$\omega_{32} = \dot{\theta}_{32} = 3\,000 \text{ tr/min}$$

$$M_3 = 350 \text{ g}$$

$$M_5 = 100 \text{ g}$$

Q15. Déterminer les expressions des vecteurs vitesses $\vec{V}(G_3 \in 3/2)$ et $\vec{V}(G_5 \in 5/2)$ en fonction de $\dot{\lambda}$, $\dot{\theta}_{32}$ et des données géométriques.

Q16. En déduire l'expression, dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, de la résultante dynamique de l'ensemble $S = \{3, 4, 5\}$ dans le référentiel lié à la table, notée $\overrightarrow{R}_d(S/0)$.

On rappelle l'hypothèse de modélisation adoptée : $\lambda(t) = L_3 \cos \theta_{32}(t) + L_4$ avec $L_3 = 12,5 \text{ mm}$ et $L_4 = 80 \text{ mm}$.

Q17. Déterminer l'expression du maximum de chacune des composantes de la résultante dynamique $\overrightarrow{R}_d(S/0)$ sur \vec{x}_2 et \vec{z}_2 . Faire les applications numériques.

Q18. En comparant l'expression des deux maxima, identifier la pièce qui semble être à l'origine des vibrations.

IV.2. Modélisation du comportement mécanique de la tête de coupe en version améliorée

Objectif : réaliser la démarche de dimensionnement de l'équilibrage de l'équilibrage dynamique en translation de la tête de coupe.

Afin d'améliorer les conditions de coupe (moins de vibrations, effort de coupe constant), Lectra propose un modèle de tête de coupe plus évolué.

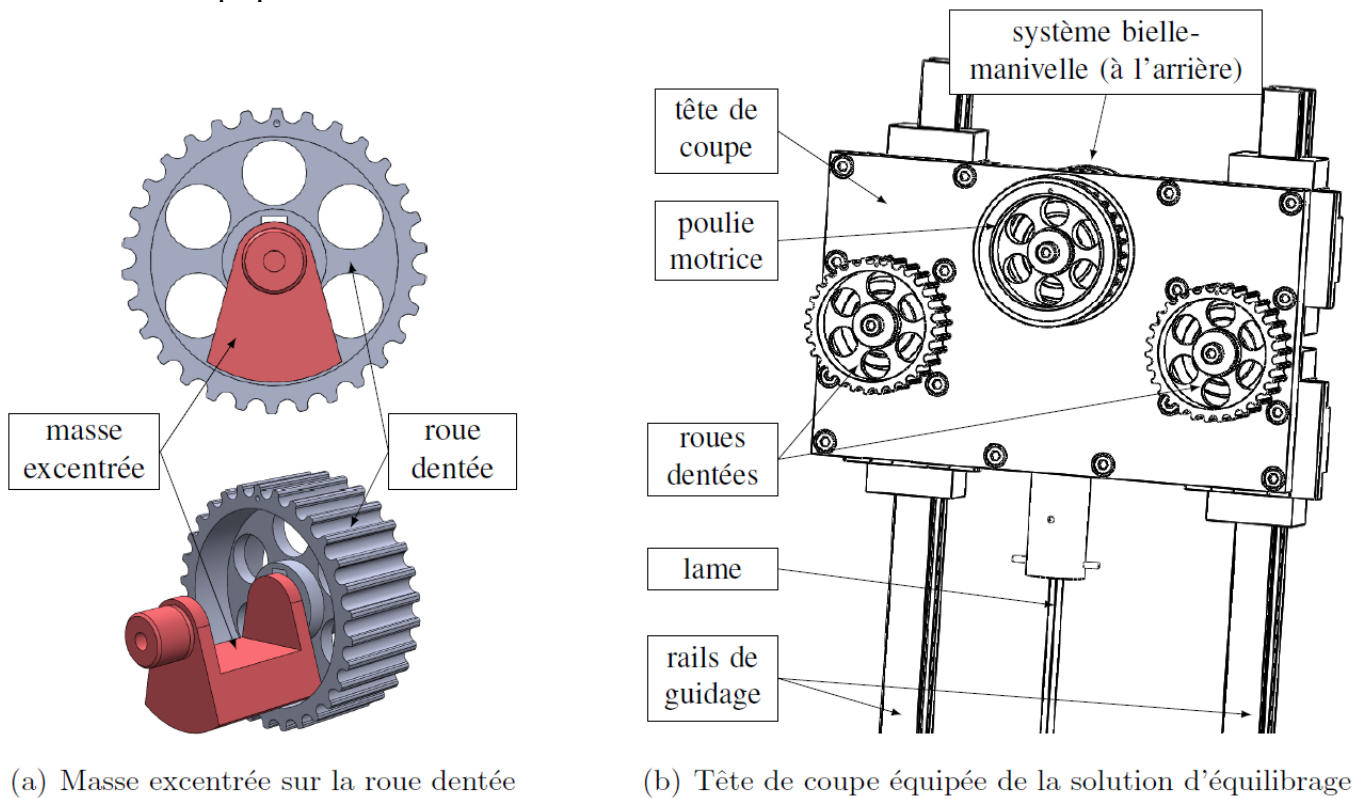


Figure 6 : Solution d'équilibrage retenue pour la tête de coupe (courroie non représentée)

Il intègre deux masses excentrées montées sur des roues dentées (figure 6 a)), dont le mouvement de rotation, synchronisé sur celui du moteur par le biais d'une courroie crantée, doit atténuer les vibrations verticales du système de coupe. L'implantation de ce dispositif est présentée sur la (figure 6 b)).

Différentes propositions de montage des masses excentrées sont données sur la figure 7 ci-dessous.

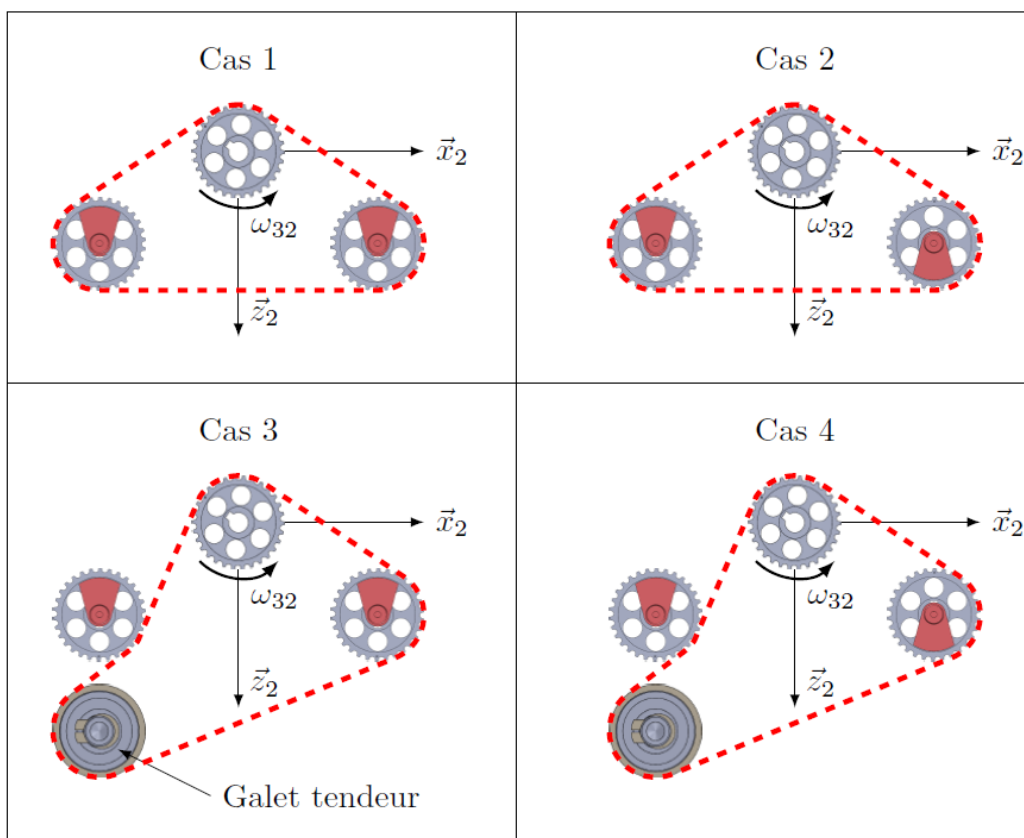


Figure 7 : Différentes configurations pour l'installation des masselottes

- Q19.** Pour chacune des configurations (cas 1 à 4) et pour le sens de rotation du moteur donné, préciser le sens de rotation des masses excentrées (roues dentées droites et gauche).
- Q20.** Pour chacune des configurations, préciser si les vibrations verticales peuvent être supprimées. Justifier.
- Q21.** Quelle configuration faut-il retenir pour assurer le moins de vibrations dans le système de coupe ? Justifier.

Pour simplifier l'étude, la masse excentrée sera considérée comme une masse ponctuelle m située à une distance $r = 8 \text{ mm}$ de son axe de rotation, dont le paramétrage est donné sur la figure 8.

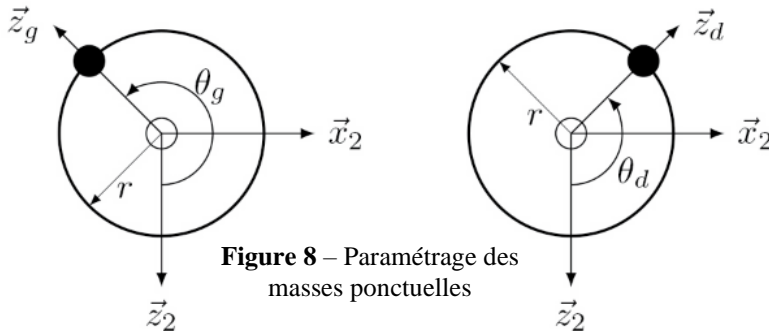


Figure 8 – Paramétrage des masses ponctuelles

L'étude sera menée en régime permanent : $\ddot{\theta}_g = \ddot{\theta}_d = 0$ avec $|\dot{\theta}_d| = |\dot{\theta}_g| = |\dot{\theta}_{32}|$.

- Q22.** Déterminer les composantes suivant \vec{x}_2 et \vec{z}_2 de la résultante dynamique des masses excentrées dans le référentiel lié à la table.
- Q23.** En déduire la relation entre θ_d et θ_g pour que les masses excentrées ne génèrent pas de vibration suivant \vec{x}_2 .
- Q24.** En déduire l'expression de la masse m pour respecter au mieux l'exigence 1.2.2.2. Faire l'application numérique.

IV.3. Validation de l'amélioration de la tête de coupe

Objectif : valider la solution d'équilibrage dynamique retenue pour la tête de coupe au regard de l'exigence 1.2.2.2.

La figure 9 présente une comparaison d'effort de coupe pour les deux types de tête de coupe initiale et améliorée avec une vitesse moteur respective de 3 000 tr/min et 6 000 tr/min.

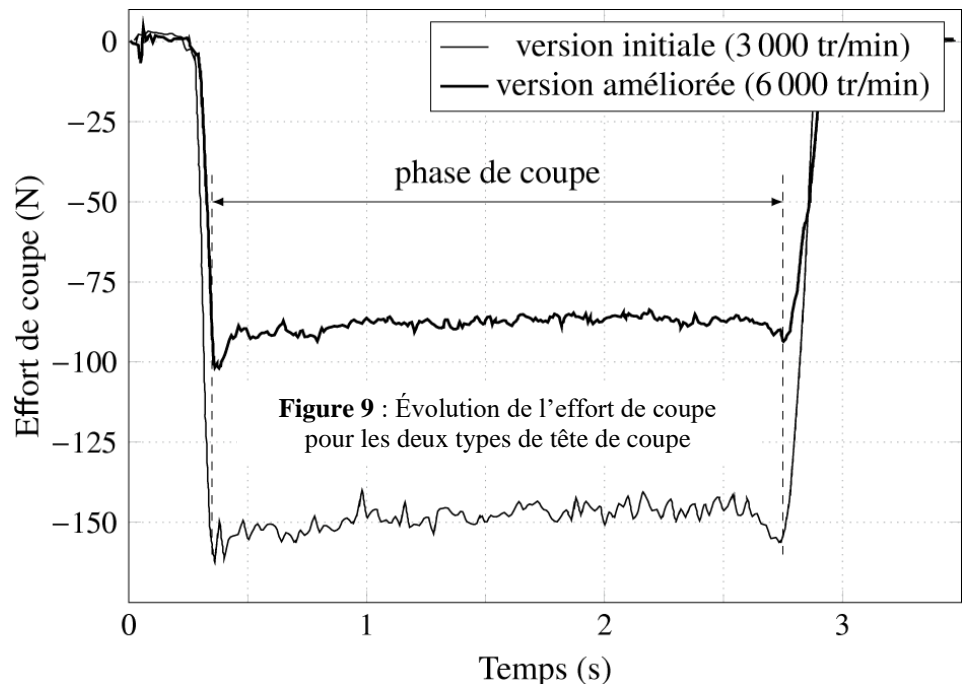


Figure 9 : Évolution de l'effort de coupe pour les deux types de tête de coupe

- Q25.** D'après l'expression de la résultante dynamique de la question Q17, comment devrait évoluer l'effort de coupe en régime permanent en fonction de la vitesse de rotation du moteur ?
- Q26.** Conclure sur l'utilité des masses excentrées mises en place sur la tête de coupe en version améliorée.
- Q27.** (facultatif) Estimer le gain en consommation électrique entre les deux conditions d'essai (3000 et 6000 tr/min)(Approximations et hypothèses à préciser).

V. Optimisation de la réalisation d'un patron (partie informatique)

Les questions d'informatique doivent être traitées en langage Python.

Objectif : concevoir des fonctions informatiques nécessaires à un programme optimisant la position de pièces de tissus sur un plan de coupe afin de respecter l'exigence 1.3.2.

Avant de passer à l'étape de découpe du matelas de tissus, il est nécessaire pour le fabricant de réaliser un plan de coupe. Le but principal de ce plan est une utilisation minimale de tissus pour un maximum de pièces. Les principales étapes de la réalisation de ce plan sont :

- choix des dimensions du matelas,
- choix des formes des pièces,
- choix des critères de performances : temps de découpe minimal, perte minimale, etc.,
- mise en place manuelle ou au hasard des premières pièces sur le plan (généralement les plus grandes),
- exécution d'un algorithme de mise en place des autres pièces suivant les critères d'optimisation.

Nous nous intéresserons ici uniquement au dernier point et, plus particulièrement, à l'algorithme de gestion de non-recouvrement des pièces pour la réalisation du plan de coupe.

Principe général

La figure 9 présente le résultat issu d'un algorithme d'optimisation de placement de pièces de tissus nécessaires à la réalisation de pantalons. La solution à ce type de problème d'optimisation n'est généralement pas unique et l'aspect aléatoire de mise en place des pièces intervient dans de nombreux types d'algorithmes. Une fois les plus grandes pièces mises en place, l'algorithme place au hasard d'autres pièces et vérifie si elles se superposent aux pièces déjà présentes. Dans le cas d'une superposition, l'algorithme détermine s'il est possible de décaler la pièce pour résoudre le problème ou s'il est préférable de la placer ailleurs.

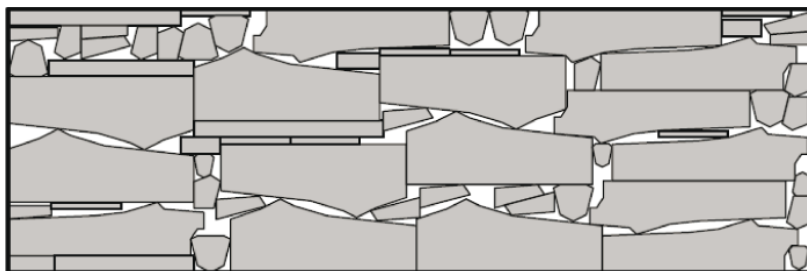


Figure 9 : Exemple de plan de coupe optimisé pour la réalisation de pièces de pantalons

Gestion du non-recouvrement des pièces

Une des méthodes fréquemment utilisées pour tester le recouvrement de pièces est basée sur les polygones de non-recouvrement (*Not-Fit Polygon, NFP*).

Soient deux polygones P_1 et P_2 . Le polygone P_1 est considéré comme fixe et le polygone P_2 comme glissant (ici, on considère uniquement une translation du polygone dans le plan). La position de P_2 est repérée à l'aide d'un point de référence, représenté par un point noir sur la figure 10. Les polygones de non-recouvrement, NFP, seront définis par rapport à ce point de référence. Le polygone de non-recouvrement définit la trajectoire du point de référence tel que les deux polygones P_1 et P_2 soient en contact tout en conservant P_2 à l'extérieur de P_1 . Si le point de référence de P_2 est contenu à l'intérieur de ce polygone, alors il y a collision entre P_1 et P_2 .

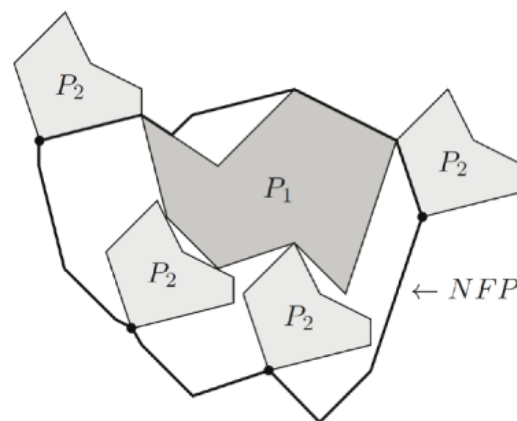


Figure 10 :- Polygone de non-recouvrement NFP

Dans le cas où les deux polygones sont convexes, le calcul des polygones de non-recouvrement est relativement simple. Les différentes étapes du calcul sont (figure 11) :

- les segments du premier polygone sont orientés dans le sens anti-horaire et ceux du deuxième polygone dans le sens horaire ;
- l'ensemble des segments orientés des deux polygones est translaté vers un seul et même point, où il va être ordonné suivant la pente des segments ;
- l'ensemble des vecteurs ordonnés est enfin concaténé pour former le polygone de non-recouvrement. Ce dernier comportera au maximum $m + n$ segments, avec m et n désignant le nombre de segments de chacun des deux polygones.

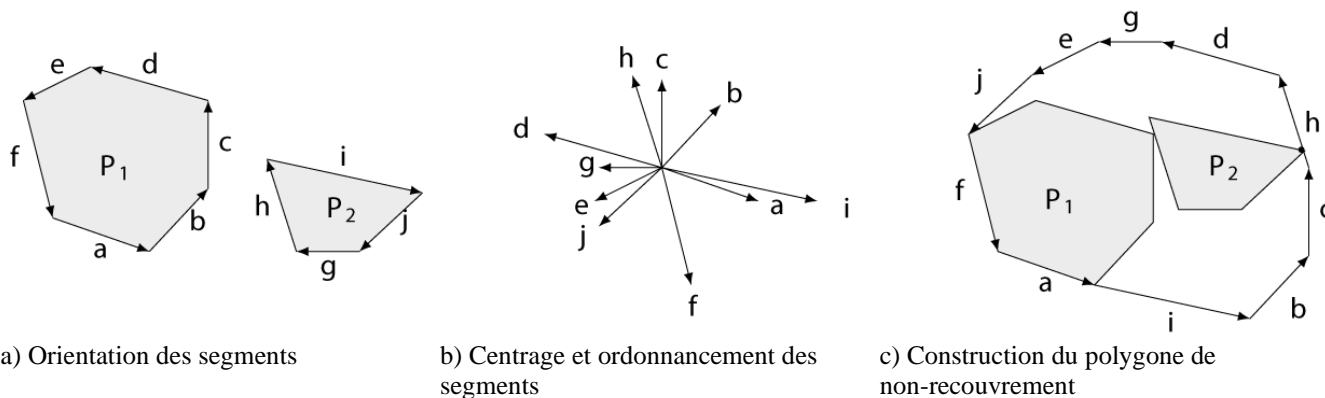


Figure 11 : Construction du polygone de non-recouvrement dans le cas de deux polygones convexes

Nous nous proposons ici de réaliser l'algorithme permettant la construction du polygone de non-recouvrement pour deux polygones convexes P_1 et P_2 et de vérifier le critère de non-recouvrement (exigence 1.3.2.2).

Notations

Chaque polygone P_i est défini par l'ensemble de ses points ordonnés dans le sens anti-horaire. Ainsi, au polygone P_1 de la figure 11 correspondra une liste de dimensions 2×7 , notée P_1 , reprenant l'abscisse et l'ordonnée de chacun des sommets qui le composent (le dernier sommet correspond au premier pour fermer le polygone). Les coordonnées du premier point correspondent toujours à l'origine $(0, 0)$.

On considère que les procédures $Orientation(A, B)$ et $Norme(A, B)$ permettent respectivement de déterminer l'orientation (comprise entre 0 et 2π) et la norme du vecteur \overline{AB} , pour lesquelles les points A et B sont pris comme paramètres.

V.1 . Construction du polygone de non-recouvrement

Objectif : définir un programme qui permet la construction d'un polygone de non-recouvrement à partir de deux polygones convexes donnés.

On considère que les polygones P_1 et P_2 sont déjà définis dans le programme.

- Q28.** Proposer un programme qui permet de construire la liste des segments du polygone de non-recouvrement, $segNFP$, où $segNFP[i][0]$ correspond à l'orientation du $i^{ème}$ segment du polygone P_1 puis P_2 et $segNFP[i][1]$ à sa norme. On rappelle que le polygone P_2 doit être « lu » dans le sens inverse de P_1 et que l'ordonnancement des segments n'est pas pris en compte dans cette question.

Afin de réaliser l'ordonnancement des segments de $segNFP$ suivant le critère d'orientation croissante, on se propose d'utiliser la méthode tri de l'algorithme donné, dans le document réponse, proposé pour un tableau $tab[N]$ de N éléments.

- Q29.** Compléter l'algorithme du document réponse.

- Q30.** Quel nom porte cette méthode de tri ? Quelle en est la complexité dans le pire des cas et dans le meilleur des cas ?

Il ne reste plus qu'à construire le polygone NFP, c'est-à-dire établir la liste de ses points successifs comme décrit sur la figure 11 c. On considère $segNFP_tri$ la liste des segments orientés de $segNFP$ déjà réalisée via la méthode de tri précédente.

- Q31.** Proposer un programme permettant d'obtenir la liste des points de coordonnées (x, y) du polygone NFP.
- Q32.** Quelle est la complexité de la méthode globale de construction du polygone NFP dans le meilleur et dans le pire des cas ?

V.2 . Condition de non recouvrement

Objectif : définir le programme de test de recouvrement de deux polygones.

Le polygone de non recouvrement étant créé, il faut maintenant tester si la polygone P_2 , dans sa position imposée par l'algorithme principal, ne se superpose pas au polygone P_1 , c'est-à-dire, vérifie qu'aucun des points du polygone P_2 ne se trouve à l'intérieur du polygone P_1 .

Un des critères possibles est de montrer que si un point est strictement à l'intérieur d'un polygone, alors la somme des angles orientés formés par ce point et chacun des sommets consécutifs du polygone est nulle (ou égale à 2π) (figure 12).

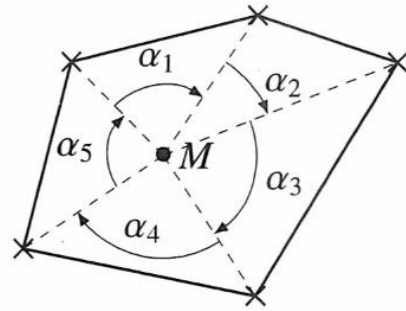


Figure 12 : Test d'appartenance d'un point à un polygone

- Q33.** Déterminer l'algorithme de la fonction *TestPoly* qui prend come arguments un point test M de coordonnées $[x, y]$ et un polygone *poly*, qui qui calcule la somme des angles orientés et qui renvoie l'information *TRUE* dans le cas où le point est strictement à l'intérieur du polygone, et *FALSE* sinon. Pour traiter cette question, vous utiliserez un maximum les fonctions déjà définies.

ANNEXES

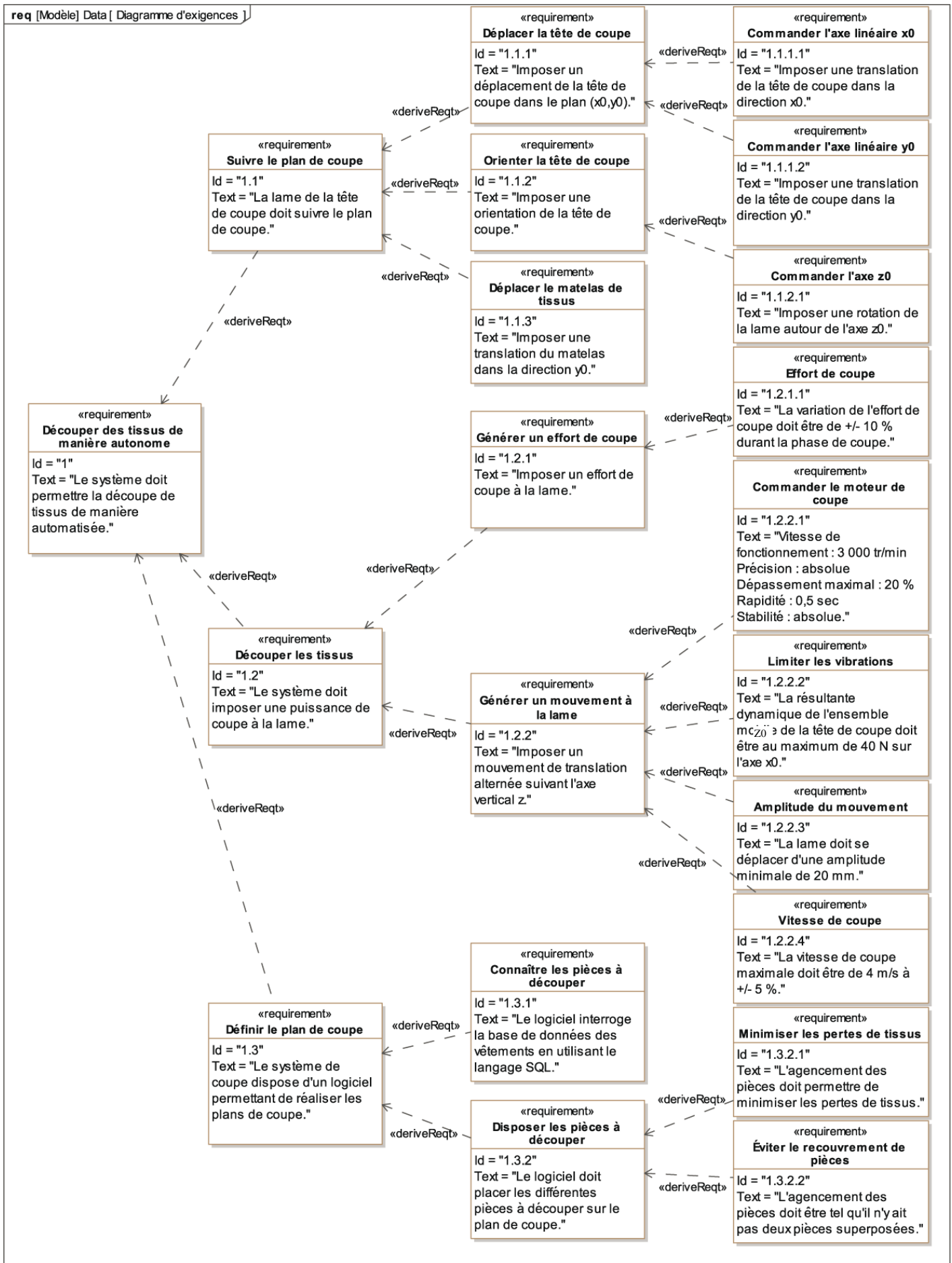


Diagramme des exigences

Problème N°7 : Giropode Hublex (extrait ccp mp 2020)

Présentation générale

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... Lorsque ces lieux sont de grande taille. La **figure 1** montre un exemple d'utilisation dans l'entrepôt d'une entreprise de logistique.

Il est en effet prouvé que les déplacements piétons sur les lieux de travail peuvent générer, s'ils sont répétitifs, des fatigues extrêmes ainsi que des troubles musculo-squelettiques. Il n'est pas rare, par exemple, qu'au cours d'une journée, des employés marchent plusieurs kilomètres sur leur lieu de travail, parfois sous la forme de micro-déplacements. C'est dans ce contexte qu'a été conçu, en France, le Hublex.

Ce gyropode doit permettre de réduire la fatigue des collaborateurs afin d'augmenter leur bien-être. Sa particularité est d'avoir été spécifiquement créé pour s'intégrer dans un environnement de travail grâce à des caractéristiques techniques qui le différencient des gyropodes classiques :

- Prise en main en moins de 5 minutes.
- Maniabilité optimisée.
- Faible largeur, inférieure à 40 cm.
- Léger, moins de 12 kg.
- Utilisable 24 h/24 grâce à sa batterie interchangeable.

On peut voir, **figure 2**, une vue générale du produit. Les principales exigences du système sont présentées dans le diagramme d'exigences (voir **document réponse**).

Description du produit

Le Hublex se caractérise par une conception originale alliant une structure et une motorisation à la fois épurées mais aussi très modernes (voir **figure 3**). Le châssis est constitué de pièces évidées et les roues sont sans moyeu ("hubless" en anglais). La liaison pivot entre chaque roue et le châssis est astucieusement réalisée par l'intermédiaire de liaisons quasi ponctuelles, ce qui permet de limiter le coût et la quantité de matière nécessaire à sa réalisation.

Chaque roue possède sa propre motorisation constituée d'une machine synchrone avec autopilotage permettant de s'affranchir de l'utilisation d'un réducteur. La transmission se résume à un galet directement lié à l'arbre moteur entraînant la roue (voir **figure 4**).

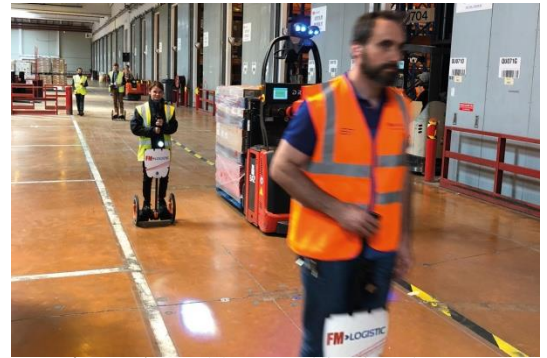


Figure 1 - Hublex en utilisation dans une entreprise de logistique

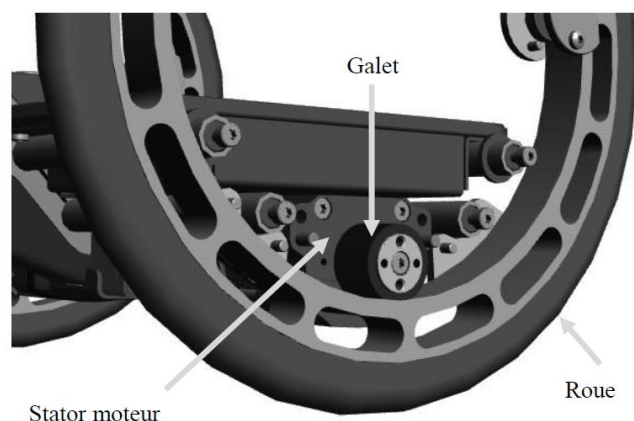


Figure 2 - Vue générale du Hublex



Croissant de guidage

Figure 3 - Vue extérieure de la structure



Stator moteur

Galet

Roue

Figure 4 - Détail de la transmission par galet (sans croissant de guidage)

Principe de fonctionnement général

Les principaux composants constituant un Hublex sont rassemblés dans le diagramme de bloc interne (**figure 5**). Le pilote commande la direction et la vitesse. Pour avancer ou reculer, il influence sur l'inclinaison du châssis du Hublex en se penchant en avant ou en arrière. Cette inclinaison, mesurée grâce à une centrale inertielle, correspond à une consigne d'accélération imposée par le pilote. Lorsqu'il se penche, l'équilibre de l'ensemble {Hublex + pilote} est assuré par le Hublex lui-même grâce à un asservissement visant à le redresser.

La trajectoire du Hublex est, quant à elle, imposée par le pilote à l'aide d'une poignée située au bout du manche qu'il tourne en fonction de la direction souhaitée. Ainsi, la vitesse de chaque moteur est construite à partir de ces deux commandes. C'est la carte de contrôle qui génère la consigne d'intensité électrique imposée au moteur par l'intermédiaire d'un onduleur situé dans la carte de puissance.

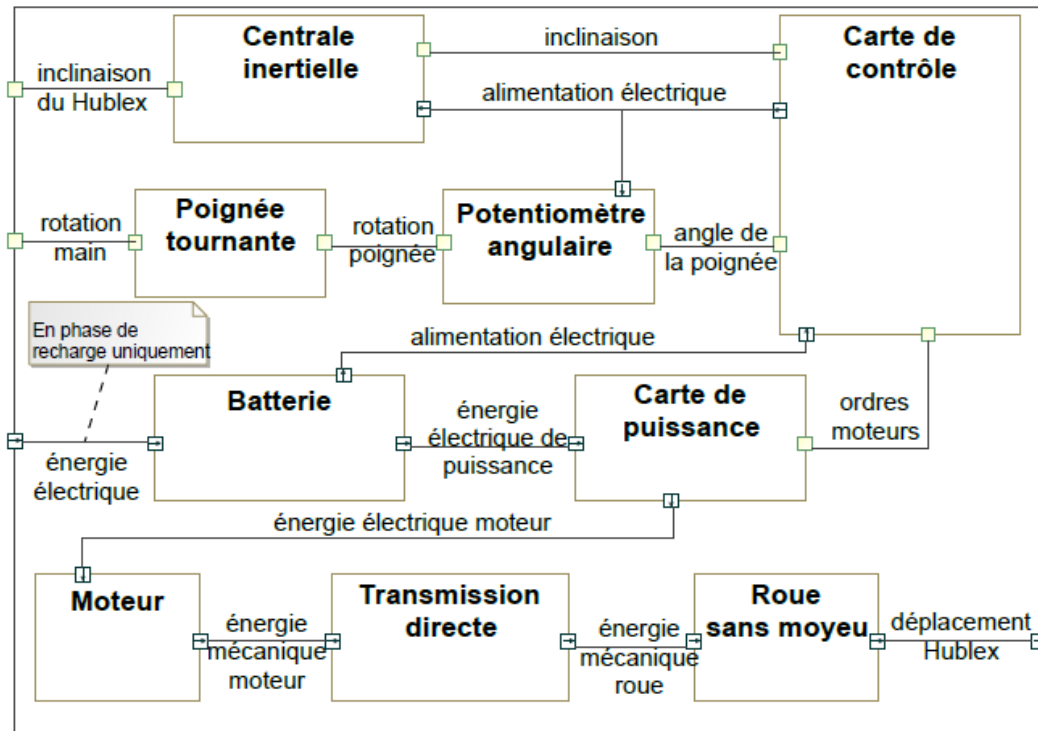


Figure 5 - Diagramme de bloc interne

- Q1.** Compléter le schéma fonctionnel du DRI, en précisant le nom des composants associés aux fonctions, ainsi que le type de chaque flux (I pour information, E pour énergie, M pour matière). On y reportera uniquement les composants présents dans le diagramme de bloc interne (**figure 5**).

PARTIE I - GENERATION DE LA CONSIGNE DES VITESSES MOTEURS

Objectif : analyser le comportement cinématique du Hublex en virage et sur sol plat, afin d'obtenir la consigne de vitesse à imposer aux moteurs permettant de répondre notamment aux exigences «1.1.1» et «1.4.3».

I.1-Paramétrage du Hublex en trajectoire circulaire

Le Hublex dispose de deux moteurs permettant d'entraîner chaque roue indépendamment l'une de l'autre. Le mode de transmission utilisé est un mode direct par friction, de rapport $k = 0,092$, entre un galet solidaire de l'arbre moteur gauche 4 et la jante de la roue gauche 2. La transmission côté droit est identique. Les arbres moteurs gauche 4 et droit 5 ne sont pas représentés.

On note $\vec{V}(M, S_i/R_j)$ la vitesse du point M dans le mouvement du solide S_i par rapport au repère R_j .

Le paramétrage est donné sur les **figures 6, 7 et 8**. On définit :

Le repère $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ lié au sol 0.

Le repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié au châssis 1 du Hublex, avec O_1 le point situé au centre du châssis 1 et sur l'axe de rotation des roues tel que $\vec{V}(O_1, S_1/R_0) = V \cdot \vec{y}_1$.

Le repère $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ lié à la roue gauche 2, avec A le centre de la roue gauche.

Le repère $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ lié à la roue droite 3, avec B le centre de la roue droite. On note le vecteur constant $\vec{AB} = L \cdot \vec{x}_1$ et R le rayon d'une roue.

On s'intéresse à une trajectoire du Hublex (châssis 1) par rapport au sol de type circulaire, de centre O_0 et de rayon de courbure r_c , telle que définie **figure 8**. Les roues sont en contact avec le sol au point I (pour la roue gauche 2) et au point J (pour la roue droite 3). On fera l'hypothèse de roulement sans glissement des roues sur le sol en ces points. Le graphe des liaisons associé est donné **figure 9**.

On définit :

- La position angulaire du châssis 1 par rapport au sol 0 par l'angle θ_{10} , autour de $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ tel que $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.
- La position angulaire de la roue gauche 2 par rapport au châssis 1 par l'angle θ_{21} , autour de $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ tel que $\theta_{21} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.
- La position angulaire de la roue droite 3 par rapport au châssis 1 par l'angle θ_{31} , autour de $\vec{x}_1 = \vec{x}_3$ tel que $\theta_{31} = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = (\vec{z}_1, \vec{z}_3)$.

On note :

- Les vitesses angulaires associées : $\omega_{10} = \frac{d\theta_{10}}{dt}$, $\omega_{21} = \frac{d\theta_{21}}{dt}$ et $\omega_{31} = \frac{d\theta_{31}}{dt}$.
- La vitesse de rotation de l'arbre moteur gauche 4 (respectivement arbre moteur droit 5), non représenté sur les figures, par rapport au châssis 1 par ω_{41} (respectivement ω_{51}).

I.2-Étude de la cinématique pour une trajectoire circulaire

- Q2.** Donner sans démonstration la relation entre V , r_c et la vitesse de rotation ω_{10} .
- Q3.** En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement, établir la relation entre V , ω_{10} , ω_{21} et les constantes L et R .
- Q4.** En déduire l'expression de la vitesse de rotation du moteur gauche ω_{41} en fonction de V , ω_{10} , du rapport de transmission k et d'autres paramètres géométriques.
- Q5.** En déduire la relation entre V , ω_{10} et la vitesse de rotation du moteur droit ω_{51} .

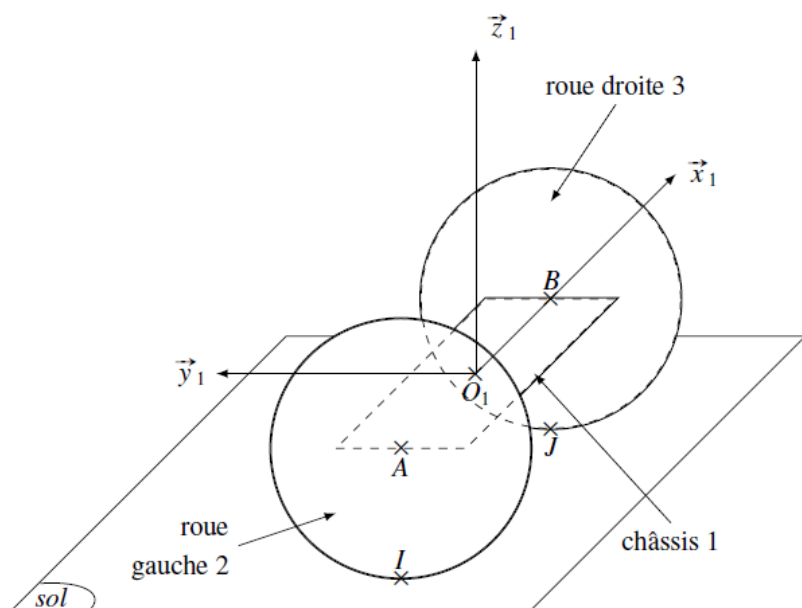


Figure 6 - Paramétrage du Hublex en perspective

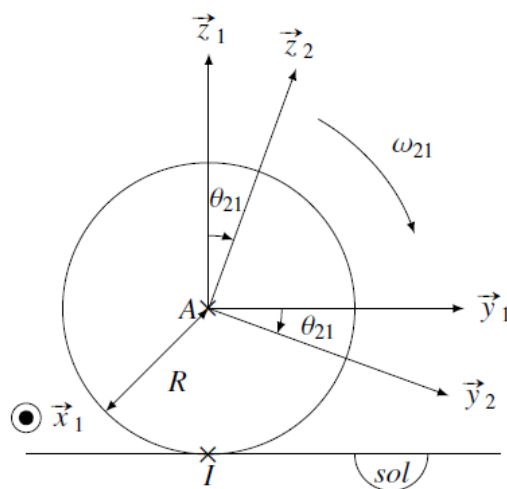


Figure 7 - Paramétrage de la roue gauche 2

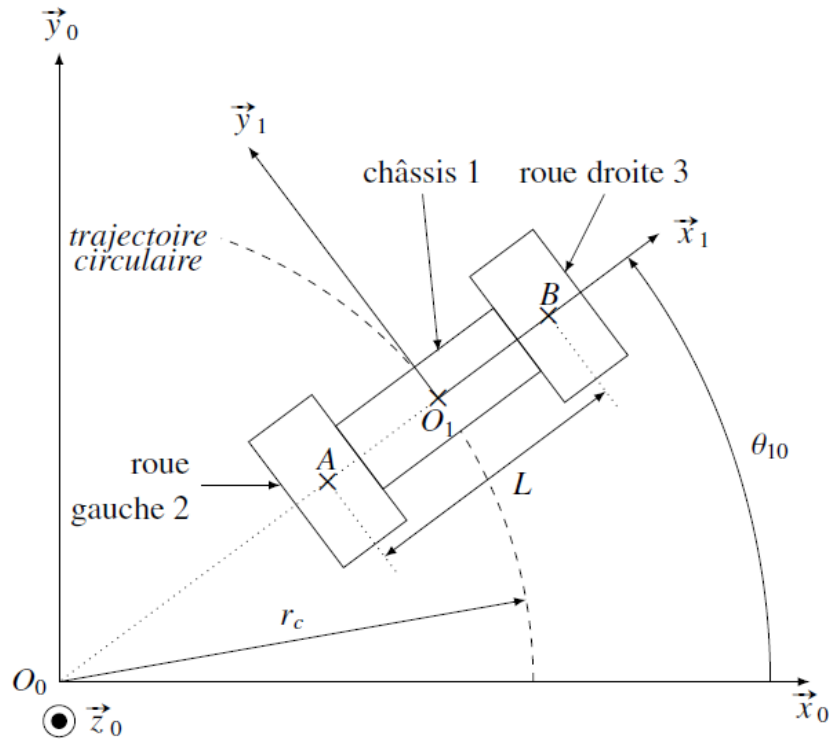


Figure 8 - Hublex dans une trajectoire circulaire

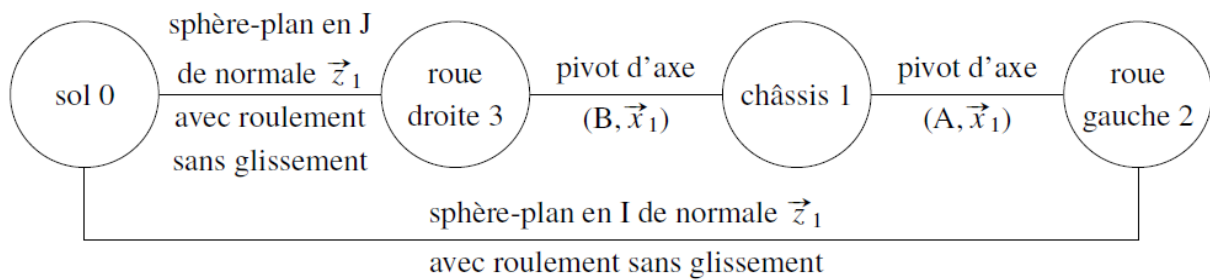


Figure 9 - Graphe des liaisons

I.3-Génération de la consigne de taux de rotation

La vitesse angulaire à imposer aux moteurs dépend donc de deux consignes fournies par le pilote : une consigne de vitesse V_c générée à partir de l'inclinaison du gyropode et une consigne de taux de rotation ω_{10c} obtenue en tournant la poignée d'un angle δ au niveau du manche et mesurée par un potentiomètre angulaire numérique. Pour recueillir la consigne de virage imposée par le pilote, on utilise un potentiomètre numérique ayant 360° d'amplitude et fournissant une image de la position angulaire de la poignée sous forme d'un mot binaire de 10 bits. La rotation de la poignée est mécaniquement bloquée entre les angles -45° et $+45^\circ$. L'absence de rotation de la poignée (i.e. $\delta = 0^\circ$) correspond au mot binaire valant 0 qui représente une consigne de trajectoire rectiligne.

Q6. Donner la résolution de ce capteur, c'est-à-dire sa précision angulaire.

Q7. Donner le nombre de positions effectivement mesurables avec la poignée du Hublex, ainsi que la plage des valeurs centrée autour de 0.

Pour des raisons de sécurité et de confort, l'exigence «1.4.3» impose que l'accélération centrifuge dans un virage soit limitée à $a_{fmax} = 0,5 \cdot g$, avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ l'accélération de la pesanteur. Cette accélération centrifuge est définie par le rapport $a_f = \frac{v^2}{r_c}$.

Q8. Établir la relation entre a_f , V et ω_{10} . En déduire la valeur maximale ω_{10max} du taux de rotation admissible satisfaisant l'exigence «1.4» et ses sous-exigences.

On considère que la valeur ω_{10max} est associée à un rayon de courbure minimal atteint lorsque $\delta = 45^\circ$ (poignée tournée au maximum) et que le rayon de courbure maximal est obtenu pour $\delta = 0^\circ$ (poignée au centre). En choisissant un modèle de proportionnalité inverse, on obtient les deux relations suivantes reliant les consignes de vitesse des deux moteurs à la consigne fournie par le pilote en se penchant (liée à V) et à la consigne issue de la poignée (liée à δ) :

$$V - L \cdot \frac{g \cdot \delta}{V \cdot \pi} = -R \cdot k \cdot \omega_{41} \quad (1)$$

$$V + L \cdot \frac{g \cdot \delta}{V \cdot \pi} = -R \cdot k \cdot \omega_{51} \quad (2)$$

Q9. Compléter le schéma bloc du **DR2**, représentant la génération des commandes des deux moteurs à partir des consignes données par le pilote permettant de respecter l'exigence «1.1.1» notamment.

PARTIE II-STABILITE DU HUBLEX SUR SOL INCLINE

Objectif : vérifier que la sécurité du pilote est toujours assurée dans le cadre d'une évolution du Hublex sur sol incliné (exigence «1.5» et sous-exigences).

Comparé à des produits similaires, la faible largeur du Hublex peut entraîner un risque accru de basculement en virage et, notamment, lorsque le virage est effectué sur un sol non horizontal. On donne **figure 10**, une schématisation de la configuration envisagée avec une partie du paramétrage.

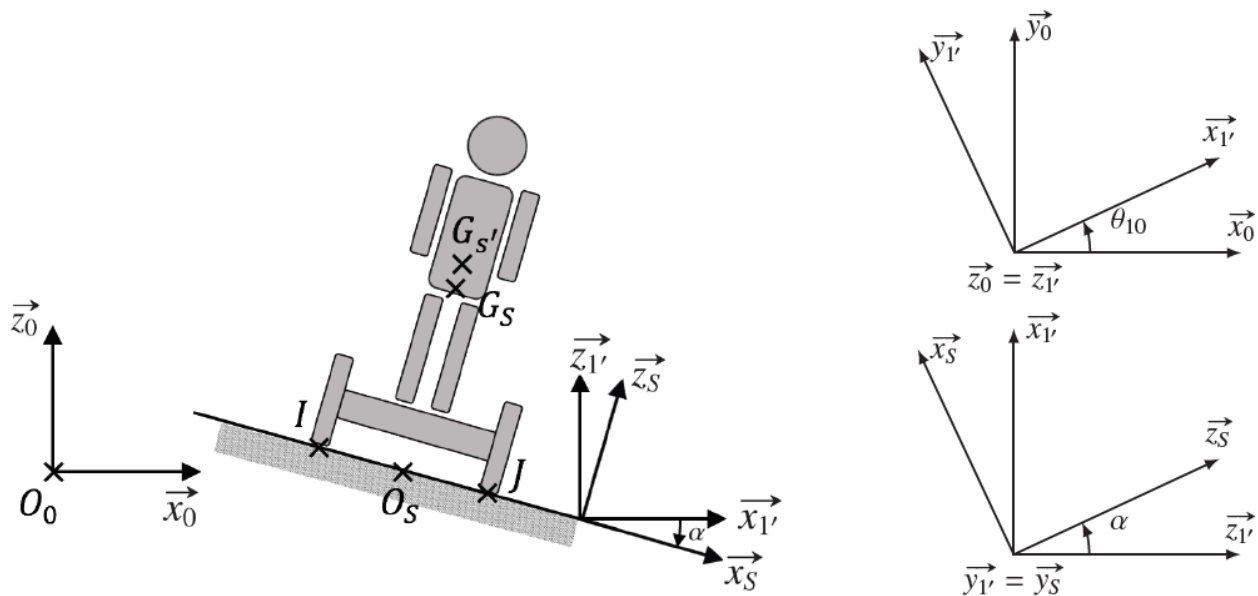


Figure 10 - Schématisation de la configuration étudiée avec paramétrage partiel

Hypothèses et Paramétrage

- On note S l'ensemble des pièces en mouvement : $S = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote} + \text{Roues}\}$, de masse m_S et de centre d'inertie G_S avec $\overrightarrow{O_S G_S} = h_S \cdot \vec{z}_S$.
- On note S' l'ensemble des pièces en mouvement sans les roues : $S' = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote}\}$ et de centre d'inertie $G_{S'}$ avec $\overrightarrow{O_S G_{S'}} = h_{S'} \cdot \vec{z}_S$. On remarquera que $S = \{S' + \text{Roues}\}$.
- Dans cette **partie uniquement**, la masse et les composantes de la matrice d'inertie des roues sont négligées.
- On note respectivement $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, $R_{S'}(G_{S'}, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ et $R_{1'}(O_S, \vec{x}_{1'}, \vec{y}_{1'}, \vec{z}_{1'})$, le référentiel supposé galiléen lié au sol, le référentiel lié à S' et le référentiel incliné lié à S' .
- On suppose que l'inclinaison du pilote en avant ou en arrière est négligeable.
- L'angle d'inclinaison du sol α sur lequel évolue le Hublex est supposé constant : $\alpha = (\vec{x}_{1'}, \vec{x}_S) = (\vec{z}_{1'}, \vec{z}_S)$.

- La rotation de S' autour de l'axe (O_0, \vec{z}_0) est définie par l'angle : $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_{1'}) = (\vec{y}_0, \vec{y}_{1'})$.
- On suppose que la vitesse de rotation $\omega_{10} = \frac{d\theta_{10}}{dt}$ est constante.
- On note les vecteurs (de norme constante) $\vec{O}_0\vec{O}_S = r_c \cdot \vec{x}_{1'}$ et $\vec{IJ} = L \cdot \vec{x}_S$.
- L'accélération de la pesanteur est définie par le vecteur $-g \cdot \vec{z}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.
- Dans le plan d'étude, les actions mécaniques en I et J du sol sur le Hublex seront modélisées par des liaisons ponctuelles avec frottement. Ces actions sont définies par les torseurs suivants :

$$\{\tau_{0 \rightarrow S}^I\} = \begin{Bmatrix} T_I \cdot \vec{x}_S + N_I \cdot \vec{z}_S \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\tau_{0 \rightarrow S}^J\} = \begin{Bmatrix} T_J \cdot \vec{x}_S + N_J \cdot \vec{z}_S \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Il n'y a pas de glissement entre les roues et le sol au niveau des points I et J .
- La matrice d'inertie de l'ensemble S' au point $G_{S'}$ sera notée :

$$[I(G_{S'}, S')] = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{bmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)}$$

II.1- Caractéristiques cinétiques du Hublex

Q10. Justifier la forme de la matrice d'inertie $[I(G_{S'}, S')]$.

II.2- Vérification de l'exigence de stabilité

Le principe fondamental de la dynamique est exploité afin de calculer la vitesse limite à partir de laquelle il y a un risque de basculement. On se placera dans le cas où ω_{10} est constant. On notera $\vec{\delta}(M, S/R_0)$ le moment dynamique de S au point M par rapport à R_0 .

Calcul de la composante du moment dynamique $\vec{\delta}(J, S/R_0) \cdot \vec{y}_{1'}$

Q11. Déterminer l'expression littérale du moment cinétique au point $G_{S'}$ de S' par rapport à R_0 noté $\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0)$.

Q12. En déduire les expressions littérales de $\vec{\delta}(G_{S'}, S'/R_0)$ puis de $\vec{\delta}(G_{S'}, S/R_0)$.

Q13. En utilisant la dérivation vectorielle, déterminer l'expression littérale de $\vec{V}(G_S, S/R_0)$, la vitesse du centre d'inertie de S par rapport à R_0 .

On peut en déduire l'accélération du centre d'inertie G_S de S par rapport à R_0 , notée $\vec{\Gamma}(G_S, S/R_0)$. Il est donc possible de déterminer la composante du moment dynamique souhaité à partir des calculs précédents (la démonstration n'est pas demandée) :

$$\vec{\delta}(J, S/R_0) \cdot \vec{y}_{1'} = \omega_{10}^2 \cdot \left[\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (C_S - A_S) - m_S \cdot (r_c + h_S \cdot \sin\alpha) \left(\frac{L}{2} \cdot \sin\alpha + h_{S'} \cdot \cos\alpha \right) \right]$$

Estimation du basculement

Q14. Calculer, au point J , la somme des moments des actions mécaniques extérieures appliquées à S selon $\vec{y}_{1'}$: $\vec{M}(J, \vec{S} \rightarrow S) \cdot \vec{y}_{1'}$.

Q15. Déduire de ce qui précède la relation liant N_I , ω_{10} , les grandeurs géométriques, cinématiques (et leurs dérivées) et inertielles. On précisera le principe ou théorème utilisé.

Q16. Dans le cadre de ce modèle, quelle est la condition permettant de définir l'apparition du basculement ? En déduire l'expression de la vitesse limite $\omega_{10\text{lim}}$ conduisant au basculement.

L'étude précédente permet de représenter l'évolution des réactions du sol, en I et J , en fonction de la vitesse d'avance du Hublex, pour un angle $\alpha = -7^\circ$, pour un rayon de courbure (ou braquage) de 5 m (**figure 11**).

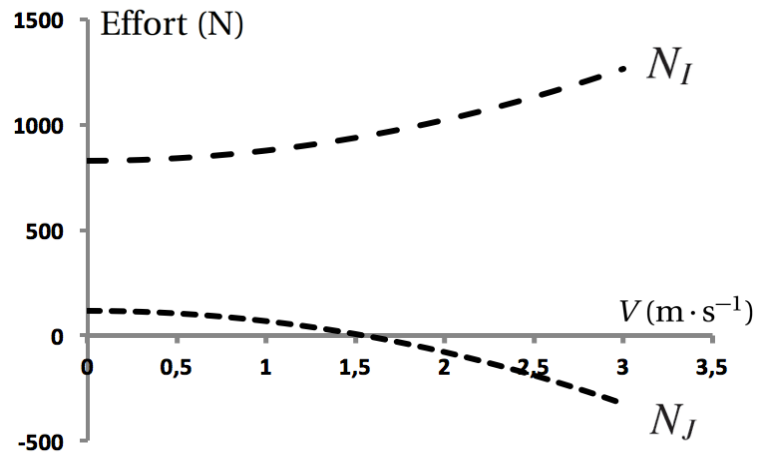


Figure 11—Évolution des actions normales N_I et N_J en fonction de la vitesse d'avance V du Hublex.

- Q17.** En exploitant cette courbe, donner la vitesse limite v_{lim} que peut avoir le Hublex dans ces conditions sans basculer. Conclure vis-à-vis des exigences.
- Q18.** Commenter, en justifiant, la validité des courbes de la **figure 11** au-delà de v_{lim} . En une phrase, préciser comment modifier la modélisation pour étudier le comportement de S au-delà de v_{lim} .

PARTIE III - PILOTAGE EN ACCELERATION

Objectif : analyser le comportement du Hublex dans son mouvement d'inclinaison vers l'avant (ou arrière) afin de vérifier le respect de l'exigence « 1.1.4.1 ».

Grâce à un asservissement, les moteurs utilisés dans le Hublex permettent de garder l'ensemble {Chassis 1 + Pilote} en équilibre afin que le pilote ne tombe pas en avant (ou en arrière). Ceci génère le mouvement qui permet au pilote d'avancer (ou de reculer). Pour cela, une centrale inertielle mesure l'inclinaison du Hublex et la fournit à la carte de commande qui génère une consigne de couple moteur. Cette **partie** permettra de déterminer le lien entre l'angle d'inclinaison du pilote (noté β) et la vitesse d'avance du système.

On se place dans le cas d'une avancée en ligne droite, sur sol plat, avec un angle β entre le Hublex et le sol constant. Une schématisation paramétrée de la configuration étudiée est proposée **figure 12**.

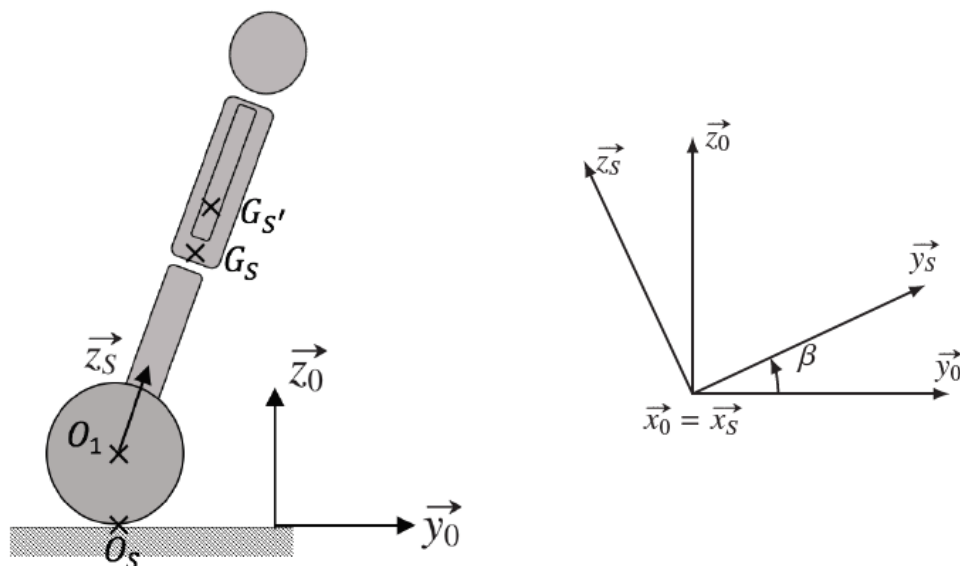


Figure 12 - Schématisation de la configuration étudiée et paramétrage

Hypothèses et Paramétrage

- On note S l'ensemble des pièces en mouvement : $S = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote} + \text{Roues}\}$, de masse m_S et de centre d'inertie G_S tel que $\overrightarrow{O_1 G_S} = z_{G_S} \cdot \overrightarrow{z_S}$.
- On note S' l'ensemble en mouvement sans les roues : $S' = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote}\}$, de masse $m_{S'}$, et de centre d'inertie $G_{S'}$ tel que $\overrightarrow{O_1 G_{S'}} = z_{G_{S'}} \cdot \overrightarrow{z_S}$. On remarquera que $S = \{S' + \text{Roues}\}$.
- On note $R_0(O_0, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ le référentiel supposé galiléen lié au sol et $R_S(G_S, \overrightarrow{x_S}, \overrightarrow{y_S}, \overrightarrow{z_S})$ le référentiel lié à S .
- L'action mécanique du moteur sur chaque roue, réalisée par l'intermédiaire du galet, peut se modéliser par

le torseur des actions mécaniques $\{\tau_{1 \rightarrow \text{Roue}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{C_m}{k} \cdot \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{O_1}$ où C_m désigne le couple fourni par le moteur et

k le rapport de transmission du contact galet/jante.

- Les différents frottements (internes et externes) sont ramenés sur l'axe de rotation des roues et modélisés par un couple résistant, C_f , appliqué à chaque roue tel que :

$$\{\tau_{\text{frottements} \rightarrow \text{Roue}}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_f \cdot \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_{O_1}$$

- Le mouvement de l'ensemble S' par rapport au sol 0 est représenté par le torseur cinématique : $\{\mathcal{V}_{S'/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \cdot \overrightarrow{y_0} \end{array} \right\}_{O_1}$
- Le mouvement d'une roue par rapport au châssis 1 du Hublex est caractérisé par la vitesse de rotation ω_{R1} de sorte que $\{\mathcal{V}_{\text{Roue}/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{R1} \cdot \overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}$.
- On rappelle que le rayon de la roue est noté R (soit $O_1 O_S = R$).
- On notera $J_{S'}$ et J_R les moments d'inertie selon l'axe $(O_1, \overrightarrow{x_1})$ respectivement de S' et d'une roue (les deux roues sont identiques).
- On négligera l'inertie du galet d'entraînement et du rotor du moteur.
- On remarquera que $V = -R \cdot \omega_{R1}$, on notera \dot{V} la dérivée temporelle de V .

Il est possible de montrer que le couple que doit fournir le moteur pour conserver un angle β constant est donné par l'expression :

$$C_m = k \cdot z_{G_{S'}} \cdot m_{S'} \cdot (\dot{V} \cdot \cos \beta + g \cdot \sin \beta) \quad (3)$$

Q19. Indiquer la démarche permettant de déterminer l'équation (3). On ne demande pas de faire les calculs.

On souhaite maintenant relier la consigne du pilote (sous forme de l'angle β) à l'accélération \dot{V} du Hublex.

Q20. Déterminer l'expression littérale de $(P_{\text{ext}} + P_{\text{int}})$, somme des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures appliquées à l'ensemble S , notée P_{ext} , et de la puissance intérieure à ce même système, notée P_{int} .

Q21. Déterminer l'expression littérale de l'énergie cinétique $E_C(S/R_0)$ de l'ensemble S par rapport au référentiel galiléen R_0 , en fonction de ω_{R1} et des grandeurs inertielles et géométriques.

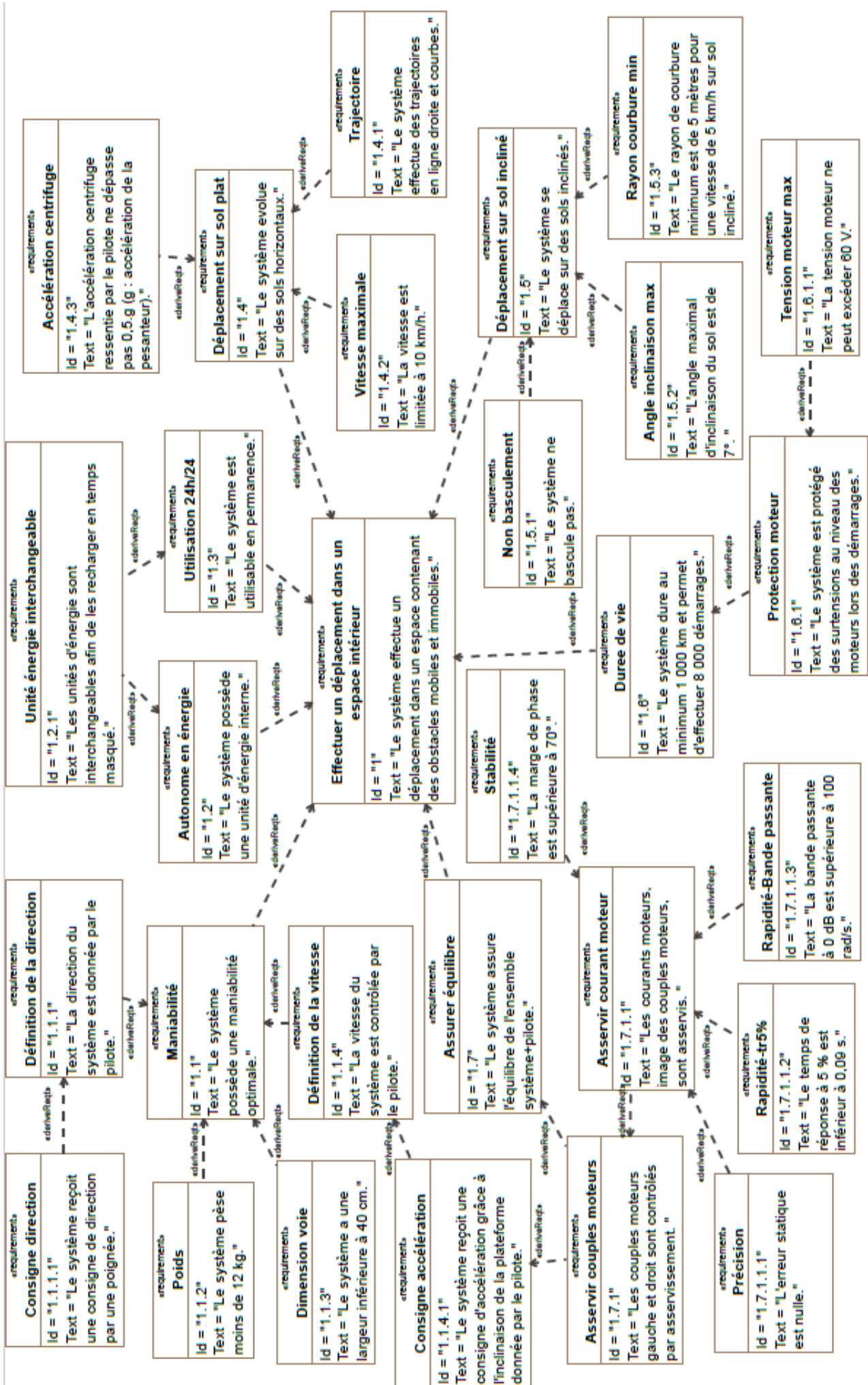
Q22. En précisant le théorème ou principe utilisé, déterminer la relation liant C_m , ω_{R1} et les grandeurs inertielles et géométriques (et leurs dérivées).

On supposera maintenant que le couple résistant C_f est négligeable.

Q23. En déduire, à l'aide de l'équation (3), l'expression de \dot{V} en fonction de β .

Q24. Justifier alors que la consigne β imposée par le pilote correspond à une consigne d'accélération et conclure sur le respect de l'exigence «1.1.4.1». Préciser la valeur de l'angle β pour que l'ensemble S avance à une vitesse constante.

DIAGRAMME D'EXIGENCES EXTRAIT DU CAHIER DES CHARGES



Problème N°8 : prothèse tibiale (extrait centrale mp 2013)

1. Problématique technique

La majorité des prothèses transtibiales (pour une amputation en dessous du genou) utilisées aujourd'hui sont purement passives, c'est-à-dire que leurs propriétés mécaniques restent fixes pendant la marche (Illustration 2). Ces prothèses sont constituées en général de semelles ressorts en carbone profilées qui emmagasinent et restituent l'énergie mécanique pendant la marche par déformation.



Illustration 2 : prothèse tibiale passive



Illustration 1 : prothèse tibiale active

Des études cliniques montrent que les amputés qui utilisent des prothèses passives doivent fournir de 20 à 30 % d'énergie en plus pour obtenir une vitesse de déplacement équivalente à celle d'une personne non amputée effectuant le même déplacement. Ils souffrent également d'une dissymétrie de la marche (différence de comportement entre le cote amputé et le cote non amputé) qui fatigue les articulations des membres sains.

Des ingénieurs du M.I.T. ont mis au point une prothèse active transtibiale capable de proposer un comportement similaire à celui des membres non amputés. On étudie dans ce sujet le prototype initial qui a permis de valider la pertinence d'une telle prothèse active (Illustration 1).

L'étude sera menée en s'appuyant sur l'illustration 4. Une analyse du système en situation, notamment du cycle de marche, sera réalisée afin de définir le cahier des charges (partie 2), la loi de consigne à appliquer (partie 3) et l'organisation structurale du système (partie 4). Une modélisation de la chaîne d'énergie (partie 6) et d'informations (parties 5 et 7) sera alors conduite. Les paramètres du modèle seront identifiés à partir d'un montage d'essai (partie 6.3). Les résultats de simulation seront alors comparés à la loi de consigne. Une validation clinique des résultats sur des patients finalisera l'étude (partie 8).

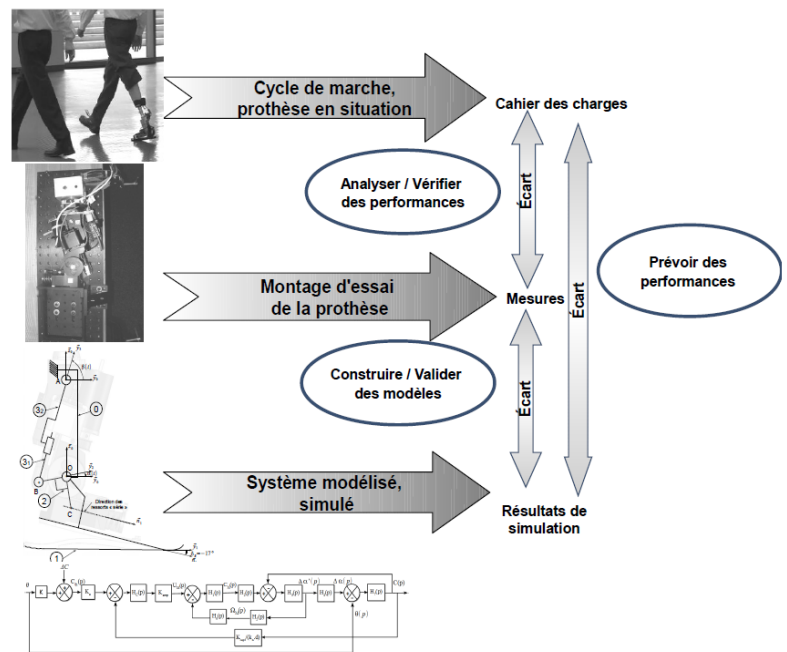


Illustration 3 : démarche d'étude

2. Mise en place du cahier des charges

Afin de pouvoir établir et justifier le cahier des charges fonctionnel de la prothèse active, une analyse du comportement des membres sous le genou (ensemble transtibial constitué du tibia, de la cheville et du pied) d'un sujet non amputé est menée dans cette partie.

2.1. Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Le cycle de marche est défini dans l'**annexe 1**.

Il est constitué de deux phases principales : la phase d'appui et la phase oscillante. La phase d'appui correspond à environ 60 à 70% de la durée d'un cycle de marche notée T_c .

Chaque cycle comporte 2 pas. Des relevés expérimentaux permettent d'estimer à 105 pas par minute la cadence d'une marche normale. Une marche rapide correspond à une cadence de 123 pas par minute en moyenne.

La phase d'appui peut être divisée en 3 sous-phases détaillées en **annexe 1**.

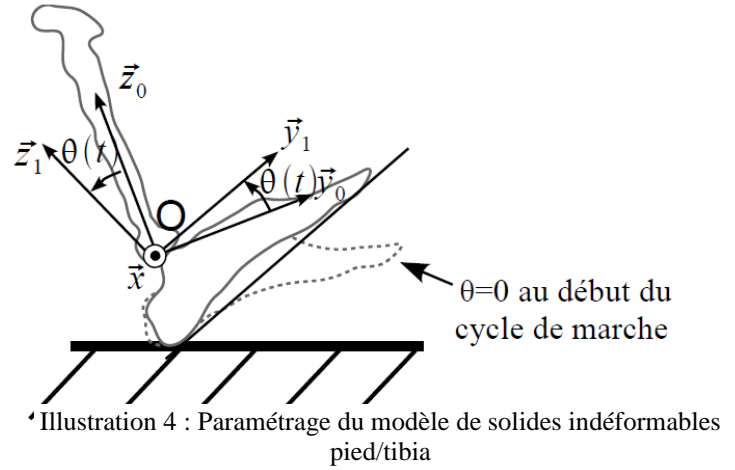
Pour analyser le comportement de l'ensemble transtibial, on modélise le tibia et le pied par des solides indéformables et la cheville par une liaison pivot d'axe (O, \vec{x}) .

On associe :

- le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ au tibia note 0,
- le repère $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ au pied note 1.

On note $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle de rotation du pied par rapport au tibia.

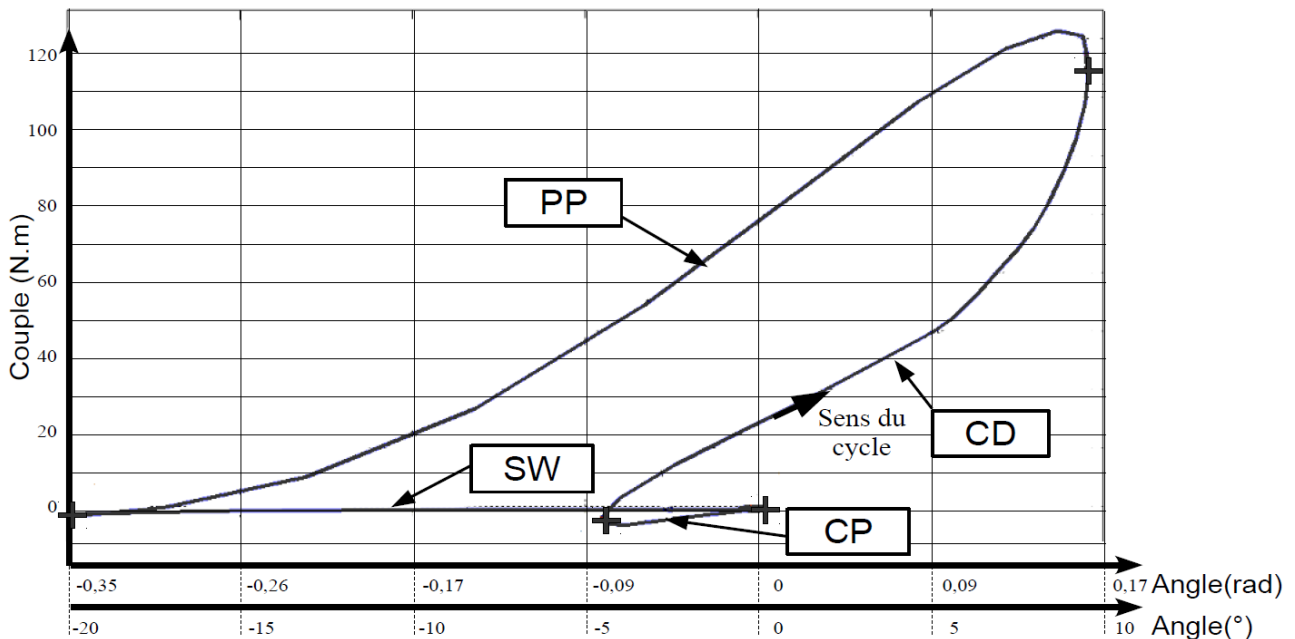
La figure du document-réponse (question 1) décrit l'évolution de l'angle θ mesuré expérimentalement au cours d'un cycle (abscisse en pourcentage) pour une **cadence de marche normale**. Les relevés sont réalisés pour une personne aux mensurations moyennes de 75 kg pour 1,75 m.



Question 1. Indiquer sur la figure du document réponse les phases d'appui (ST) et d'oscillation (SW) ainsi que les sous-phases CP, CD et PP. Déterminer le temps de cycle en secondes et la valeur absolue de la vitesse angulaire maximale du pied en rad/s $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{max}$ sachant que le cycle est celui d'une **marche normale**.

Pour contrôler le mouvement, les muscles doivent compenser le moment imposé par le corps en déséquilibre. Cette action des muscles peut être modélisée par un couple au niveau de la cheville agissant sur le pied 1 et noté C_{exp} . Une instrumentation spécifique appelée « plate-forme de forces » permet d'évaluer l'évolution du couple au cours de la marche.

On donne ci-après la courbe du couple exercé selon l'axe (O, \vec{x}) de la cheville C_{exp} en fonction de l'angle θ pour une **marche normale** (Illustration 5). Les différentes phases du mouvement décrites dans l'annexe sont rappelées. L'aire contenue à l'intérieur de cette courbe fermée représente le travail W que doit fournir l'organisme pendant un cycle (avec C_{exp} en Nm et θ en rad). Pour une marche normale, cette aire correspond à une énergie estimée à 14 joules.



2.2. Définition du cahier des charges

L'ensemble des courbes et analyses permet de définir le cahier des charges relatif à l'exigence fonctionnelle principale.

Fonction	Critères	Valeurs
Assurer un cycle de marche analogue à celui d'un sujet non amputé	Masse de la prothèse (correspond sensiblement à la masse d'un ensemble sain)	2,5 kg
	Hauteur maximale de la prothèse (proche de celle d'un ensemble sain)	32 cm
	Valeurs extrêmes de l'angle θ	Flexion plantaire propulsive : $- 25^\circ$ Dorsiflexion : 15°
	Vitesse angulaire maximale $\left \frac{d\theta}{dt} \right _{\max}$	$5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
	Couple maximal à fournir	140 N·m
	Travail maximal à fournir pour un cycle	20 J

Question 2. Vérifier que le cahier des charges ainsi spécifié est cohérent. Pour cela, relever et compléter sur le document-réponse les valeurs associées à certains critères pour une marche normale. Conclure vis-à-vis du respect du cahier des charges dans son ensemble.

3. Définition de la loi de consigne en couple

L'objectif de cette partie est de définir la loi de consigne théorique que devra suivre la prothèse pour répondre à la fonction principale. Cette loi sera implantée dans le calculateur de la prothèse.

Le comportement de la prothèse peut être schématisé par le bloc fonctionnel suivant (Illustration 6) :

L'hypothèse faite par les concepteurs est de considérer que la vérification exacte de la loi expérimentale $C_{exp}(\theta)$ est moins importante que le respect de la valeur du travail à fournir W .

C'est pourquoi, le choix d'une loi de consigne théorique approchée est retenu. La courbe du document-réponse (question 3) compare la loi théorique $C_{th}(\theta)$ à la loi relevée expérimentalement $C_{exp}(\theta)$. Cette loi théorique est obtenue à partir du comportement d'un ressort de torsion (Illustration 7, C_{th1}) auquel on ajoute un couple ΔC à partir du moment où le couple C_{th} dépasse une valeur C_{lim} jusqu'à ce que la phase d'oscillation commence (Illustration 7, C_{th2}). Ainsi $C_{th} = C_{th1} + C_{th2}$. Les paramètres C_{lim} , K_p , K_n , ΔC seront choisis par l'utilisateur en fonction du ressenti lors de la marche.

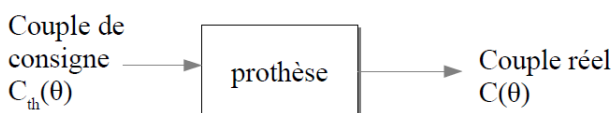
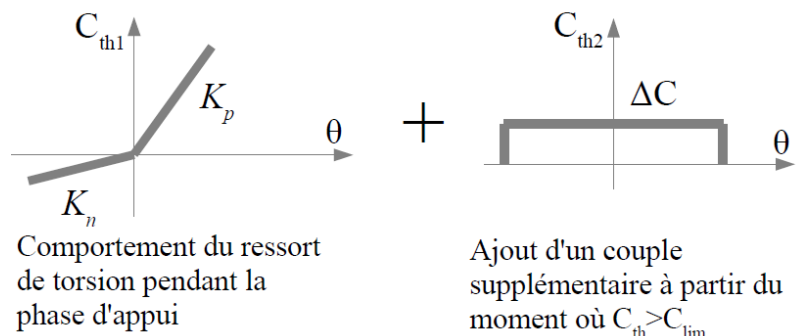


Illustration 6 : comportement global de la prothèse



Comportement du ressort de torsion pendant la phase d'appui

Ajout d'un couple supplémentaire à partir du moment où $C_{th} > C_{lim}$

Illustration 7 : décomposition de la loi théorique

Question 3. A partir de la courbe du document-réponse (question 3), donner les valeurs numériques de K_n , K_p (en $Nm \cdot rad^{-1}$), ΔC , C_{lim} (en Nm). Déterminer alors l'expression littérale du travail théorique W_{th} correspondant à l'aire de cette courbe fermée (avec θ en rad) en fonction de C_{lim} , K_p , K_n , ΔC uniquement. En déduire la valeur numérique de W_{th} et conclure sur la pertinence de la loi retenue.

L'objectif est donc de réaliser une prothèse active qui soit capable de suivre cette loi théorique.

4. Organisation structurelle de la prothèse active

Pour élaborer la commande de la prothèse, il est indispensable d'appréhender l'organisation structurelle de la prothèse active. Cela constitue une étape préalable au travail de modélisation qui suivra.

L'annexe 2 fournit une description des chaînes d'énergie et d'informations.

Question 4. Compléter le schéma du document-réponse en précisant les fonctions, moyens et flux manquants.

5. Gestion des modes de commande

La commande du calculateur ne possède pas le même comportement lors des phases et sous-phases du cycle de marche. L'objectif de cette partie est de choisir le type d'asservissement à adopter par le calculateur en fonction de ces sous-phases. Les relations obtenues seront alors implantées dans le calculateur (niveau hiérarchique supérieur).

On se référera à la description des phases et sous-phases de marche donnée en **annexe 1**.

Le mode de commande en orientation est classique et n'est utile que dans la phase oscillante (le pied n'est pas en contact avec le sol). On lui associe la variable logique C_{or} telle que $C_{or} = 1$ lorsque le mode de commande en orientation est actif.

Le mode de commande en couple (pendant la phase d'appui) peut être décomposé en 3 modes différents :

- lorsque l'angle θ est négatif, la pente souhaitée de la loi de consigne $C_{th}(\theta)$ est égale à K_n . On appelle ce mode « Mode C_1 » et on lui associe la variable logique C_1 telle que $C_1 = 1$ lorsque ce mode est actif,
- lorsque l'angle θ est positif, la pente souhaitée de la loi $C_{th}(\theta)$ est égale à K_p . Ce mode est appelé « Mode C_2 » et on lui associe la variable logique C_2 telle que $C_2 = 1$ lorsque ce mode est actif,
- lorsque le couple C_{th} est supérieur à C_{lim} , un couple ΔC constant est ajouté à C_{th} et ce jusqu'à ce que le couple C_{th} devienne nul. On appelle ce mode « Mode C_3 ».

Les capteurs capacitifs situés au niveau du talon fournissent une information binaire T_a telle que $T_a = 1$ lorsqu'ils touchent le sol. De même les capteurs situés au niveau de l'avant du pied fournissent une information binaire P telle que $P = 1$ lorsqu'ils touchent le sol. On introduit la variable binaire $[\theta < 0]$ qui est vraie lorsque $\theta < 0$ (cette variable est fautive lorsque $\theta \geq 0$).

Question 5. Compléter à l'aide des indications précédentes, de la loi souhaitée et de la description d'un cycle, le chronogramme des variables binaires T_a et P (document-réponse question 5) à partir du moment où le talon touche le sol (début de la phase d'appui) jusqu'au cycle suivant (durée d'un cycle T_c). En déduire les expressions logiques des variables C_1 , C_2 et C_{or} en fonction de $[\theta < 0]$, T_a et P . Vous utiliserez à bon escient les situations qui n'apparaissent pas dans le chronogramme.

Question 6. En se référant uniquement à la description du mode de commande C_3 donnée précédemment, compléter le graphe d'états du document réponse spécifiant ce mode de commande.

6. Modélisation de la chaîne d'énergie

La validation des performances dans les phases de commande en orientation d'une part et de commande en couple d'autre part nécessite la mise en place d'un modèle de chacun des constituants de la chaîne d'énergie (voir le schéma-bloc en annexe 3).

L'objectif de cette partie est donc d'élaborer progressivement ce schéma-bloc en déterminant les fonctions de transfert.

A partir de la structuration de la chaîne d'énergie, on retient le modèle décrit par le schéma-bloc donné en **annexe 3**. Le paramétrage de la prothèse est fourni en **annexe 5**.

6.1. Modélisation de la chaîne de transmission

L'objectif de cette partie est de valider l'aptitude du système à reproduire un mouvement du pied à la vitesse angulaire maximale de $5,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ spécifiée dans le cahier des charges. Dans un premier temps, il s'agira de déterminer la relation entre la rotation du pied artificiel par rapport au tibia et la translation de la tige du vérin électrique. Dans un second temps, une analyse plus fine du fonctionnement du vérin électrique permettra de remonter à la vitesse angulaire du moteur.

La vitesse angulaire maximale est atteinte durant la phase oscillante (le pied n'est plus en contact avec le sol). Durant cette phase, nous supposons que le pied et le basculeur ne possèdent pas de mouvement relatif. Rechercher une relation entre θ et λ , revient donc à déterminer la relation entre α et λ (voir annexe 5).

Question 7. A partir du paramétrage de la prothèse fourni en annexe 5, exprimer λ en fonction de α et de la géométrie. Proposer alors une relation simplifiée au regard du graphe (Illustration 8) correspondant à la relation théorique obtenue. En déduire la valeur numérique du gain K_G (en $\text{mm}\cdot\text{rad}^{-1}$) telle que $\frac{d\lambda}{dt} = K_G \frac{d\alpha}{dt}$.

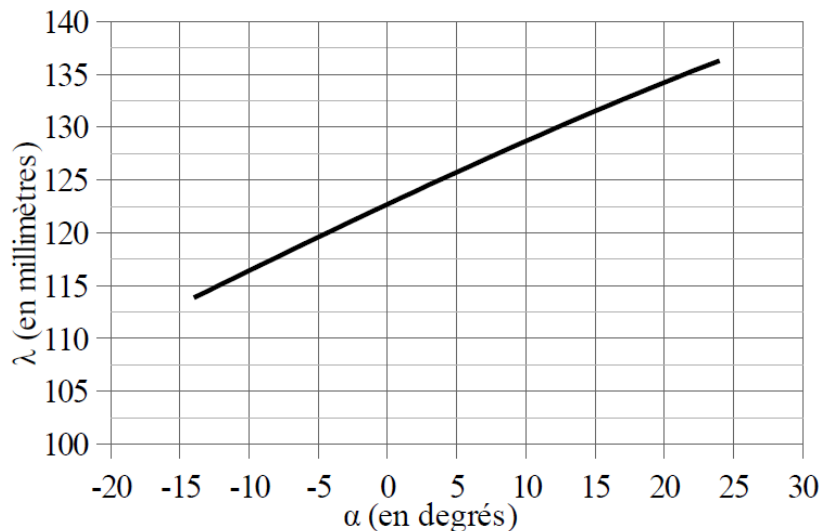


Illustration 8 : Evolution de la longueur du vérin électrique en fonction de l'angle du basculeur

Le vérin électrique est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un moteur électrique à courant continu Maxon dont les caractéristiques sont données en **annexe 4**. Le mouvement de rotation du moteur est adapté par l'intermédiaire d'un système poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou. On note ω_M la vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator (3_2) défini en **annexe 5**.

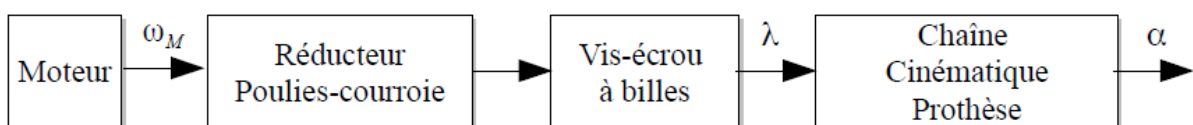


Illustration 9 : Chaîne de transmission de mouvement

Le système vis-écrou est équipé d'une vis à billes de pas à droite p_v avec $p_v = 3\text{mm}\cdot\text{tour}^{-1}$. Le réducteur poulie-courroie possède un rapport de réduction $k = \frac{1}{2.1}$. On note R_T le rapport entre la vitesse angulaire du rotor du moteur ω_M et la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ tel que $\frac{d\alpha}{dt} = R_T \omega_M$.

Question 8. En déduire les expressions littérales des blocs $H_4(p)$ et $H_5(p)$ (annexe 3). Déterminer la valeur numérique de R_T . Conclure sur l'aptitude du moteur à générer la vitesse maximale exigée.

6.2. Comportement dynamique de la prothèse

L'objectif de cette partie est d'établir les équations de comportement dynamique de la prothèse autour de la position de repos lors des phases d'appui et oscillante. Ces équations permettront de compléter le schéma-bloc de la chaîne d'énergie.

Hypothèses et données (voir annexe 5) :

- Seule l'inertie J_M du rotor du moteur suivant son axe de rotation est prise en compte,
- les quantités dynamiques des autres pièces ne sont pas prises en compte,
- la chaîne cinématique est caractérisée par la relation : $\frac{d\alpha}{dt} = R_T \omega_M$ (avec ω_M la vitesse angulaire du rotor par rapport au tibia. $\frac{d\beta}{dt}$ étant négligé, le stator 3_2 est considéré fixe par rapport au tibia),
- les liaisons sont supposées parfaites,
- attention, dans le cas général considéré ici, on prendra $\frac{d\alpha}{dt} \neq \frac{d\theta}{dt}$.

Modélisation des actions mécaniques (voir illustration 10 et annexe 5) :

- les actions mécaniques de la pesanteur sont négligées devant les autres actions mécaniques mises en jeu,
- le moteur génère un couple sur son axe tel que $\vec{C}_{\text{Moteur} \rightarrow M} = C_M \vec{y}_3$.
- l'amortissement de l'ensemble du système est modélisé par un coefficient de frottement visqueux μ_M exprimé sur l'axe moteur générant un couple : $\vec{C}_{\text{amortisseur} \rightarrow M} = -\mu_M \omega_M \vec{y}_3$ avec μ_M identifié expérimentalement (unité $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$),
- les ressorts exercent une action mécanique entre le pied 1 et le basculeur 2. Elle est modélisée par un glisseur $\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow 2} = -\vec{F}_{\text{ressort} \rightarrow 1} = -F_{RS} \vec{n}_1$ au point S,
- un couple extérieur $-C \vec{x}$ est appliqué sur le pied artificiel 1. En commande en couple, cette action mécanique C constitue la grandeur à asservir suivant la loi théorique $C_{th}(\theta)$.

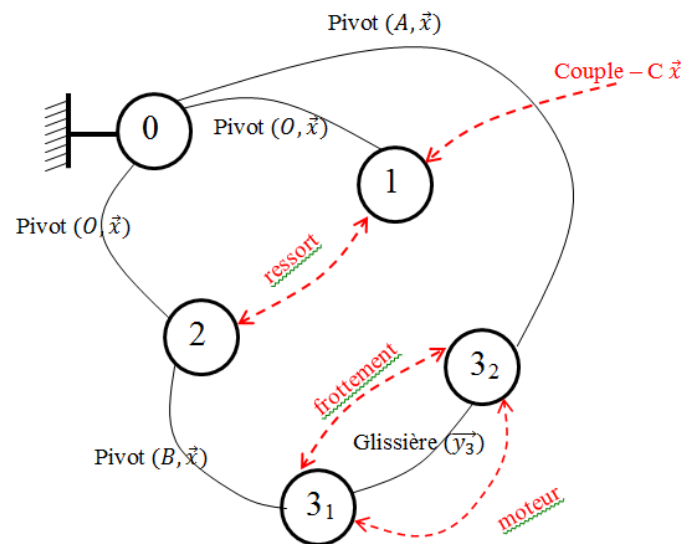


Illustration 10 : graphe des actions mécaniques

Définition du référentiel galiléen d'étude :

L'analyse du cycle de la marche a mis en évidence la présence de multiples phases aux mouvements variés du tibia et du pied. La mise en place d'un modèle dynamique de la prothèse impose la définition d'un référentiel galiléen qui, pour être au plus près du comportement réel, diffère suivant les phases d'étude. Il apparaît donc particulièrement complexe de définir une étude dynamique pour chacune de ces phases.

Afin d'identifier le comportement du système dans le cadre d'un réglage des paramètres de la commande, le modèle suivant est défini :

- le tibia est considéré comme fixe. Le référentiel associé est supposé galiléen,
- les mouvements de la prothèse sont étudiés par rapport au repère du tibia.

Ce modèle est proche du comportement réel. Dans plusieurs phases, le mouvement du tibia est nul ou assimilé à un mouvement de translation rectiligne uniforme. De plus, l'identification des paramètres de la modélisation retenue ainsi que la validation du comportement de la prothèse s'effectuent en premier lieu sur un montage d'essai où le tibia est fixe (voir partie suivante).

Question 9. En isolant le pied 1 et en négligeant son inertie, retrouver la relation entre C et F_{RS} :

$$C = b.F_{RS}.\cos(\alpha - \theta - \delta)$$

Vous veillerez à expliciter clairement votre démarche (principe ou théorème, équation écrite, projection...).

La raideur équivalente des ressorts est $k_{RS} = 1200.10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. On ne s'intéresse dans la modélisation qu'aux variations de la prothèse autour de sa position de repos (cf. paramétrage autour de la position repos en **annexe 5**). On note $\Delta\chi$ la variation de longueur des ressorts. L'effort F_{RS} exercé par ces ressorts autour de la position repos est donné par la relation linéarisée suivante $F_{RS} = k_{RS}.\Delta\chi$.

Question 10. A partir de la relation obtenue à la question précédente, montrer qu'il est possible d'obtenir une relation linéarisée (à l'ordre 0) autour de la position repos sous la forme $C = d_0.F_{RS}$ ou d_0 sera exprimé en fonction de b , α_R et δ_R . Sachant que $\Delta\chi = d_0(\Delta\alpha - \theta)$, donner alors l'expression de la fonction de transfert $H_7(p)$

Par la suite, on prendra $d_0 = 0,035 \text{ m}$.

Afin de déterminer la relation de comportement dynamique, on isole l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia dont le référentiel associé est supposé galiléen.

Question 11. Retrouver l'expression littérale de la puissance des inter-efforts générée par le ressort entre le pied artificiel 1 et le basculeur 2 : $P_{ressort \rightarrow 2/1} = -k_{RS}.d_0^2.(\Delta\alpha - \theta)(\dot{\alpha} - \dot{\theta})$

Question 12. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia. En utilisant la relation de la chaîne cinématique, retrouver la relation suivante, faisant intervenir les paramètres de mouvement, leurs dérivées, ainsi que les paramètres caractéristiques du système et actions mécaniques.

$$\frac{J_M}{R_T^2} \ddot{\alpha} = -\frac{\mu_M}{R_T^2} \dot{\alpha} + \frac{C_M}{R_T} - C$$

A partir des relations déterminées aux Question 9. et Question 12. il est alors possible de trouver l'équation différentielle linéarisée suivante qui caractérise le comportement dynamique de la prothèse :

$$J_M \frac{d^2}{dt^2} \Delta\alpha(t) + \mu_M \frac{d}{dt} \Delta\alpha(t) = C_M(t)R_T - C(t)R_T^2 \quad \text{avec } R_T = \frac{1}{145}$$

Le moteur électrique est régi par les équations électriques et de couplage électromécanique :

$$\begin{aligned} u_M(t) &= Ri(t) + e(t) && \text{avec } i(t) \text{ courant moteur et } e(t) \text{ fcem} \\ e(t) &= k_c \omega_M(t) && \text{avec } \omega_M \text{ vitesse angulaire du rotor du moteur par rapport au stator} \\ C_M(t) &= k_c i(t) \end{aligned}$$

Les constantes intervenant dans ces équations sont définies dans l'**annexe 4**.

Question 13. A partir des équations caractérisant le système, déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_6(p)$.

6.3. Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

Le modèle de la chaîne d'énergie étant défini, on cherche maintenant à déterminer plus précisément les valeurs numériques des coefficients intervenant dans les fonctions de transfert de la chaîne d'énergie.

On procède pour cela à une identification fréquentielle du comportement de la prothèse. L'expérience consiste à bloquer le tibia ainsi que le pied et à envoyer une commande en tension sinusoïdale au moteur en faisant varier la fréquence du signal. Dans ces conditions, le basculeur se déplace et écrase le ressort. On peut alors relever le couple C au niveau de la cheville (Illustration 10). On obtient alors les diagrammes de Bode dans le document-réponse (question 14).

Attention, l'abscisse est en hertz et le gain est

normalisé $G_{dB} = 20 \log \left(\frac{|H(j\omega)|}{K_0} \right)$.

La courbe en tirets représente le modèle du second ordre déterminé précédemment s'approchant au mieux des courbes expérimentales.

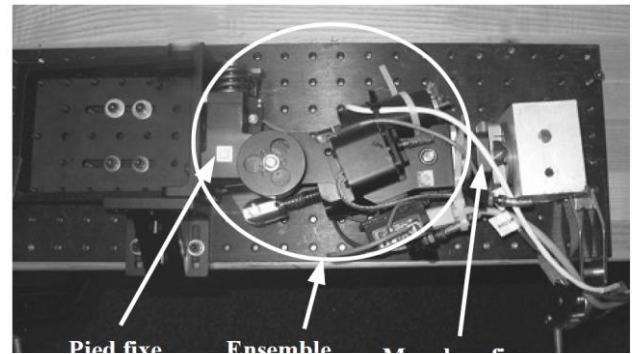


Illustration 11 : montage expérimental : pied et tibia bloqués

Question 14. Déterminer les valeurs numériques de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ_0 à partir de la représentation approchée (courbe en tirets), en détaillant succinctement la méthode utilisée (vous pouvez utiliser le gain et la pulsation à la résonance). Les tracés seront faits sur le document-réponse.

7. Contrôler le processus lors de la phase d'appui

La gestion des modes de commande permet de définir les séquences où l'asservissement s'effectue en position et celles où l'asservissement s'effectue en couple. L'objectif de cette partie est de définir l'asservissement en couple et d'analyser les performances de cet asservissement.

7.1 Mise en place de l'asservissement en couple

On se place pour analyser les performances de l'asservissement en couple dans le cadre de l'expérience d'identification décrite précédemment (pied et tibia bloqués).

L'asservissement en couple est réalisé grâce à un potentiomètre linéaire qui délivre une tension u_{mes} image de la variation de longueur des ressorts $\Delta\chi$. On note K_{capt} le gain de ce capteur. D'autre part, un bloc d'adaptation de gain K_A permet d'obtenir une tension u_{th} image du couple de consigne C_{th} . L'écart ε entre les tensions u_{th} et u_{mes} est corrigé par un correcteur de fonction de transfert $H_c(p)$ qui délivre la tension u_M au moteur par l'intermédiaire de l'amplificateur de gain K_{amp} .

Question 15. Compléter le schéma-bloc du document-réponse (question 15) de l'asservissement en couple. Proposer une expression de K_A permettant de réaliser un asservissement correct (ε doit être une image (proportionnelle) de l'écart $C_{th} - C$.)

L'illustration suivante montre la prothèse commercialisée (modèle BIOM), évolution de la prothèse étudiée dans le sujet.



Cycle de marche (Annexe 1)

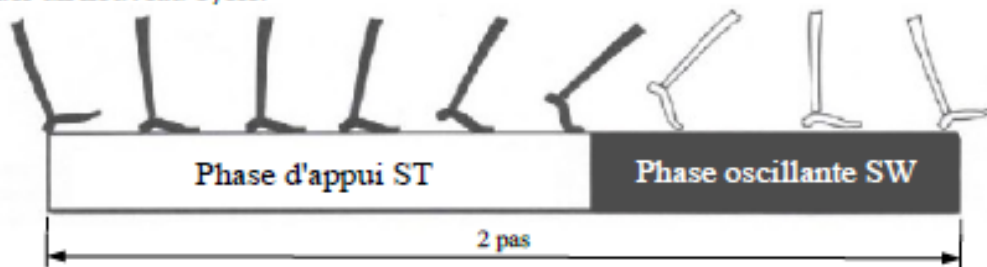
1 Phases principales

La marche est organisée en cycles de mouvements des membres inférieurs. Ces cycles sont reproductibles et symétriques. On ne s'intéresse dans cette étude qu'à la description du cycle de marche de l'ensemble transtibial en ligne droite à vitesse constante. On suppose que les membres supérieurs n'influencent pas la marche.

Le cycle de marche correspond spatialement à une enjambée ou à 2 pas. Par convention, le cycle de marche normale débute lorsque le talon d'un pied se pose et se termine lorsque ce même talon se pose à nouveau sur le sol en un endroit différent.

Le cycle comprend deux phases essentielles :

- la **phase d'appui (ST)** qui commence lorsque le talon touche le sol et se termine lorsque les orteils le quittent,
- et la **phase oscillante (SW)** pendant laquelle le pied ne touche pas le sol mais est déplacé pour effectuer un nouveau cycle.

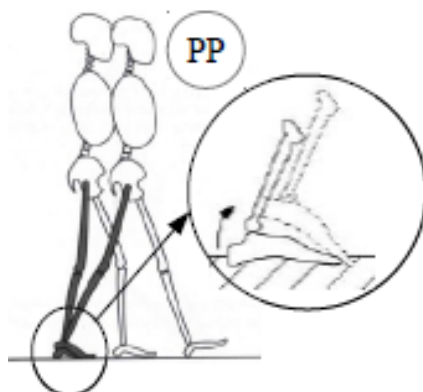
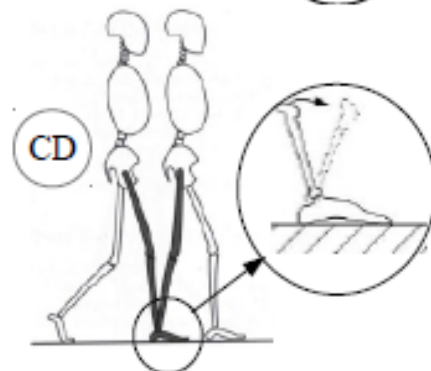
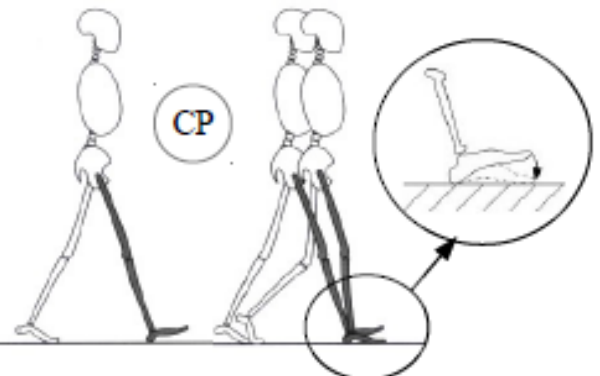


2 Sous-phases

Pour analyser plus finement la marche, on se place dans le plan médian qui sépare la moitié droite de la moitié gauche du corps (plan sagittal). En effet, la très grande majorité des mouvements se font dans des plans parallèles à ce plan sagittal, ce qui valide l'hypothèse d'une étude plane.

La phase d'appui est constituée de 3 sous-phases successives :

- sous-phase « **CP** » (**flexion plantaire amortie**) : elle débute lorsque le talon touche le sol et se termine lorsque les orteils touchent le sol (le pied est alors à plat sur le sol). C'est durant cette phase qu'intervient le transfert de charges d'une jambe à l'autre.
- sous-phase « **CD** » (**dorsiflexion ou flexion du pied contrôlée**) : durant cette phase, le tibia se repositionne vers l'avant de manière à pouvoir propulser le corps lors de la phase suivante.

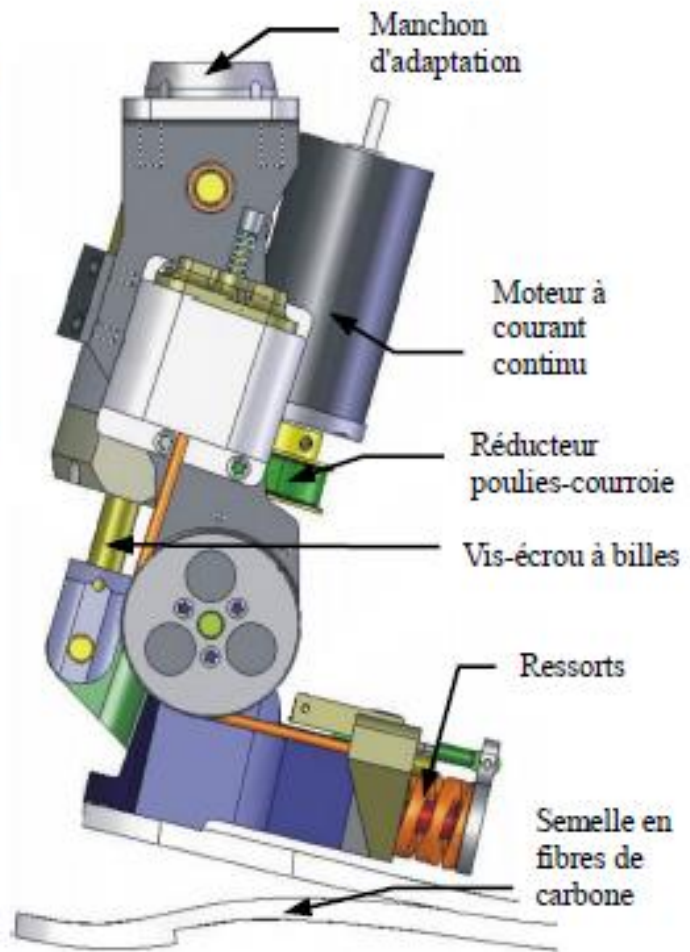
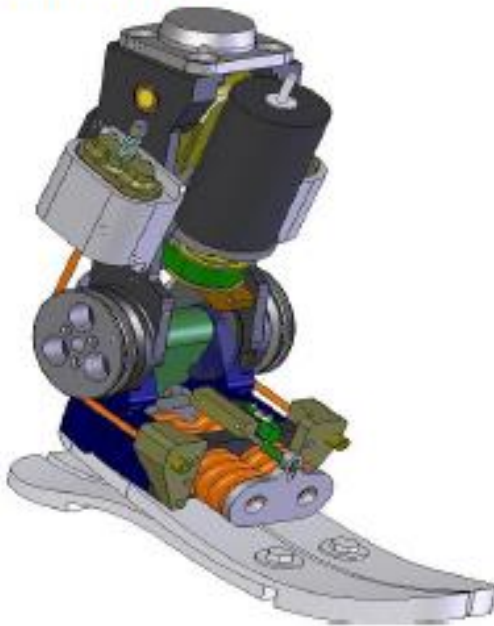


- **Sous-phase « PP » (flexion plantaire propulsive)** : cette phase commence après la phase CD lorsque le talon commence à quitter le sol et se termine lorsque les orteils le quittent également. Pendant cette phase, l'énergie mécanique accumulée lors de la phase précédente est restituée. Cependant, pour les marches modérées à rapides, la propulsion nécessite un travail supplémentaire provenant des muscles. Ce travail noté W se caractérise physiquement par un essoufflement du marcheur lors d'une marche rapide.

Structure des chaînes d'énergie et d'informations (Annexe 2)

1 Chaîne d'énergie

L'actionneur de la prothèse est un moteur à courant continu alimenté par une batterie rechargeable de 16 Volts. L'énergie mécanique est transmise par un réducteur de type poulies-courroie suivi d'un système vis-écrou qui adapte cette énergie mécanique pour la prothèse (ensemble de liaisons entre le pied artificiel constitué d'une semelle en fibres de carbone et le manchon ou tibia artificiel). Des ressorts permettent d'ajuster également l'énergie mécanique fournie au pied artificiel. L'effort exercé par les ressorts est directement relié au couple exercé par l'actionneur.



2 Chaîne d'informations

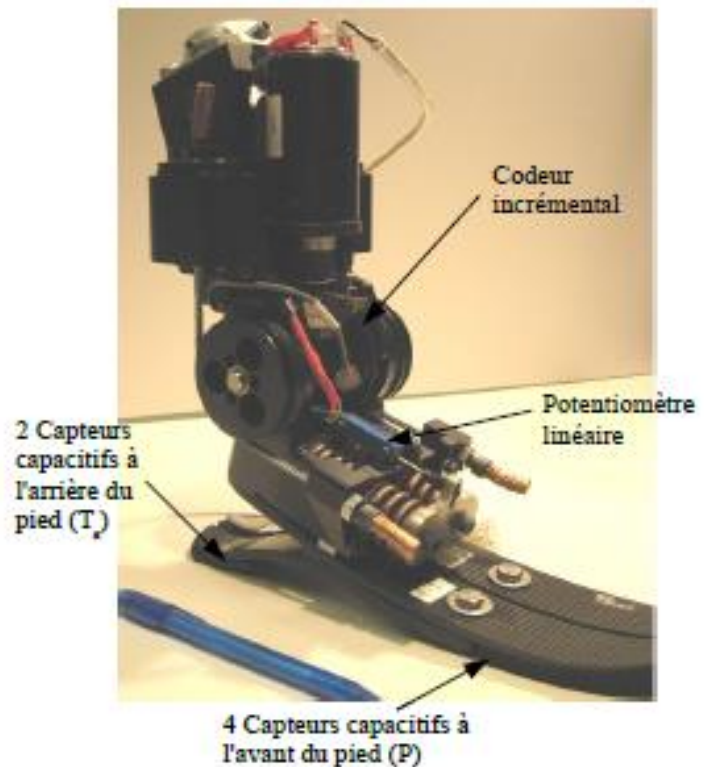
La chaîne d'informations est constituée d'un ensemble de capteurs permettant d'acquérir différentes informations :

- un potentiomètre linéaire qui mesure l'allongement/écrasement du ressort,
- un codeur incrémental placé au niveau de l'articulation pied/tibia,
- plusieurs capteurs capacitifs disposés sous la semelle du pied au niveau du talon T_a et à l'avant du pied P .

Les informations délivrées par les capteurs sont traitées par un ordinateur qui élabore la commande en tension du moteur, U_M appliquée par l'amplificateur.

Cette commande est définie suivant deux modes hiérarchiques :

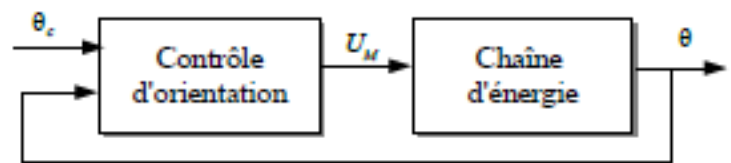
- le premier de niveau haut, définissant les modes de commande à adopter (choix du type d'asservissement)
- le deuxième de niveau bas, contrôlant le processus suivant l'asservissement défini.



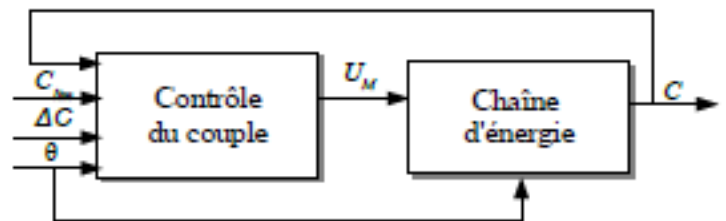
Pour obtenir la loi de consigne $C_{th}(\theta)$ souhaitée, l'asservissement s'effectue en position ou en couple.

- Pendant la phase oscillante (le pied n'est plus en contact avec le sol), un asservissement de position est réalisé (contrôle d'orientation du pied).
- Pendant la phase d'appui, l'asservissement retenu doit permettre :
 - d'ajuster les pentes de la courbe $C_{th}(\theta)$ en fonction du signe de θ
 - d'ajouter un couple ΔC à partir du moment où le couple dépasse une valeur limite C_{lim} et ce jusqu'au moment où le pied n'est plus en contact avec le sol.

On retient donc pour cette phase un pilotage en couple.

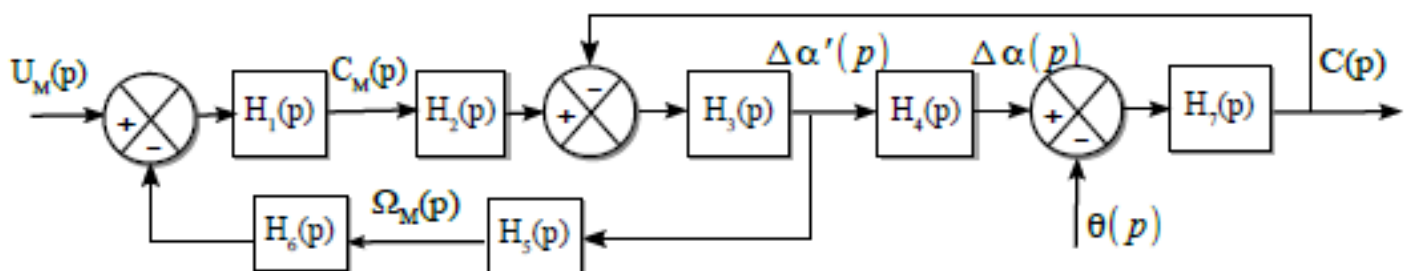


Mode de commande en orientation



Mode de commande en couple

Modélisation de la chaîne d'énergie (Annexe 3)



avec les grandeurs temporelles suivantes :

- u_M tension d'alimentation du moteur (V)
- C_M couple exercé par le moteur (N·m)
- ω_M vitesse angulaire du moteur ($\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$)
- α angle de rotation du basculeur (rad) tel que $\alpha = \alpha_r + \Delta\alpha$ où α_r est la position repos et $\Delta\alpha$ est la variation angulaire autour de la position repos (voir annexe 5 ci-après). On a alors : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Delta\alpha}{dt}$. On note $\Delta\alpha'(p)$ la transformée de Laplace de $\frac{d\Delta\alpha}{dt}$
- θ angle de rotation du pied (rad) tel que $\theta = 0 \text{ rad}$ pour la position repos
- C couple exercé par le pied (N·m).

On note en majuscule, lorsque cela est possible, les variables associées aux grandeurs temporelles dans le domaine symbolique.

Caractéristiques du moteur à courant continu (Annexe 4)

Moteur Maxon RE40

Tension maximale u_{max} : 16 V	Résistance R : 1 Ω
Vitesse angulaire maximale sans charge N_{max} : 7600 $\text{tr}\cdot\text{min}^{-1}$	Constante de couple k_c : 0,02 $\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$
Couple maximal (pic) C_{max} : 2,5 N·m	Constante de fcem $k_e = k_c$: 0,02 V·s
Courant sans charge : 0,07 A	Inertie du rotor J_M : $1,34 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Paramétrage de la prothèse (Annexe 5)

- Le repère $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au tibia noté 0 fixe dans toutes nos études. Ce repère est supposé galiléen (hypothèse justifiée dans le sujet).
- Le repère $R_1(O, \vec{x}, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ est lié au pied artificiel noté 1, supposé indéformable. On note $\theta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ l'angle de rotation du pied par rapport au tibia. D'autre part, le vecteur unitaire \vec{n}_1 définit la direction des ressorts avec $\delta = (\vec{y}_1, \vec{n}_1)$ considéré comme constant tout au long du cycle de marche.
- Le repère $R_2(O, \vec{x}, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ est lié au basculeur noté 2. On note $\alpha(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = (\vec{z}_0, \vec{z}_2)$ l'angle de rotation du basculeur par rapport au tibia.
- Le repère $R_3(A, \vec{x}, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ est lié au vérin électrique 3. On note $\beta(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{z}_0, \vec{z}_3)$ l'angle de rotation du vérin électrique par rapport au tibia. Le vérin électrique comporte une tige notée 3_1 et un corps noté 3_2 .

On pose : $\vec{OA} = a\vec{z}_0$, $\vec{BA} = \lambda(t)\vec{y}_3$, $\vec{BO} = b\vec{y}_2$, $\vec{SO} = b\vec{z}_2$ avec $b = 0,039$ m et $a = 0,117$ m

En l'absence d'action sur la prothèse, une position repos est identifiée par les paramètres θ_R , α_R et δ_R . Cette position est notamment obtenue lorsque le tibia est vertical et que le pied est en appui horizontalement sur le sol. Les valeurs numériques sont alors : $\theta_R = 0^\circ$, $\alpha_R = 9^\circ$ et $\delta_R = \delta = -17^\circ$.

Afin de linéariser le comportement autour de la position repos, on écrira le cas échéant :

- $\alpha = \alpha_R + \Delta\alpha$
- $\theta = \theta_R + \Delta\theta = \Delta\theta$ avec $\Delta\alpha$ et $\Delta\theta$ les variations angulaires autour de la position repos.

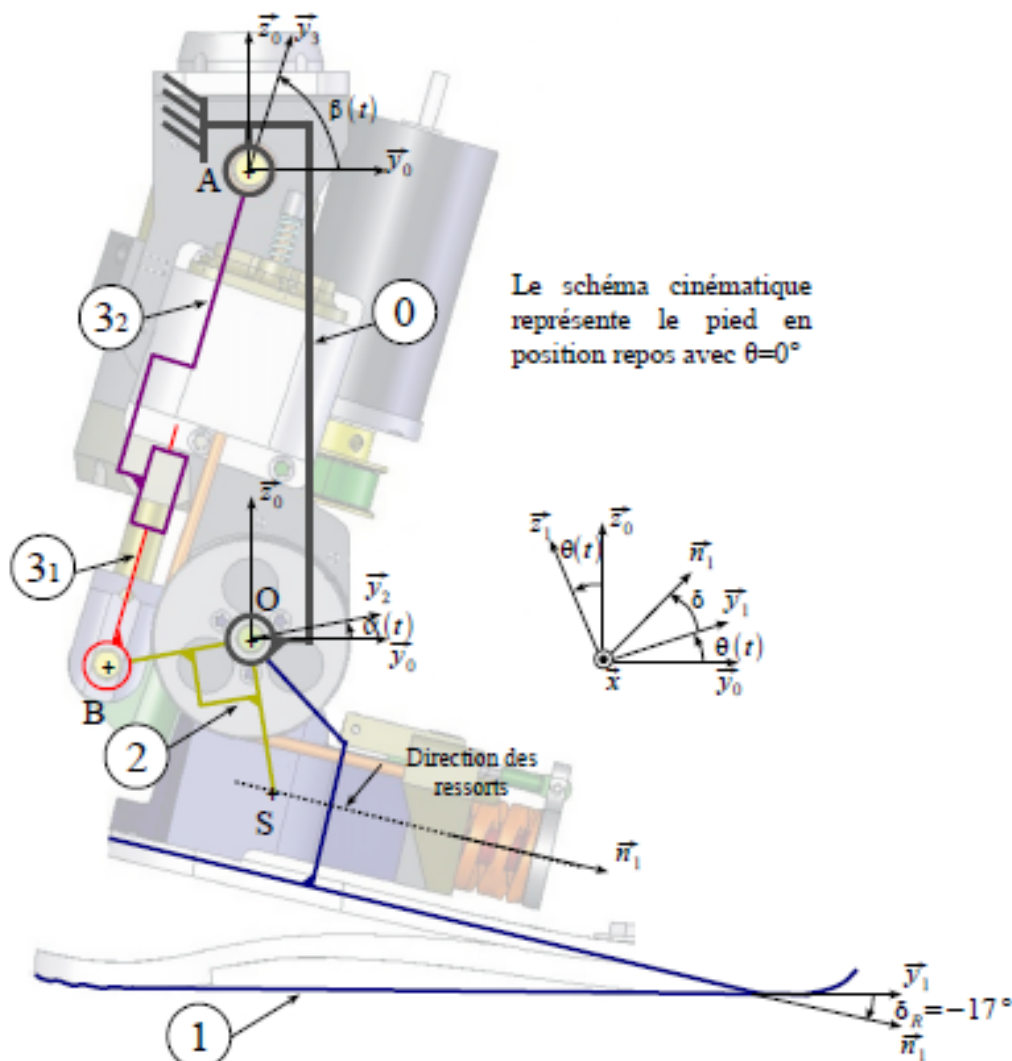


Schéma cinématique de la prothèse en position repos

Problème N°9 : bras collaboratif (extrait centrale mp2016)

Dans le contexte industriel actuel, il existe encore un grand nombre de tâches pénibles qui ne peuvent pas être automatisées et où le geste humain reste indispensable. L'introduction d'une assistance robotique peut alors être envisagée pour réduire les efforts que l'opérateur doit fournir et ainsi éviter l'occurrence de troubles musculo-squelettiques. Le bras collaboratif de l'entreprise sapelem, nommé ZE Solution, permet de manipuler intuitivement différents types de charges allant jusqu'à 200 kg « sans effort ». Afin de respecter la confidentialité de ce système, les données et résultats présentés dans ce sujet sont approchés et limitatifs par rapport à la solution industrielle réelle.



Figure 11 : Photos du bras manipulateur collaboratif sapelem et d'un environnement de manutention

I. Mise en évidence de l'objectif de l'étude

Objectif : S'approprier la problématique du sujet en effectuant une vérification partielle des exigences d'un bras manipulateur collaboratif conçu par la société sapelem.

I.A – Exigences du commanditaire

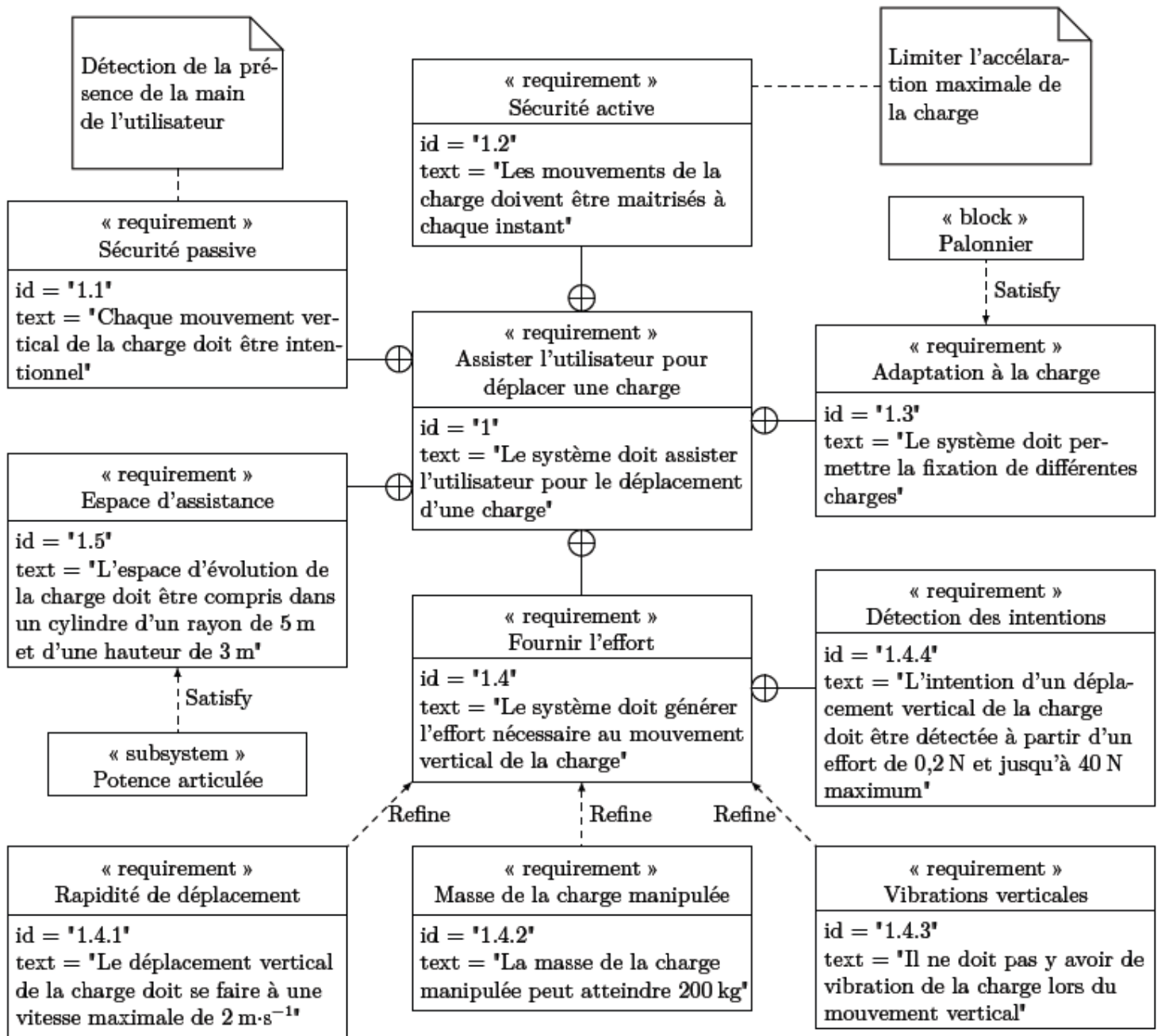


Figure 12 : Diagramme des exigences du bras manipulateur collaboratif sapelem

I.B – Architecture matérielle de la solution conçue par sapelem

Le diagramme de définition de blocs du bras manipulateur collaboratif qui constitue l'objet de cette étude est fourni sur la figure 3.

Dans toute l'étude, seul le mouvement vertical de la charge sera étudié.

I.C – Vérification partielle des exigences

I.C.1- Sécurité active

Afin de satisfaire l'exigence id 1.2, il est nécessaire de s'assurer que le câble de levage est toujours tendu. On désigne l'ensemble {palonnier + charge transportée} sous le terme générique « charge ». Cette charge a pour masse M . Lors d'un déplacement vertical, le câble exerce, sur cette charge, une action mécanique de résultante $T\vec{z}$ où \vec{z} est un vecteur unitaire dirigé vers le haut. On note $a\vec{z}$ le vecteur accélération vertical de la charge par rapport au référentiel galiléen. L'action de la main de l'utilisateur sur la poignée est négligée par rapport aux autres actions durant cette phase.

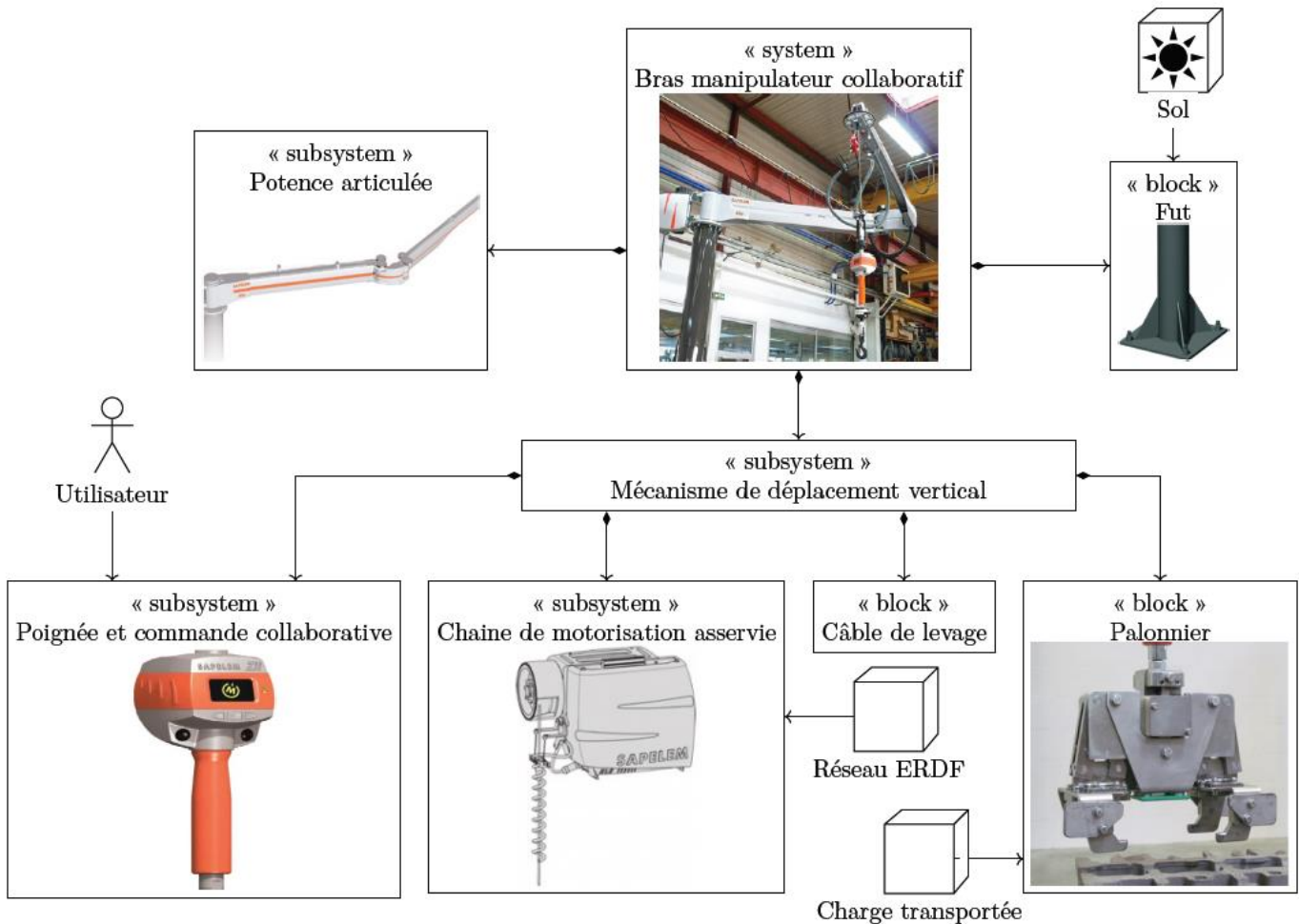


Figure 13 : Diagramme de définition de blocs du bras manipulateur collaboratif sapelem

Q1. Déterminer la valeur de T en fonction de M , a et g , l'accélération de la pesanteur. Pour cela, isoler la charge et préciser le théorème employé. Pour quelle valeur de l'accélération a , la résultante T s'annule-t-elle ? Conclure sur le critère à respecter pour valider l'exigence id 1.2.

I.C.2- Comportement attendu

L'intention de l'utilisateur est détectée par la mesure de la résultante d'action mécanique $\vec{F}_{op} = F_{op}\vec{z}$ qu'il exerce sur la poignée (figure 5), par l'intermédiaire d'un capteur d'effort. La commande collaborative traite cette information et élabore la consigne de mouvement de la charge destinée à la chaîne de motorisation asservie. Cette dernière met en mouvement la charge.

Le comportement attendu du bras manipulateur collaboratif est le suivant :

- si l'utilisateur exerce un effort $F_{op} \geq 0,2 \text{ N}$, la charge doit se déplacer verticalement
- si l'utilisateur relâche la poignée, $F_{op} = 0$, la charge doit s'arrêter dans la position où elle se trouve.

Le schéma de la figure 6 décrit le principe de la boucle collaborative.



Figure 14 : Bras manipulateur en situation

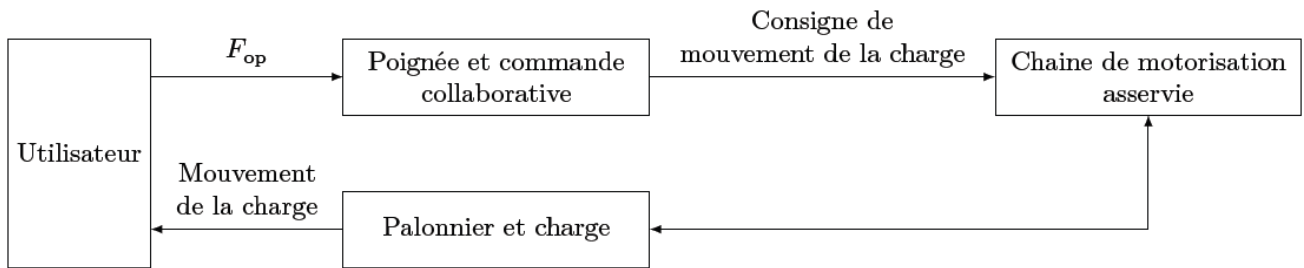


Figure 15 : Architecture de la boucle collaborative

On considère dans un premier temps que l'ensemble poignée et commande collaborative est modélisé par un gain proportionnel. Dans ce cas, la consigne de mouvement de la charge envoyée à la chaîne de motorisation asservie est proportionnelle à l'effort exercé par l'utilisateur sur la poignée. Plusieurs consignes de mouvement de la charge peuvent être envisagées :

- consigne d'accélération ;
- consigne de vitesse.

On se propose de justifier que seule une consigne de vitesse permet de satisfaire au comportement attendu.

Q2. *Considérons un système en translation possédant, à l'instant initial $t = 0$, une vitesse linéaire V_0 et une position z_0 . Donner l'expression de la position $z(t)$ de ce système lorsqu'il est soumis à une accélération a constante. Que vaut F_{op} dans le cas où l'utilisateur lâche la poignée ? Justifier alors que seule une des deux consignes envisagées engendre le comportement attendu.*

I.C.3- Vibrations et vitesse maximale

On procède à un essai sur le bras manipulateur collaboratif. Une charge étant suspendue au palonnier, l'utilisateur exerce sur la poignée un échelon d'effort $F_{op} = -20$ N (donc dirigé vers le bas). La figure 7 présente la consigne de vitesse ainsi que l'évolution temporelle de la vitesse de la charge par rapport à la potence articulée en réponse à cette consigne.

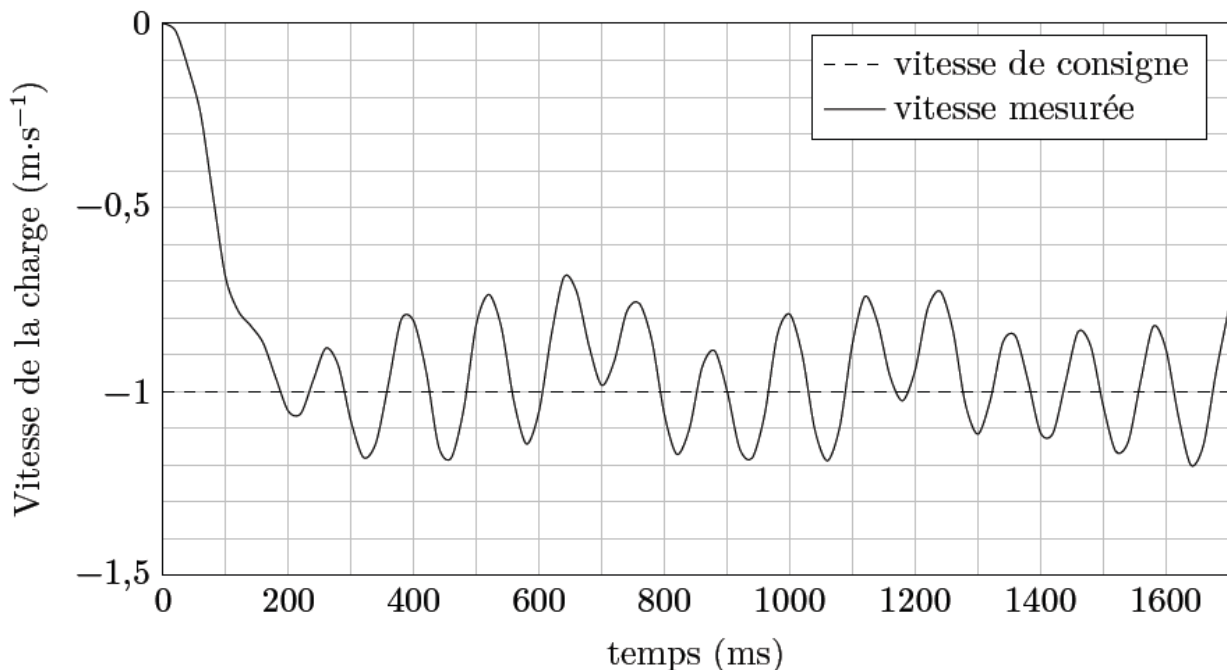


Figure 16 : Courbe de vitesse de la charge par rapport à la potence articulée

Q3. *À partir de la figure 7, en admettant que l'exigence id 1.4.4 soit satisfaite et dans l'hypothèse d'un modèle de proportionnalité de l'ensemble poignée et commande collaborative, vérifier si les exigences id 1.4.1 et id 1.4.3 sont satisfaites.*

Le constructeur fournit les informations de la figure 8 dans sa documentation commerciale du système.

Q4. À partir de la figure 8 et du diagramme des exigences, identifier quelle exigence est satisfaite par l'introduction du filtre « DSC » (Dynamic Stability Control).

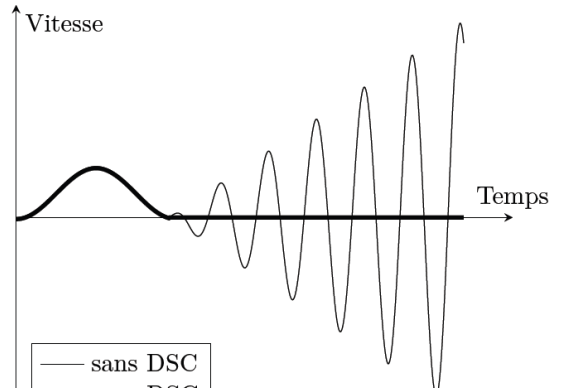


Figure 17 : Extrait de la documentation commerciale

I.C.4- Objectif de l'étude

L'objectif de l'étude qui suit est de proposer une solution permettant de limiter les vibrations. Pour atteindre cet objectif, l'étude est organisée en deux phases :

- identifier l'origine des vibrations ;
- valider les performances de la boucle collaborative avec un filtre DSC.

II Étude de l'asservissement de vitesse de la chaîne de motorisation asservie

Objectif : Vérifier que l'asservissement en vitesse du sous-système chaîne de motorisation asservie n'est pas à l'origine des vibrations.

Dans cette partie, on suppose que la potence articulée est indéformable, que le câble de levage est inextensible et que l'exigence id 1.2 est vérifiée.

II.A – Analyse structurelle du mécanisme de déplacement vertical

Objectif : Analyser l'architecture matérielle du mécanisme de déplacement vertical.

Les diagrammes de définition de blocs et de blocs internes, permettant de décrire la structure du mécanisme de déplacement vertical de la charge, sont fournis sur les figures 8 et 9.

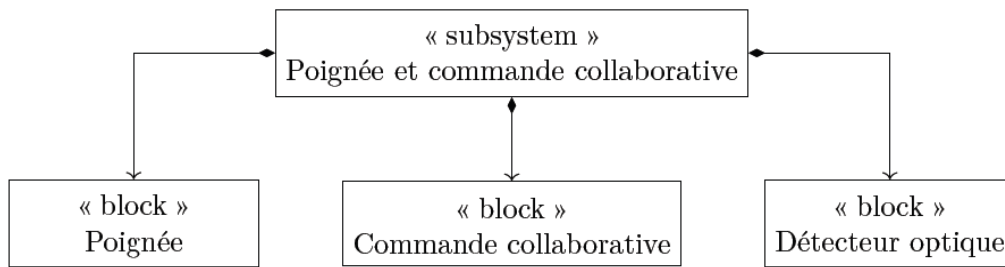


Figure 18 : Diagramme de définition de blocs du sous-système « poignée et commande collaborative »

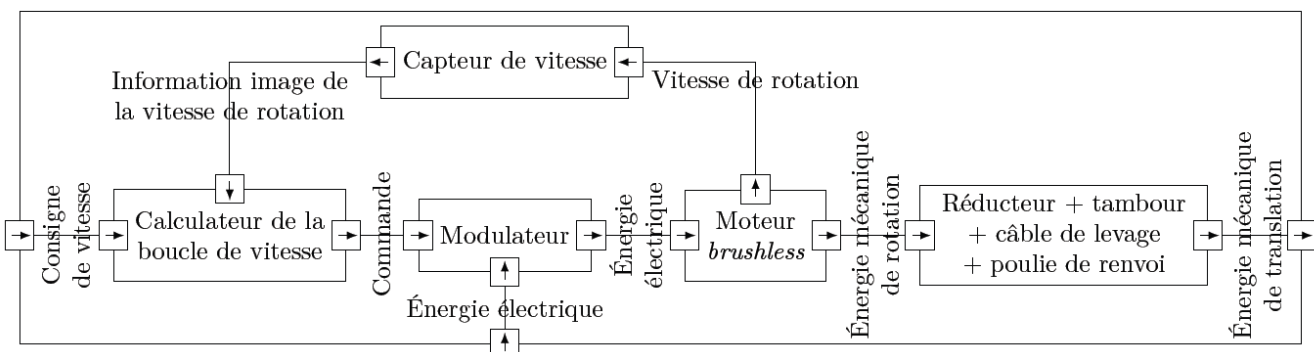


Figure 19 : Diagramme de blocs internes de la chaîne de motorisation asservie

Q5. À l'aide des figures 6, 9 et 10, compléter sur le document réponse les zones manquantes des chaînes fonctionnelles du bras manipulateur collaboratif. Entourer sur ce schéma, en rouge, les éléments de la chaîne d'énergie et, en bleu, ceux de la chaîne d'information.

II.B – Choix du correcteur de la chaîne de motorisation asservie

Objectif : Déterminer les paramètres du correcteur de la boucle de vitesse.

II.B.1- Caractéristiques des constituants de la chaîne fonctionnelle du mécanisme de déplacement vertical

Le schéma-blocs de la chaîne de motorisation asservie est présenté sur le document réponse.

- Le calculateur de la boucle de vitesse génère la consigne de courant d'intensité $i_c(t)$ à imposer au moteur brushless en comparant la vitesse angulaire de consigne à la vitesse angulaire réelle mesurée par un capteur de vitesse placé sur l'arbre moteur.
- La boucle interne de courant du moteur brushless est considérée parfaite et en conséquence est modélisée par un gain unitaire, comme indiquée dans le document réponse.
- Le couple $C_m(t)$ fourni par le moteur brushless au réducteur vérifie la relation $C_m(t) = K_m.i(t)$.

Paramétrage cinématique

Grandeur	Notation	Valeur
Vitesse angulaire du moteur	$\omega_m(t)\vec{z}$	
Vitesse angulaire du tambour	$\omega_T(t)\vec{z}$	
Rayon du tambour et de la poulie de renvoi	R	$R = 0,05 \text{ m}$
Rapport de réduction du réducteur	$\frac{1}{\rho} = \frac{\omega_T(t)}{\omega_m(t)}$	$\rho = 15,88$
Vitesse linéaire de la masse en translation	$v(t)\vec{z} = \dot{z}(t)\vec{z}$	

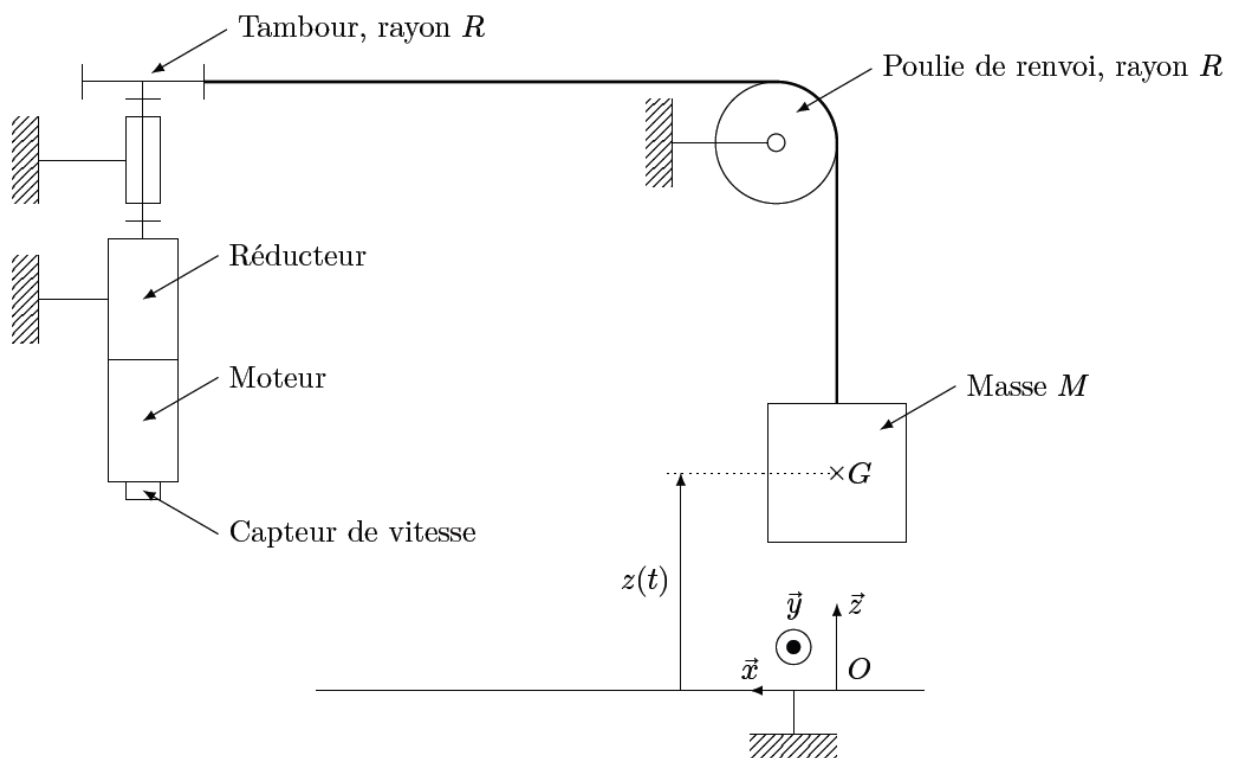


Figure 20 : Schéma de principe du mécanisme de déplacement vertical

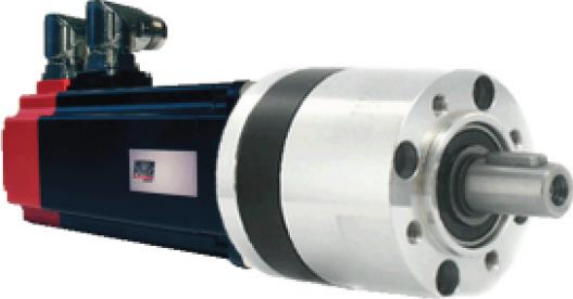
Paramétrage des masses et inerties

Grandeur	Notation	Valeur
Masse entraînée	M de centre de gravité G	$M \leq 200 \text{ kg}$
Inertie du moto-réducteur autour de son axe de rotation, rapportée sur l'axe du moteur <i>brushless</i>	J_0	$J_0 = 0,00315 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
Masses du rotor et des éléments mobiles du réducteur		Négligées
Câble de levage		Masse et inertie négligées Câble inextensible
Poulie de renvoi		Masse et inertie négligées
Tambour		Masse et inertie négligées

Paramétrage des actions mécaniques

Grandeur	Notation	Valeur
Couple imposé par le stator du moteur <i>brushless</i> sur le rotor	$C_m(t)\vec{z}$	
Rendement du réducteur		1
Accélération de la pesanteur	$-g\vec{z}$	$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

L'actionneur (moto-réducteur) choisi par le constructeur est l'association d'un moteur brushless et d'un réducteur, dont les caractéristiques sont les suivantes :

Moteur <i>brushless</i> 400V/0016	Caractéristiques	Valeur
	Vitesse maximale du moteur en charge	$6\,200 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$
	Couple moteur nominal	$3,15 \text{ N}\cdot\text{m}$
	Couple moteur maximal	$10,8 \text{ N}\cdot\text{m}$
	Courant nominal	$3,5 \text{ A}$
	Courant maximal	12 A

II.B.2- Vérification du choix de l'actionneur

Dans le cadre des hypothèses retenues, on pose $v(t) = K_{\text{rigide}} \cdot \omega_m(t)$ avec $K_{\text{rigide}} > 0$ par convention.

Q6. Déterminer la valeur numérique de K_{rigide} . Vérifier que l'actionneur retenu permet de respecter l'exigence id 1.4.1.

On souhaite déterminer l'équation du mouvement de l'axe du moteur brushless liant le couple $C_m(t)$ à la vitesse angulaire $\omega_m(t)$ à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.

Q7. Préciser le système isolé et les puissances mises en jeu en vue de déterminer l'équation de mouvement de l'axe du moteur brushless.

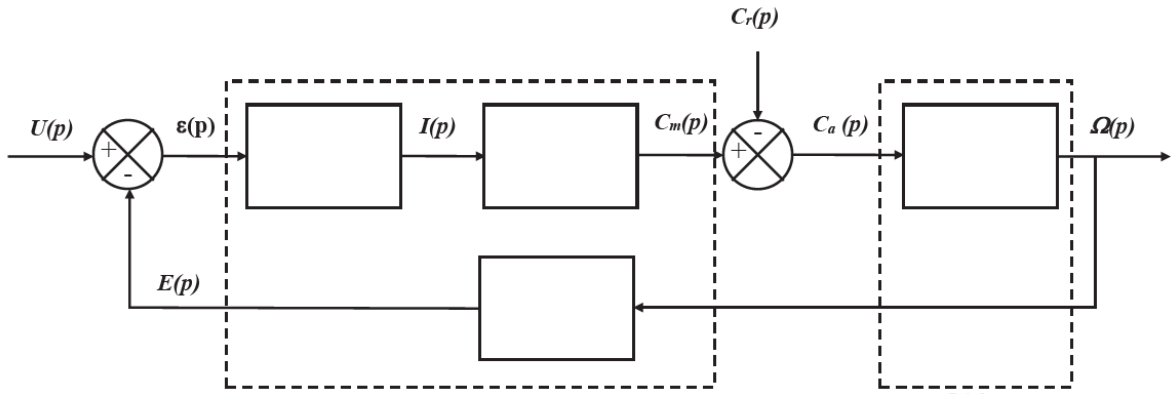
Q8. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit sous la forme $A \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - B$ et expliciter les constantes A et B en fonction des paramètres M , g , J_0 et K_{rigide} .

Q9. Déterminer, en descente, l'accélération maximale qu'il est possible d'atteindre avec l'actionneur retenu pour une masse maximale $M = 200 \text{ kg}$. Valider ou non l'hypothèse de satisfaction de l'exigence id 1.2 faite pour cette étude.

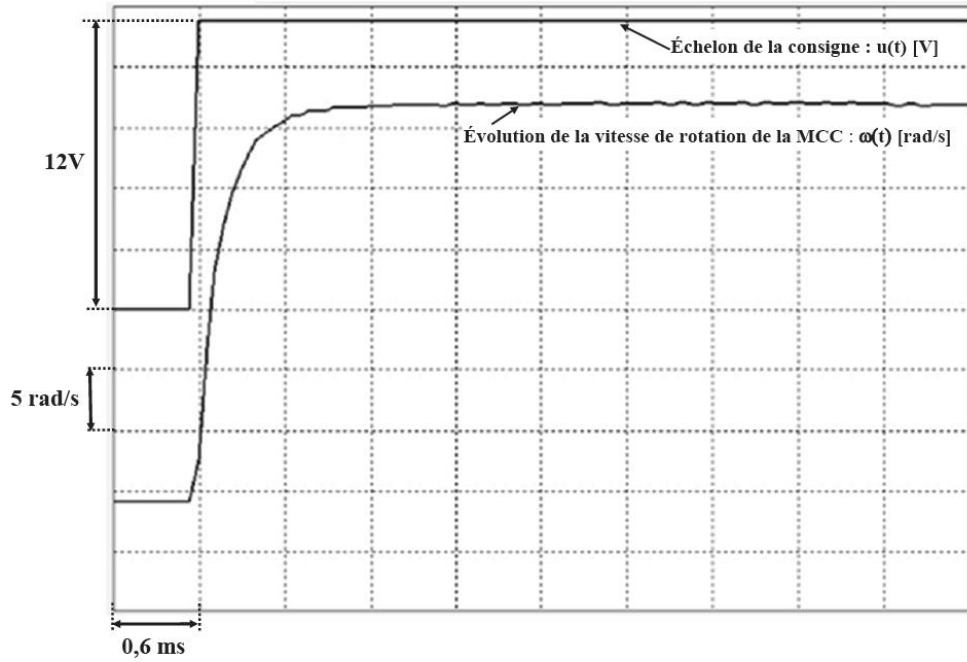
Q10. Conclure en justifiant que le contrôle du courant (t) permettra de s'assurer de la satisfaction de l'exigence id 1.2.

Document réponse problème 2

Q15 :

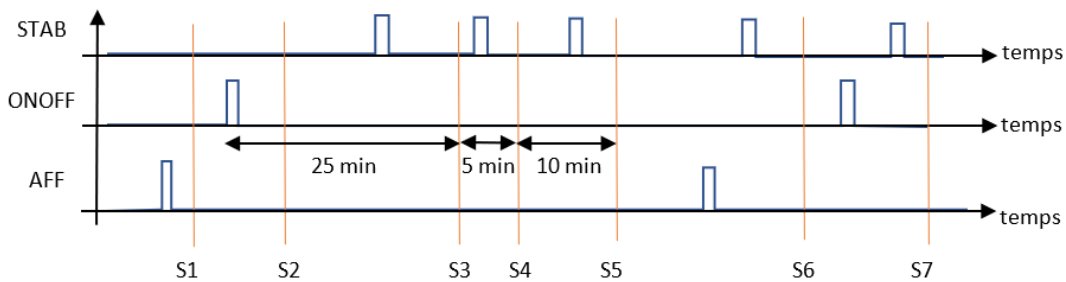


Q18 :



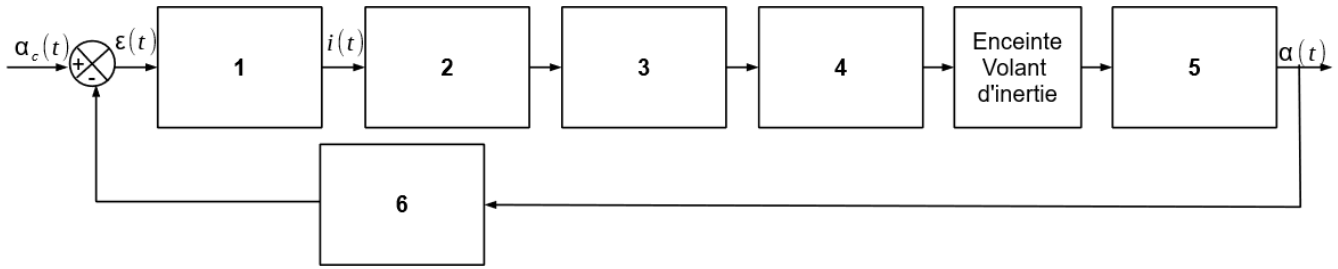
Document réponse problème 3

Q1. Fonctionnement du système



Situations	Zone d'affichage	Bouton ONOFF	Bouton STAB	Barre de progression visible
S1	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S2	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S3	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S4	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S5	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S6	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non
S7	Courbe / Cadran	Bleu / Gris / Caché	Bleu / Gris / Caché	Oui / Non

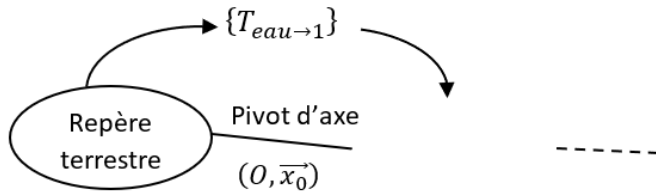
Q2. Schéma-blocs fonctionnel



Repères	Constituants du schéma-blocs
1	
2	
3	

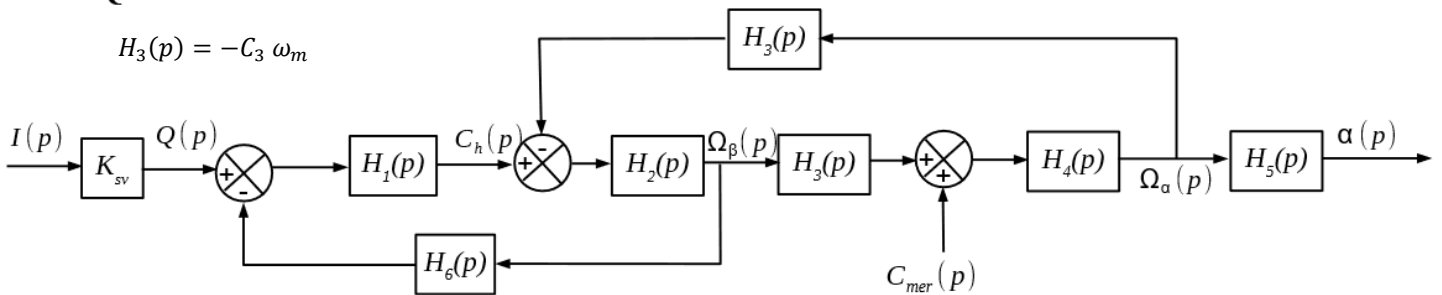
Repères	Constituants du schéma-blocs
4	
5	
6	

Q5. Graphe des liaisons

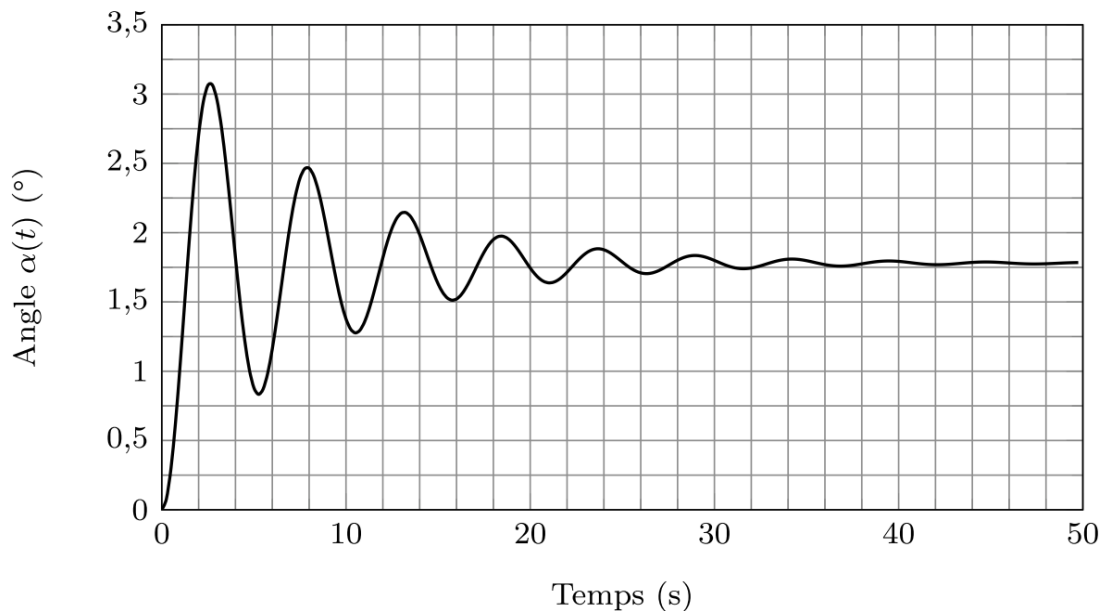


Q13. Schéma-blocs

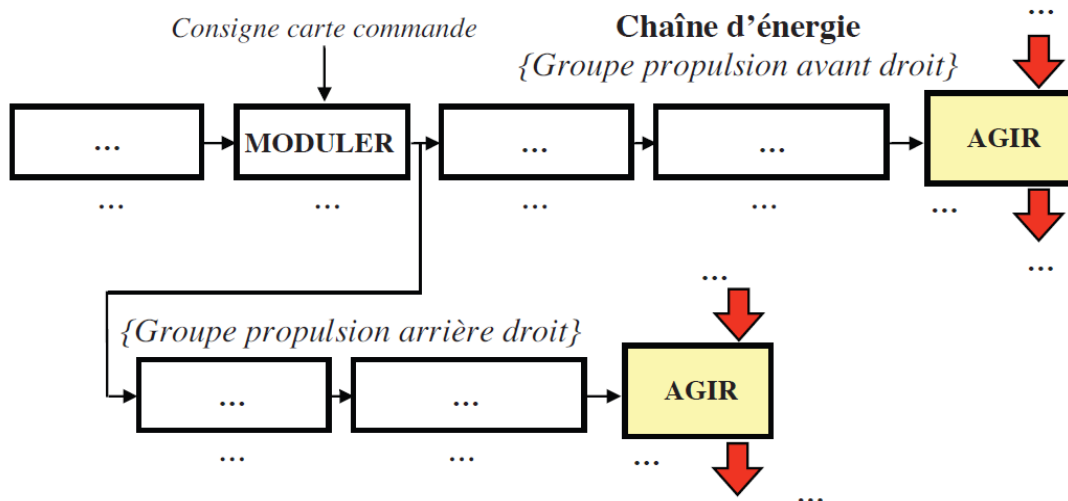
$$H_3(p) = -C_3 \omega_m$$



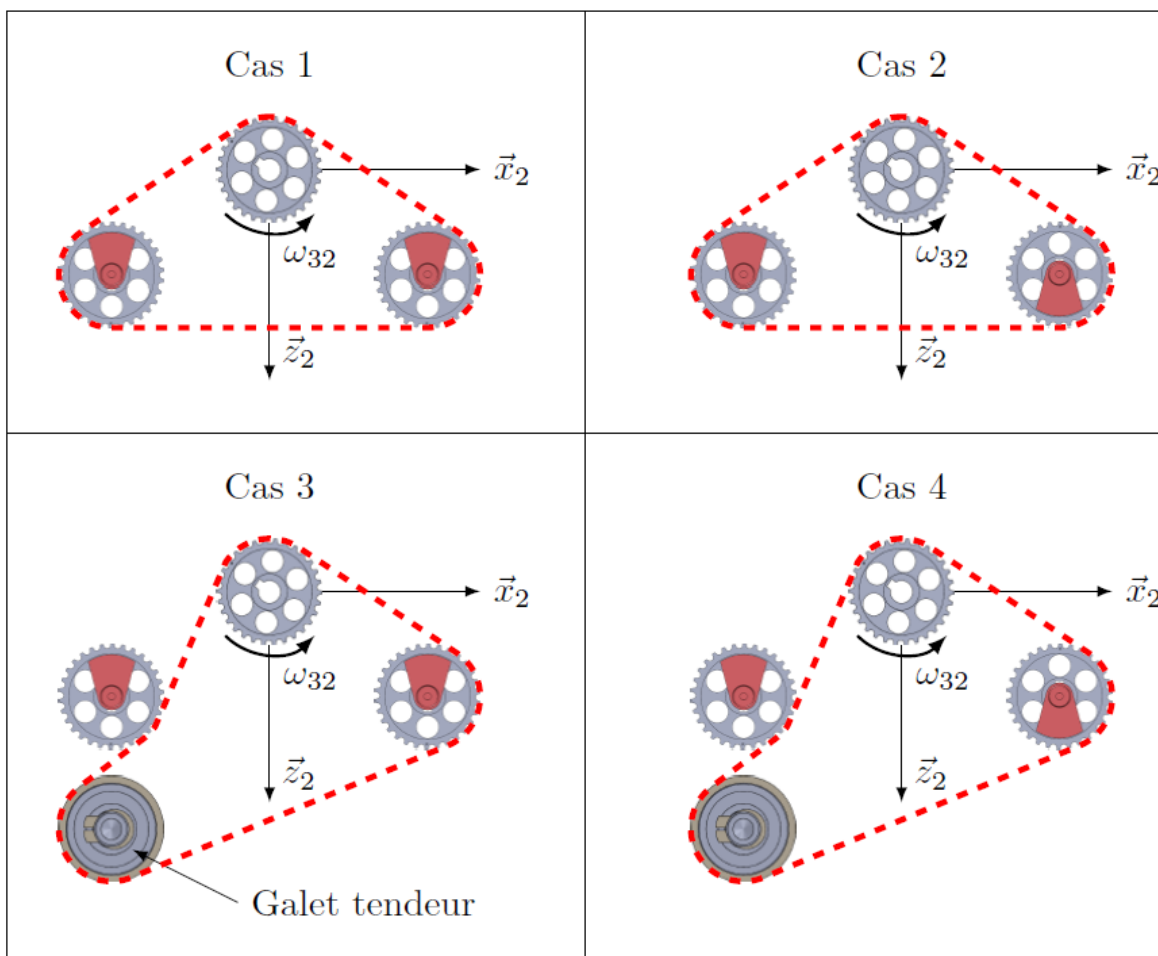
Q15 :



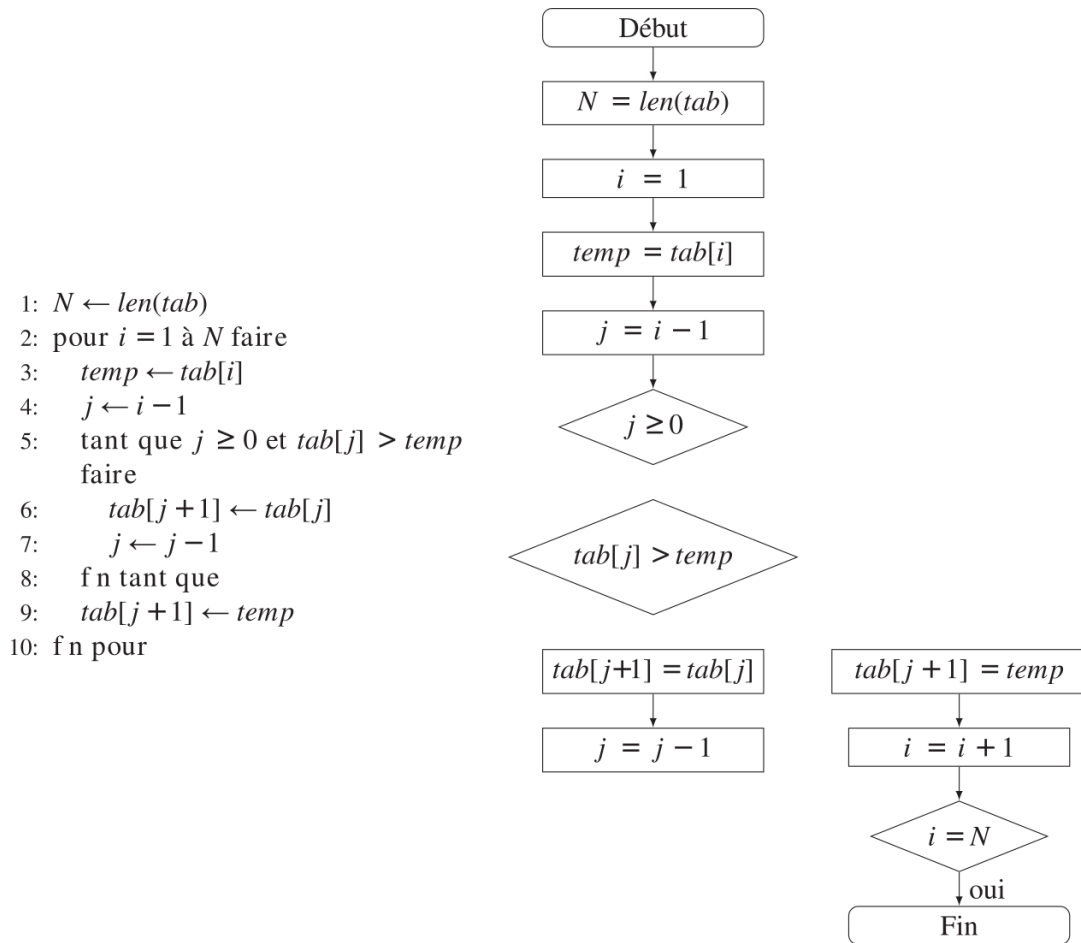
Document réponse problème 5



Document réponse problème 6

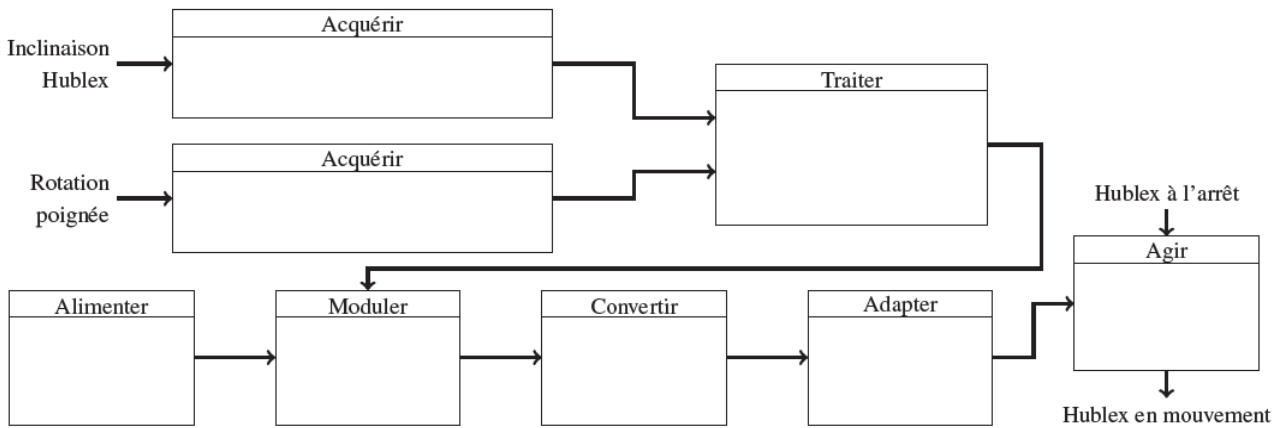


Algorithme et algorithme d'un processus de tri



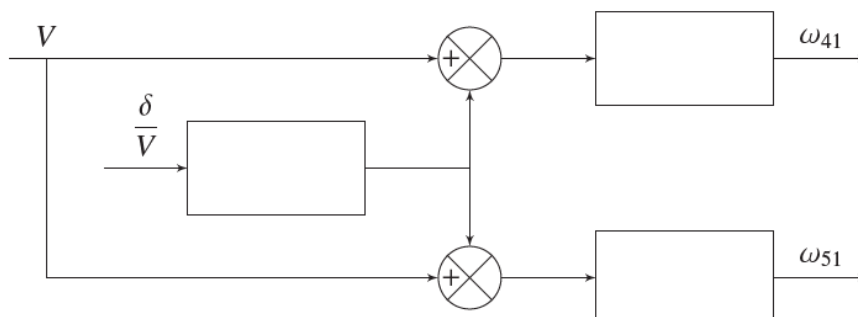
Document réponse problème 7

Q1.



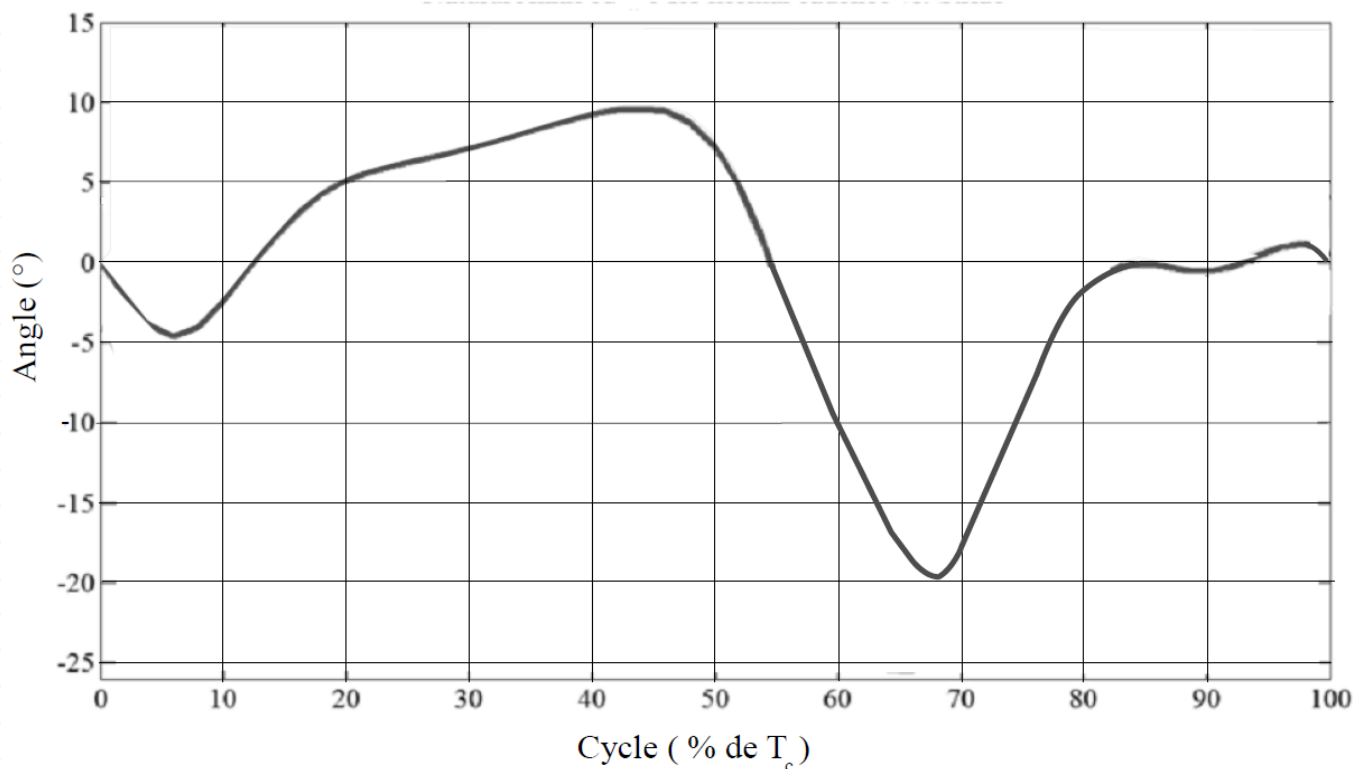
DR2 - SCHEMA BLOC DE LA GENERATION DES CONSIGNES

Q9.



Document réponses Problème 8

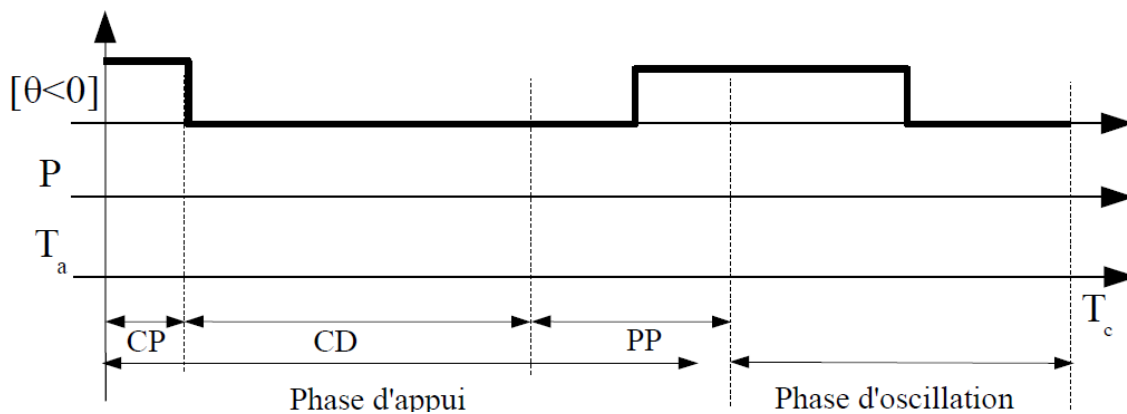
Q1 :



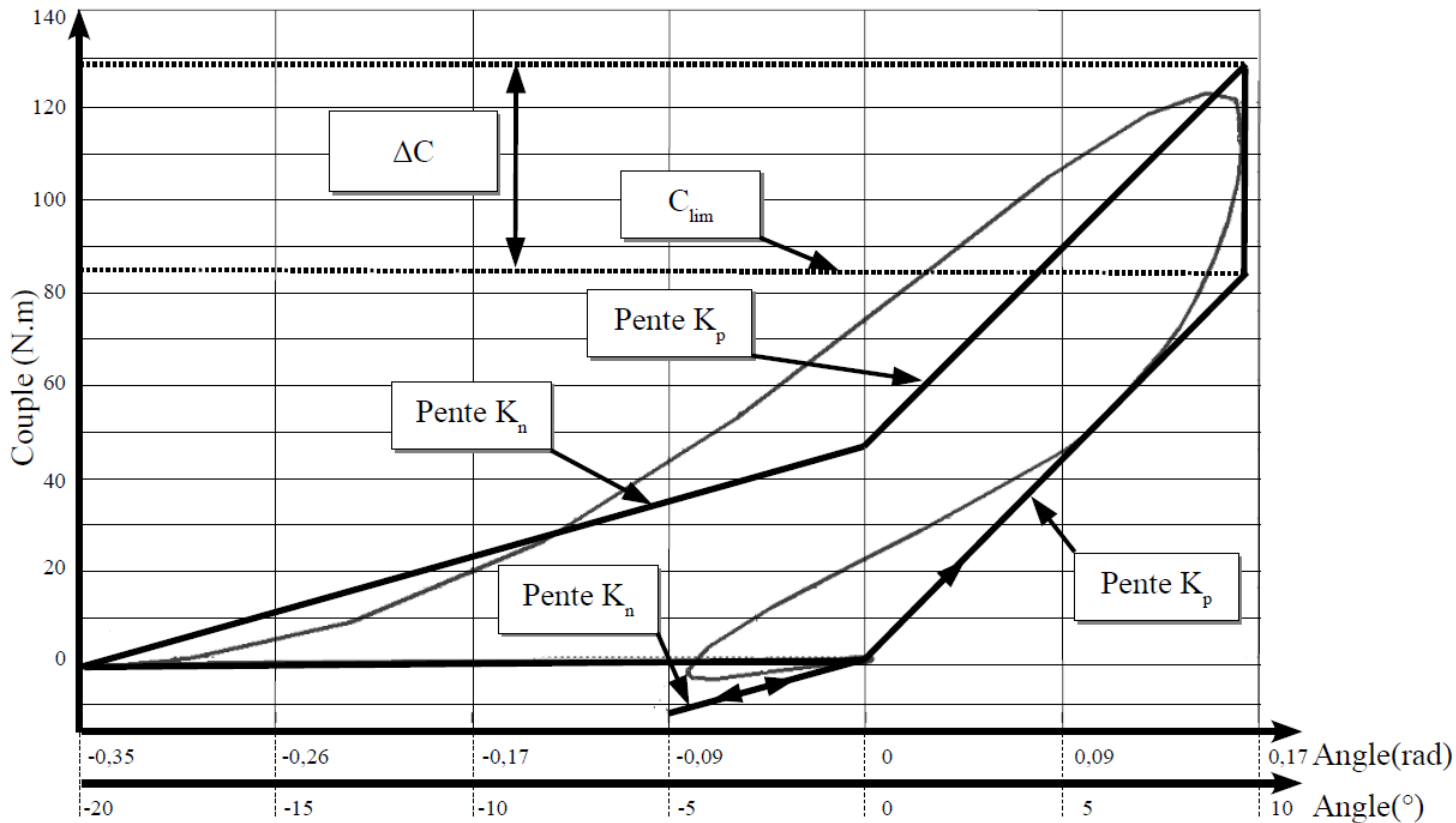
Q2 :

Critères	Valeurs du CDC	Valeurs relevées
Valeurs extrêmes de l'angle θ	Flexion plantaire propulsive : -25° Dorsiflexion : 15°	
Vitesse angulaire maximale θ_{\max}	$5,2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	
Couple maximal à fournir	$140 \text{ N} \cdot \text{m}$	
Travail maximal à fournir	20 J	

Q5 :

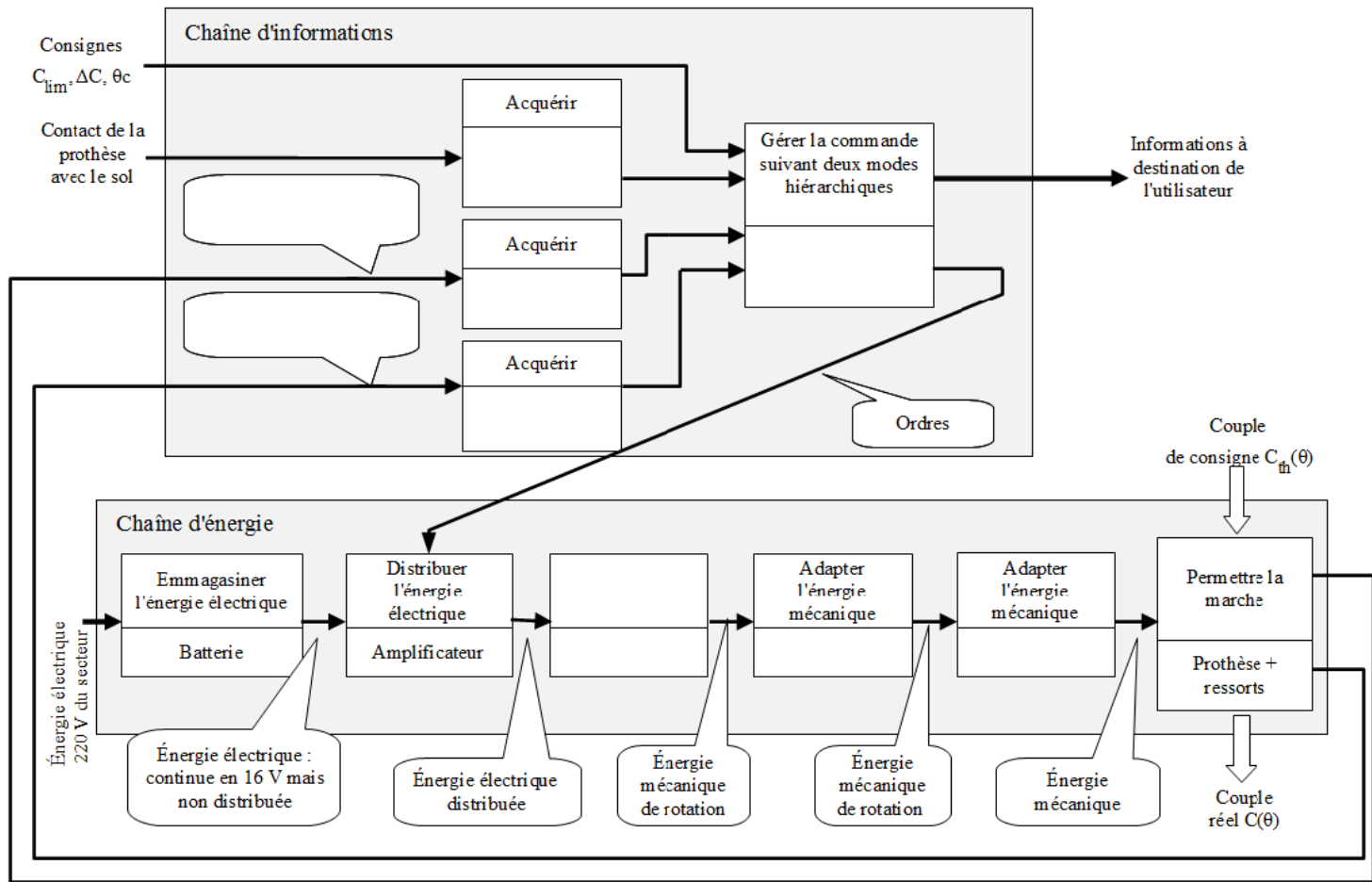


Q3 :

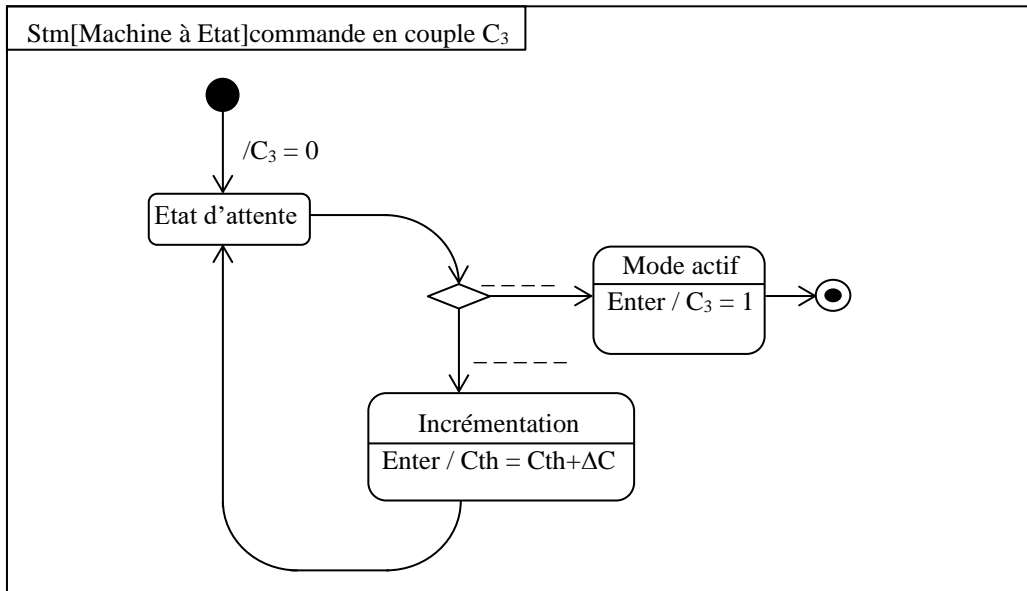


Comparaison des lois théorique et expérimentale pour une cadence normale

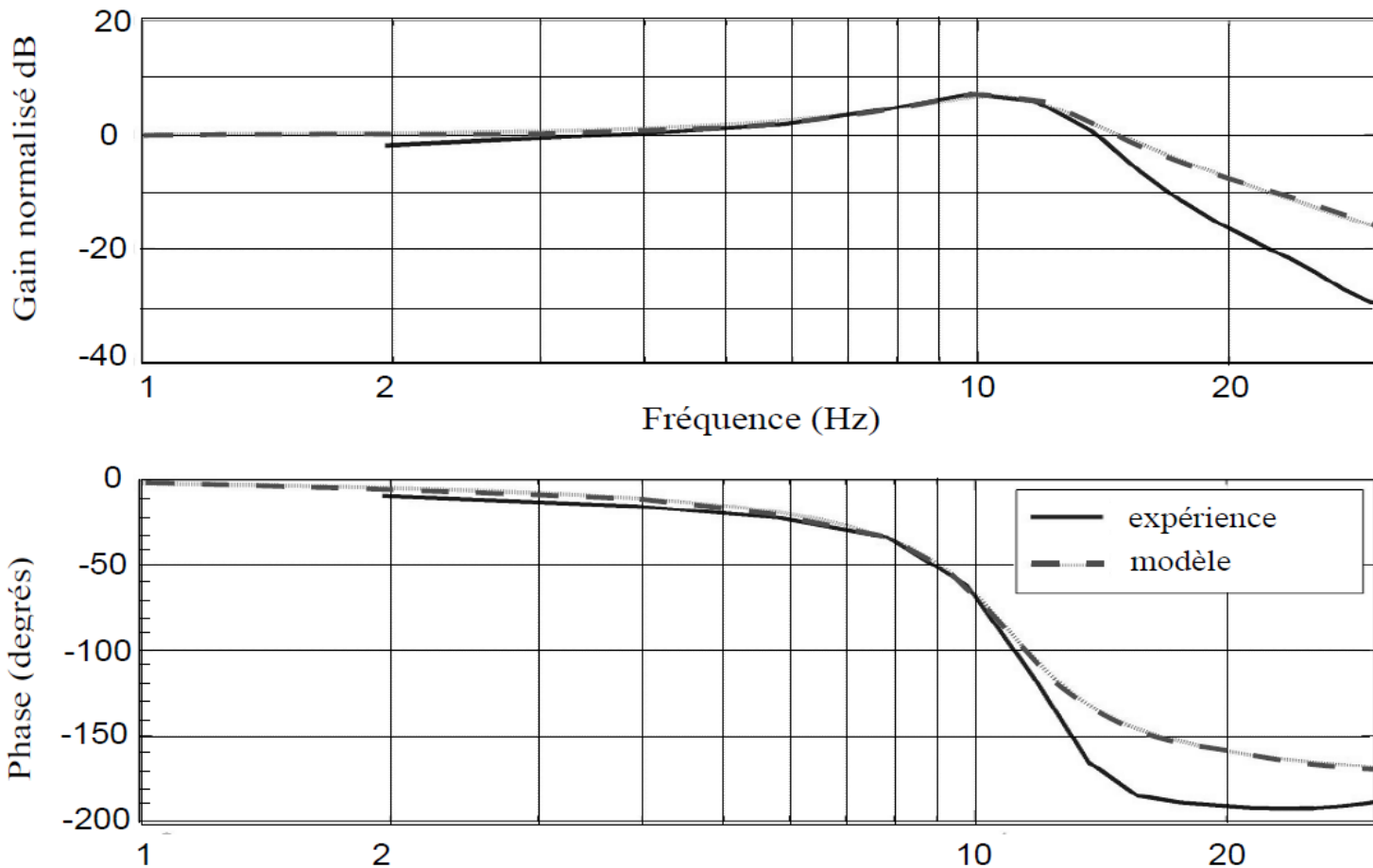
Q4 :



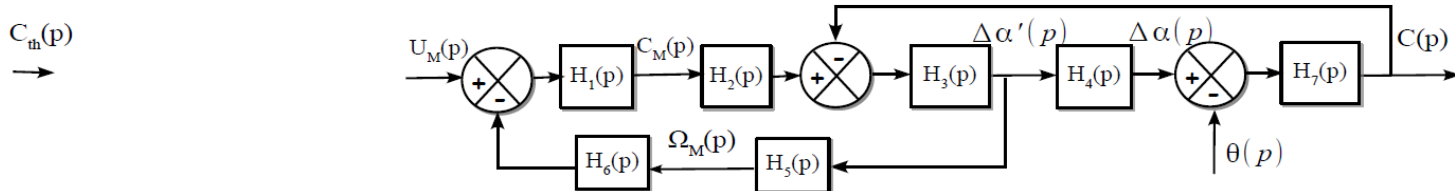
Q6 :



Q14 :



Q15 :



Document réponse problème 9

