

DS N°1

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Durée 4 heures

Le devoir comporte trois problèmes extraits de sujets portant principalement sur la mécanique

Ils sont classés a priori par ordre de difficulté

Problème N°1 : Véhicule intelligent Rubocar (extrait e3a mp 2013)

1.Présentation

1.1.Contexte

L'optimisation des transports de demain passera par l'emploi de véhicules dits intelligents. Des expériences ont déjà été tentées pour la réalisation de trains de poids lourds capables de se suivre en toute sécurité et à distance fixe, le lien étant télémétrique au lieu d'être physique.

Cette capacité "d'accrochage télémétrique" entre véhicule maître (leader) et véhicule suiveur (esclave) peut être transposée à de nombreuses applications : transbordeurs de containers, exploitation minière / terrassement, transports en commun du futur...).

Afin d'étudier les comportements possibles de ces trains de véhicules intelligents dans différentes situations, normales et dégradées, le laboratoire d'Automatique Génie Informatique et Signal (LAGIS UMR8219) situé à Polytech-Lille utilise un démonstrateur composé d'un véhicule maître et deux véhicules suiveurs dont on peut voir l'architecture sur la figure 1.

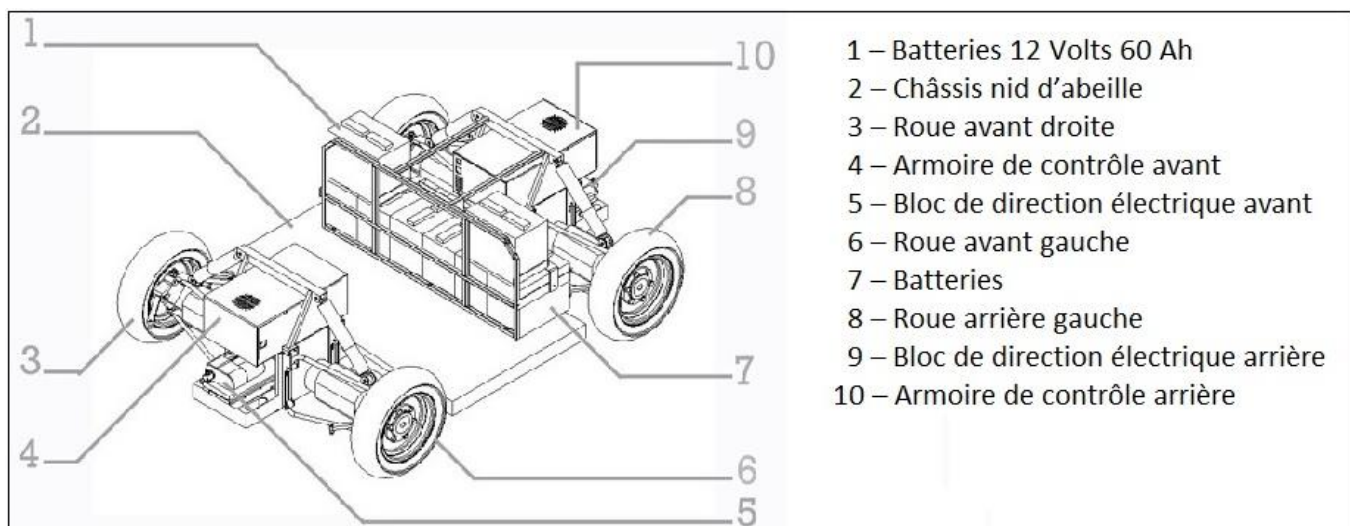
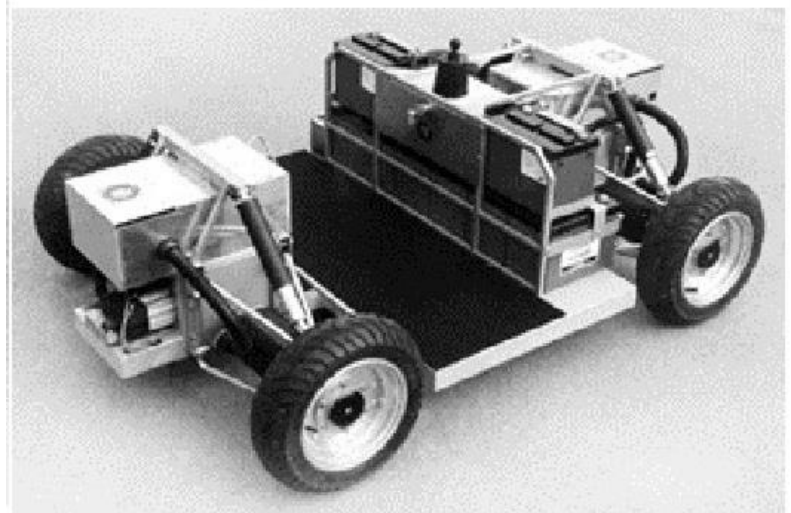


Figure 1 : Ensemble Châssis – Train roulant du véhicule RobuCar

1.2. Description de la morphologie du système

Le véhicule suiveur intelligent est un châssis à quatre roues motrices et directrices pilotables séparément (figure 1). Il y a donc deux paramètres de commande pour chaque roue (orientation (direction), vitesse de rotation (motricité))

Le schéma suivant présente un diagramme de définition des blocs pour une roue. Il permet de visualiser les deux chaînes d'énergie d'entraînement de la roue et d'orientation de la roue, ainsi que les éléments de la chaîne d'information tels que l'armoire de commande, les capteurs d'orientation et de vitesse de la roue.

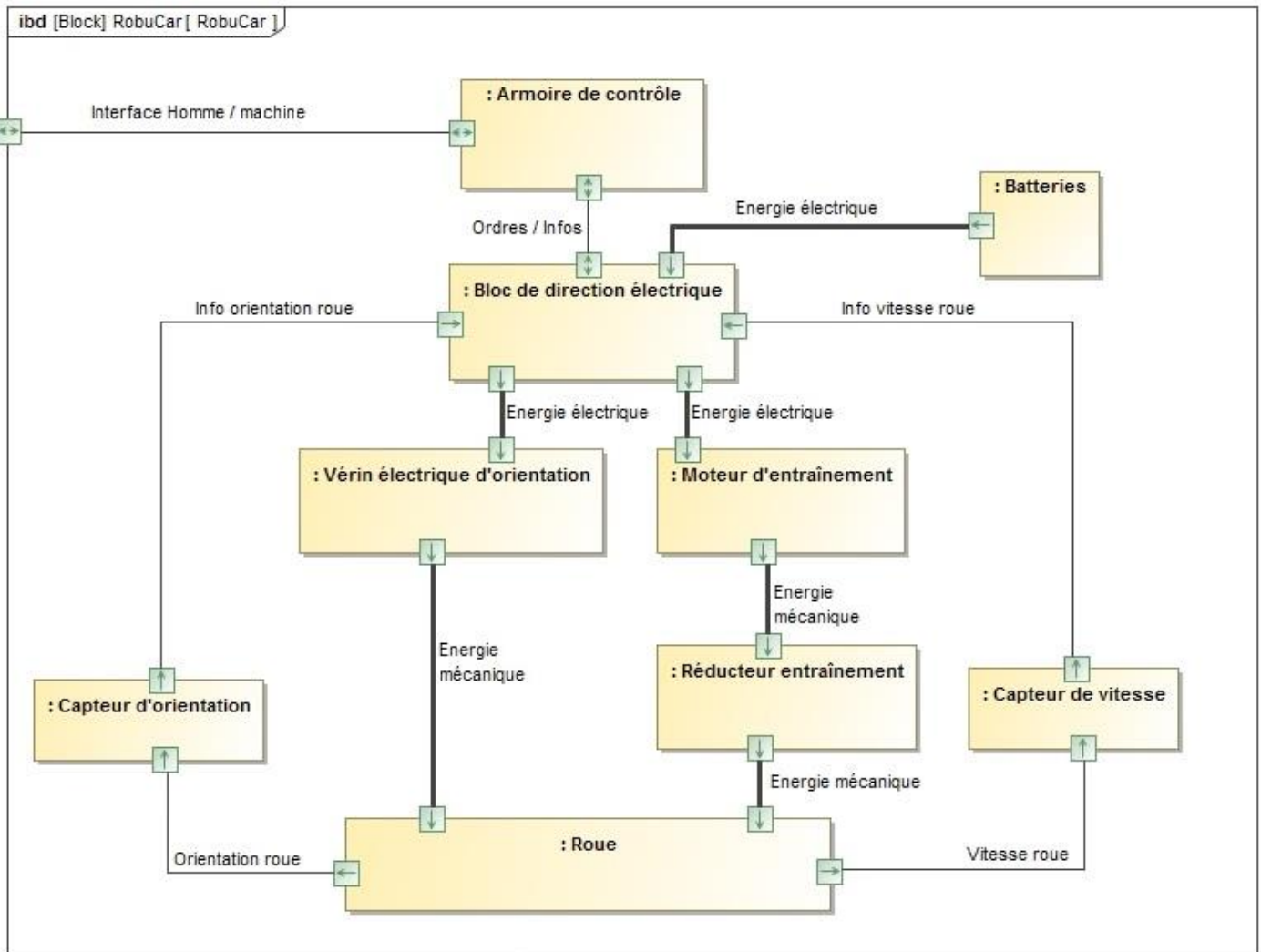


Figure 2 : Diagramme de définition des blocs pour une roue

1.3. Objectif de l'étude

L'objectif de l'étude proposée est d'obtenir un modèle analytique liant le comportement dynamique intrinsèque du véhicule suiveur aux paramètres de la chaîne de commande des différents actionneurs.

Le modèle obtenu doit ainsi permettre d'étudier les stratégies de commande adaptées aux différentes situations.

2. Etude des différentes trajectoires possibles

Hypothèses

- L'hypothèse maîtresse de l'étude consiste à considérer que les quatre roues du véhicule sont en contact ponctuel sur un sol parfaitement horizontal, et qu'il y a roulement sans glissement.
- On admet que l'adhérence roue/sol vérifie la loi du frottement sec de Coulomb. Le non-glissement est donc assuré dès lors que : $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ où $\|\vec{T}\|$ est le module de l'effort tangentiel sol/roue, $\|\vec{N}\|$ est le module de l'effort normal sol/roue, et f le coefficient de frottement de Coulomb du contact roue/sol considéré. Sur sol sec et avec des pneumatiques en bon état, on admet que $f \approx 1$.

Dans ces conditions, le déplacement du châssis est assimilable à un mouvement plan sur plan. Le respect d'une trajectoire revient à piloter les valeurs des paramètres de mouvement de chaque roue (orientation et vitesse de rotation), les valeurs de ces paramètres devant être cohérentes entre elles pour respecter le roulement sans glissement et sans dérapage de chacune des roues.

L'objectif de l'étude cinématique est d'écrire les relations liant les paramètres de mouvement dans les deux cas de figure les plus simples : la ligne droite et le virage.

Dans le cas de la translation, tous les points du châssis ont la même vitesse par rapport au repère fixe.

Les caractéristiques du groupe moto-propulseur sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Moteur	Vitesse de rotation maximale	$N_m = 3200 \text{ tr/mn}$
	Couple nominal	2,7 Nm
	Puissance Maximale	900 W
Réducteur	Rapport de réduction	$N = 13$
Roue	Rayon	$R = 0,20 \text{ m}$

Tableau 1 : Caractéristiques du groupe moto-réducteur-roue

Un extrait du cahier des charges est fourni ci-dessous :

exigences	critères	niveaux
Ex1 : Entraîner et freiner le véhicule sur sol sec.	Vitesse à atteindre	15 km/h
	Décélération sans glissement des roues	-6 m.s ⁻²
Ex2 : Orienter le véhicule via un rayon de virage standard de 6,4 m	Temps pour un virage de 45°	Inférieur à 3 s

Tableau 2 : Extrait du cahier des charges

Q1. A l'aide des données fournies dans le tableau 1, et en tenant compte des hypothèses de l'étude, calculer la vitesse maximale 'Vmax' en ligne droite du véhicule. Vérifier la performance attendue par le cahier des charges.

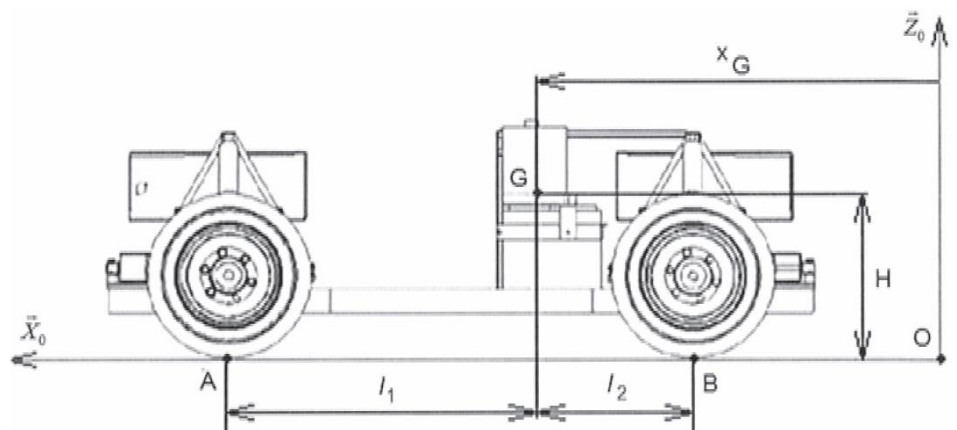
2.1. Etude des phases transitoires accélération / freinage en ligne droite.

Dans ces phases transitoires, l'altitude du centre de gravité du véhicule par rapport au sol influe sur l'équilibre dynamique de celui-ci, et notamment sur la répartition avant/arrière de la charge normale/verticale supportée par les roues. La motricité des roues dépend directement de celle-ci. On doit donc calculer la charge normale/verticale appliquée sur chaque roue afin d'en déduire la capacité de transmission d'effort tangentiel correspondant. On pourra ainsi optimiser la répartition de l'effort tangentiel de freinage ou d'accélération entre train avant et train arrière.

Le but de cette partie est d'établir un modèle permettant de valider le cahier des charges.

Pour cette étude, le problème étant symétrique, on adopte le modèle simplifié ramené au plan de symétrie conformément au schéma suivant :

Figure 3 : Modèle plan proposé



Hypothèses :

- On néglige l'influence de la rotation des roues sur le comportement dynamique du véhicule, de sorte que celles-ci peuvent être considérées comme appartenant au solide 'Véhicule'.
- Les roues restent en contact avec le sol et les suspensions sont suffisamment rigides pour que le phénomène de plongée soit négligé (Le châssis ne tangue pas vers l'avant).
- Le contact sol/roue est assimilable à un contact ponctuel sans glissement, c'est-à-dire capable de transmettre une composante tangentielle d'effort.
- On isole l'ensemble du véhicule considéré comme un solide unique (noté S).
- On applique le principe fondamental de la dynamique en G au problème plan constitué du Véhicule (solide (S)), en mouvement par rapport au sol (solide (0)) assimilable à un repère Galiléen :

$$\{T_{\text{actions méca extérieures à } S \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} M \ddot{x}_G(t) \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Notations :

- A : Point de contact sol/roue pour le train avant du modèle plan
- B : Point de contact sol/roue pour le train arrière du modèle plan
- G : Centre de gravité du véhicule

Constantes :

- M : Masse du véhicule
- g : valeur du champ de pesanteur
- H : Position verticale du centre de gravité par rapport à l'origine du repère

Variable :

- $x_G(t)$: Abscisse du centre de gravité par rapport à l'origine du repère

On se place en phase de **freinage** des 4 roues. Les composantes de la résultante des actions de contact du sol sur les roues sont notées T_A , N_A , en A pour les roues avants, T_B et N_B en B pour les roues arrières, où T définit la composante tangentielle au sol et N la composante normale. Le moment de chaque action de contact, au point de contact, est négligé (absence de résistance au roulement traduisant la déformation locale du pneu).

Le torseur des actions de contact sol roues-avant, exprimé au point de contact A, et pour le modèle plan adopté est donc :

$$\{T(\text{sol} \rightarrow \text{roues avant})\}_A = \{\vec{F}_A | \vec{0}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} T_A \\ - \\ N_A \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ - \end{array} \right\}_{A/B_0} \quad \text{avec } B_0 = (\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0).$$

Q2. Représenter sur la figure du document réponse l'ensemble des actions mécaniques extérieures agissant sur le véhicule.

Q3. Ecrire l'équation de résultante dynamique en projection sur \vec{X}_0 .

Q4. Ecrire l'équation de résultante dynamique en projection sur \vec{Z}_0 .

Q5. Ecrire l'équation du moment dynamique en A en projection sur \vec{Y}_0 . Vous devez au préalable déplacer le torseur dynamique du point G au point A.

Q6. En déduire l'expression des modules des actions verticales sol/roue en B (roues arrière) et en A (roues avant) en fonction de la valeur de la décélération $\ddot{x}_G(t)$ et des autres paramètres.

Q7. Déduire des lois de Coulomb l'effort maximum tangential transmissible sol/roue en B et A en fonction de la valeur f du coefficient de frottement et des autres paramètres.

Q8. En déduire l'expression et la valeur de la décélération $\ddot{x}_G(t)$ maximale envisageable en fonction de la valeur f du coefficient de frottement et des autres paramètres. Vérifier la performance attendue par le cahier des charges.

Application numérique : $M = 310 \text{ kg}$ $l_1 = 0,75 \text{ m}$ $l_2 = 0,55 \text{ m}$ $H = 0,4 \text{ m}$ $f = 1$

Petite partie informatique :

Dans la pratique, le coefficient de frottement n'est pas constant mais varie de façon complexe en fonction de plusieurs paramètres. On adopte un modèle simplifié basé sur la valeur de la vitesse du véhicule par la loi :

$$f = 0,8 + 0,2.e^{-\frac{v}{VREF}} \text{ avec } VREF = 5 \text{ m/s}$$

Le document réponse propose un programme en langage Python. L'objectif est de calculer la durée et la distance de la phase de freinage.

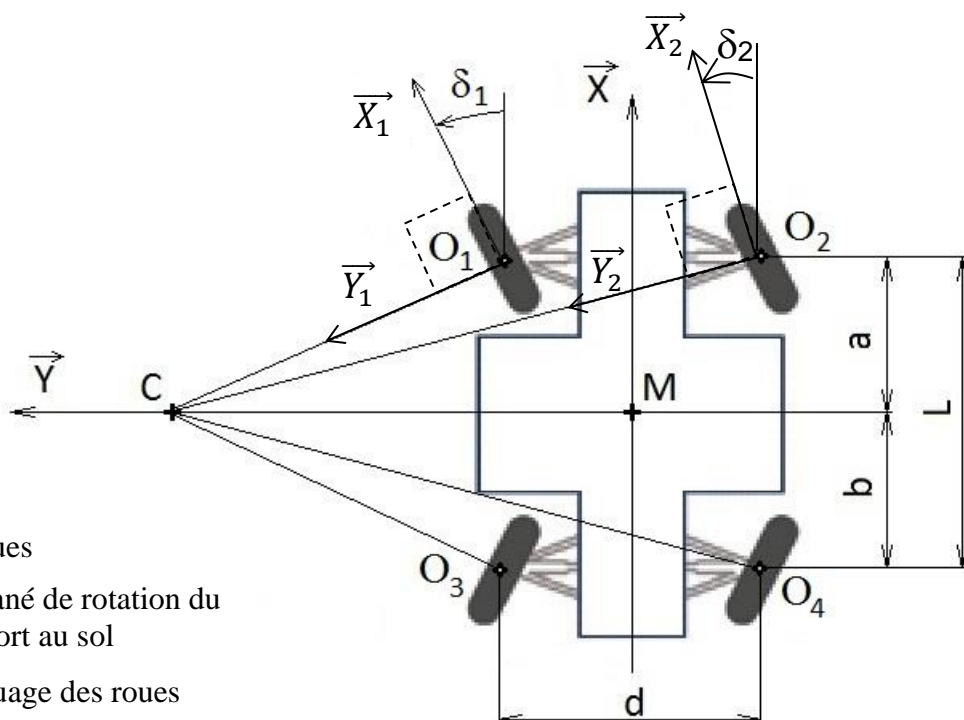
Q9. Compléter sur le document réponse les zones manquantes du programme fourni. Ceci doit conduire au bon fonctionnement sans l'introduction de nouvelle variable.

- Compléter la condition de la boucle while : zone A
- Compléter la zone d'intégration en temps : zone B
- Compléter la zone d'affectation des résultats : zone C

2.2. Etude du suivi de trajectoire / Modélisation du virage

On considère que les virages sont effectués en pilotant de façon conjuguée les orientations des trains avant et arrière conformément au modèle de la figure 4. De cette façon à la valeur près des paramètres a et b , le pilotage du train arrière (roues 3 et 4) est une image du pilotage du train avant (roues 1 et 2).

L'objectif de cette partie est de définir les lois de pilotage d'entraînement des roues afin de suivre une trajectoire définie. On se limite à un mouvement de rotation.



O_i : centre des roues

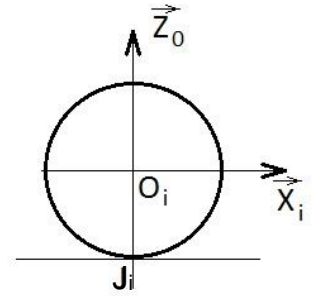
C : centre instantané de rotation du véhicule par rapport au sol

δ_i : angle de braquage des roues

Figure 4 : Véhicule en virage vue du dessus

Hypothèses et paramétrage:

- Le pilotage conjugué des directions avant et arrière conduit à l'identification d'un point M de l'axe longitudinal du châssis défini par rapport à C, centre de la trajectoire circulaire à l'instant t par : $\overrightarrow{CM} \perp \vec{X}$ avec $\overrightarrow{CM} = -\rho \vec{Y}$.
- On définit les bases suivantes : $(\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ liée au sol (solide 0), $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$ liée au châssis du véhicule (solide S), $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_0)$ liée à l'axe de la roue i.
- Le point O_i : point du plan médian de la roue i appartenant à l'axe de rotation (cf figures 4 et celle ci-contre).
- Le mouvement du véhicule est un mouvement de rotation autour du point C supposé fixe à l'instant t .
- On note la vitesse angulaire d'orientation du châssis par rapport au repère fixe lié au sol, due à la trajectoire circulaire autour de C est : $\vec{\Omega}_{(S/0)} = \dot{\psi} \vec{Z}_0$.
- On note V la vitesse du point M : $\vec{V}_{(M \in S/0)} = V \cdot \vec{X} = \rho \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{X}$ avec V constant
- Soit : $\vec{\Omega}_{(Roue_i/axe\ roue\ i)} = \dot{\theta}_i \vec{Y}_i$: vitesse de rotation de la roue i par rapport à l'axe de la roue i avec R : la valeur du rayon des roues.



Q10. Donner l'expression vectorielle dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$ de \vec{V} ($O_1 \in S/0$) et \vec{V} ($O_2 \in S/0$) en fonction de ρ, a, d et $\dot{\psi}$.

Q11. Donner l'expression vectorielle dans la base $(\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_0)$ de \vec{V} ($O_1 \in Roue_1/0$) et \vec{V} ($O_2 \in Roue_2/0$) en fonction de R et $\dot{\theta}_i$ en faisant l'hypothèse de roulement sans glissement en J_i .

Q12. En remarquant que \vec{V} ($O_1 \in Roue_1/S$) = $\vec{0}$, établir deux relations scalaires après projection dans la base $(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$.

Q13. Faire de même pour la roue 2.

Q14. En déduire les expressions de $\tan(\delta_1)$ et de $\tan(\delta_2)$ en fonction de ρ, a et d . Effectuer l'application numérique. $a = 0,65\text{ m}$; $d = 1,2\text{ m}$; $\rho = 5\text{ m}$

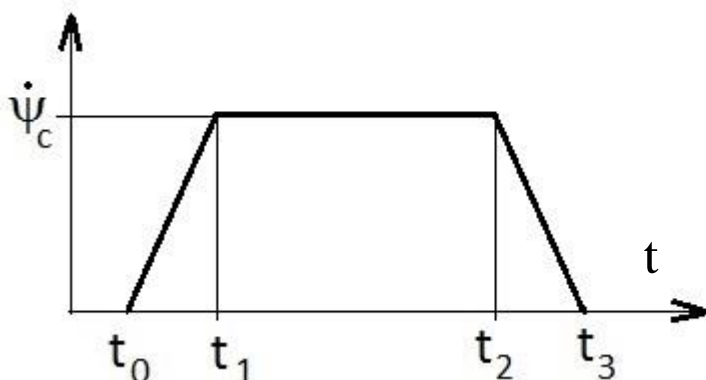
Q15. Etant donné les valeurs de δ_1 et δ_2 , on adopte la simplification suivante : $\cos \delta_i \approx 1$ et $\sin \delta_i \approx 0$. En déduire les expressions simplifiées de $\dot{\theta}_1$ et de $\dot{\theta}_2$.

2.3. Etude des vitesses de rotation des roues 1 et 2 au cours d'un virage

L'objectif de cette partie est d'établir les lois de commande et de valider le cahier des charges du point de vue du temps de virage pour obtenir un changement de direction de 45° .

On souhaite conserver V (module de la vitesse du point M centre du châssis) constant au cours de la phase de virage.

Le scénario retenu pour piloter un virage imposé par le suivi de trajectoire est décomposé en cinq phases :



- $t < t_0$: translation rectiligne
- $t_0 < t < t_1$: mouvement transitoire
- $t_1 < t < t_2$: mouvement de rotation autour de C
- $t_2 < t < t_3$: mouvement transitoire
- $t_3 < t$: translation rectiligne

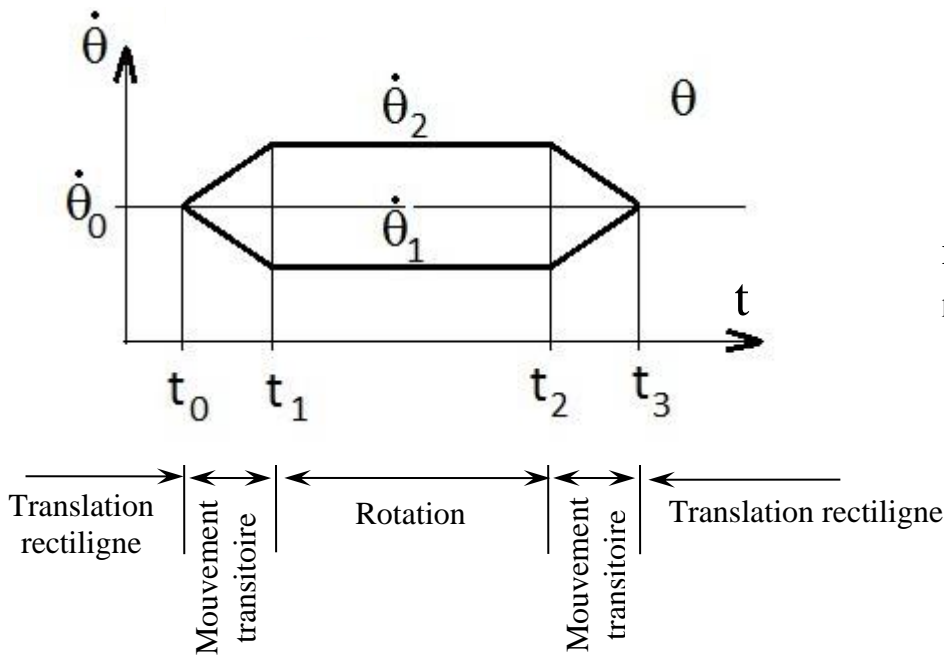


Figure 5 : Scénario retenu pour effectuer un virage

Ce scénario est nécessaire car on ne peut pas passer brutalement de la ligne droite à un virage de rayon donné. En effet, cela imposerait un changement instantané des vitesses de rotation des roues, ce qui est physiquement impossible.

- On définit $\vec{V} (M \in S/0) = V \cdot \vec{X}$ avec le vecteur \vec{X} lié au véhicule donc mobile par rapport au sol.
- $\dot{\psi}_C$ représente la valeur de consigne et est directement calculée par $\dot{\psi}_C = \frac{V}{\rho}$, avec ρ le rayon de virage imposée par le parcours à l'instant t et V la vitesse du point M au même instant t .
- On peut aisément montrer que : $\dot{\psi} = \frac{(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)}{d} R$, $\rho \dot{\psi} = V = \frac{(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1)}{2} R$
- On donne : $|\ddot{\psi}_{Max}| = \ddot{\psi}_0 = 1 \text{ rd} \cdot \text{s}^{-2}$, valeur constante pendant les deux phases transitoires.
- On admet donc que $(t_3 - t_2) = (t_1 - t_0) = \frac{\dot{\psi}_C}{\ddot{\psi}_0}$

Q16. Pour chaque phase $[t_i; t_{i+1}]$, on se propose de donner l'expression permettant de calculer la valeur instantanée de $\rho(t)$, $\dot{\psi}(t)$, $\psi(t)$ sous forme d'un tableau. Déterminer les expressions de A, B, C et D qui apparaissent dans le tableau suivant :

		$[t_0; t_1]$	$[t_1; t_2]$	$[t_2; t_3]$	
$\rho(t)$	∞	$\frac{V}{\dot{\psi}(t)} = \frac{V}{\ddot{\psi}_0(t-t_0)}$	$\rho = cste = \frac{V}{\dot{\psi}_C}$	$\frac{V}{\dot{\psi}(t)} = \frac{V}{\dot{\psi}_C - \ddot{\psi}_0(t-t_2)}$	∞
$\ddot{\psi}(t)$	0	$\ddot{\psi}_0 = 1 \text{ rd} / \text{s}^2$	0	$-\ddot{\psi}_0 = -1 \text{ rd} / \text{s}^2$	0
$\dot{\psi}(t)$	0	$\dot{\psi}(t) = \ddot{\psi}_0(t-t_0)$	A	C	0
$\psi(t)$	0	$\psi(t) = \ddot{\psi}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2}$	B	D	0

Tableau 3 : expressions des grandeurs géométriques et cinématiques pour le scénario envisagé

Q17. En déduire l'expression littérale du changement d'orientation total effectué noté ψ_{TOT} en fonction de $\ddot{\psi}_0$, $\dot{\psi}_C$, $(t_2 - t_1)$

Q18. Calculer $(t_2 - t_1)$ pour un virage à gauche de rayon $\rho = 6,4$ m effectué à $V = 10$ km/h provoquant un changement d'orientation de 45° .

Q19. En déduire le temps total $(t_3 - t_0)$ nécessaire pour effectuer ce changement de direction.

Q20. Dans ces conditions et pour $t_0 = 0$, calculer t_1 , t_2 , t_3 , $\psi(t_1)$, $\psi(t_2)$ et vérifier que la valeur de la durée du virage de 45° valide bien le cahier des charges.

3. Modélisation et Commande du véhicule

3.1. Modélisation du comportement de l'ensemble moto-réducteur-roue

La trajectoire et la vitesse du véhicule autonome est assurée par la commande de 4 roues indépendantes pilotées chacune par un moteur électrique. Le schéma de principe de chaque système de commande et le schéma-bloc représentés par les figures 6 (a) et (b), sont constitués d'un moteur électrique à courant continu, d'un réducteur de vitesse et de la roue. La partie électrique est pilotée par une source de tension $u(t)$ alimentant le stator représenté par la mise en série d'une résistance électrique (R_e) et d'une inductance (L). Le courant induit $i(t)$, fournit un couple moteur $c_m(t)$ ($c_m(t) = K_{em}i(t)$) à l'arbre du moteur soumis à des frottements visqueux f_m et ayant une inertie J_m . Le couple moteur est transmis avec un rapport $1/N$ à l'arbre de la roue de raideur K et soumis à des frottements visqueux f_r et ayant une inertie J_r . La roue est soumise à un couple résistant $c_p(t)$ du contact pneu-chaussée dû à la force longitudinale F_p . Le tableau 4 définit la nomenclature des variables utilisées.

L'objectif est d'obtenir les équations du comportement dynamique dans la direction longitudinale pour la synthèse du système asservi de la vitesse angulaire. La figure 6 représente le schéma de principe de la commande du véhicule.

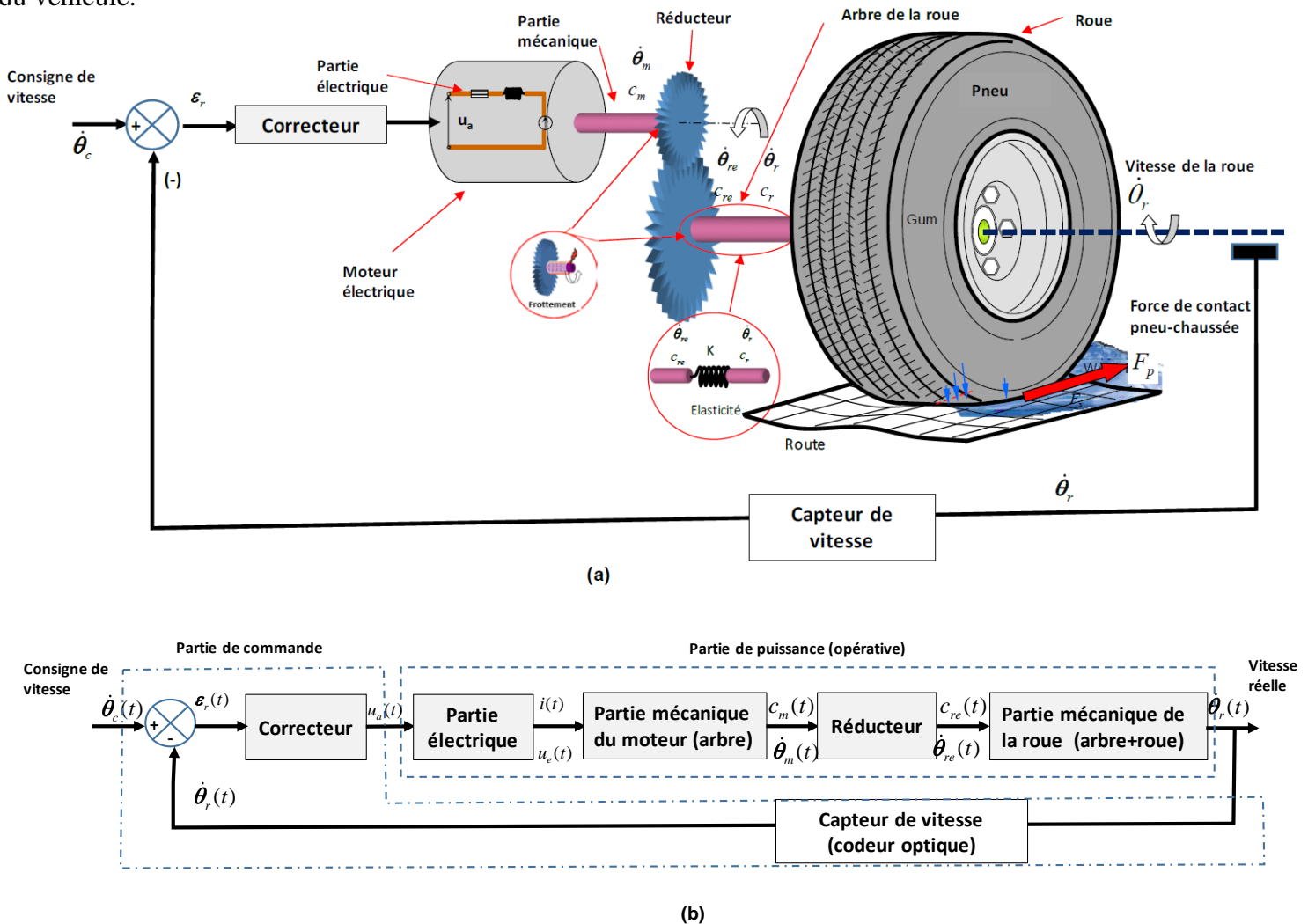


Figure 6 : Schéma de principe (a) et bloc diagramme (b) du système moto-réducteur-roue

Hypothèses de modélisation

La propulsion est assurée par les couples fournis par les 4 moteurs de roues. La direction est contrôlée à partir d'une différenciation de vitesse sur les trains arrière $\dot{\theta}_3$ et $\dot{\theta}_4$, et avant $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$. Les vitesses de rotation des roues $\dot{\theta}_i (i = 1 - 4)$ sont mesurées par un codeur incrémental fixé sur l'arbre du moteur. Le courant du moteur $i(t)$ est également mesuré. La variable de commande est la tension d'alimentation du moteur $u_a(t)$ de valeur maximale 48 V.

Paramètre	Désignation	Valeur
Partie électrique du moteur et contrôleur		
$\dot{\theta}_c(t), \dot{\theta}_r(t)$	Vitesse angulaire de consigne introduite par l'opérateur et réelle de la roue (fournie par le capteur)	Variable (rad.s ⁻¹)
$\varepsilon_r(t) = \dot{\theta}_c(t) - \dot{\theta}_r(t)$	Ecart de réglage (différence entre vitesse réelle et de consigne)	Variable (rad.s ⁻¹)
$u_a(t)$	Tension d'alimentation contrôlée	48 (volts) maximale
L	Inductance	0.075 (H)
R_e	Résistance électrique	1.6 (Ω)
K_{em}	Constante f.e.m.	0.122 (N.m/A)
$i(t)$	Courant électrique	Variable (A)
$u_e(t)$	Force électromotrice du bobinage	Variable (V)
Partie mécanique du moteur		
$c_m(t)$	Couple en sortie du moteur électrique	Variable (N.m)
J_m	Moment d'inertie arbre du moteur	0.0095 (kg.m ²)
f_m	Coefficient de frottement visqueux arbre moteur / carter moteur	0.0043 (N.m.s/rad)
$\dot{\theta}_m(t)$	Vitesse angulaire de l'arbre moteur	Variable (rad.s ⁻¹)
$\theta_m(t)$	Position angulaire de l'arbre moteur	Variable (rad)
Partie roue et réducteur		
N	Rapport de réduction	13
K	Raideur de l'arbre sortie réducteur	10000 N.m/rad
J_r	Moment d'inertie roue+axe	8 (kg.m ²)
f_r	Coefficient de frottement visqueux axe de roue / palier	17 (N.m.s/rad)
$c_{re}(t)$	Couple en sortie du réducteur	Variable (N.m)
$\dot{\theta}_{re}(t)$	Vitesse angulaire en sortie du réducteur	Variable (rad.s ⁻¹)
$c_p(t)$	Couple du contact pneu-chaussée due à la force longitudinale	0.5 (N.m)
$\dot{\theta}_r(t)$	Vitesse angulaire de la roue	Variable (rad.s ⁻¹)

$\theta_r(t)$	Position angulaire de la roue	Variable (rad)
G	Centre de gravité	
$\psi(t)$	Angle de lacet	rad
d	Distance entre roues (fig.4)	1.3 m
a = b	Distance entre le point M et les trains avant et arrière (fig.4)	0.65

Tableau 4 : Nomenclature des variables utilisées

3.2. Modélisation des différents éléments

• Modélisation de la partie électrique du moteur

On suppose que dans les différents régimes de fonctionnement considérés, le comportement reste linéaire. Le bobinage du moteur est équivalent à un circuit électrique de résistance R_e , d'inductance L en série et d'une force contre-électromotrice $u_e(t)$ en Volt, le tout alimenté par la tension $u_a(t)$. La partie électrique de l'induit est traversée par un courant $i(t)$. Les équations de couplage couple moteur-intensité et force contre électromotrice-vitesse angulaire sont décrites par les relations : $c_m(t) = K_{em} \cdot i(t)$ et $u_e(t) = K_{em} \cdot \dot{\theta}_m(t)$ respectivement.

Dans ce qui suit, les variables temporelles seront notées en minuscules, et les variables dans le domaine de Laplace seront en majuscules, par exemple : $L\{\dot{\theta}(t)\} = \Omega(p)$, $L\{u_e(t)\} = U_e(p)$, $L\{u_a(t)\} = U_a(p)$, $L\{c_m(t)\} = C_m(p)$, p étant l'opérateur de Laplace

L'équation électromécanique du moteur en régime dynamique dans les domaines temporel et de Laplace liant $u_a(t)$, $u_e(t)$ et $i(t)$ s'écrit :

$$u_a(t) = R_e i(t) + L \frac{di}{dt} + u_e(t)$$

• Modélisation de la partie mécanique

On isole l'arbre moteur avec le réducteur. Les actions mécaniques extérieures qui agissent sur cet ensemble sont : le couple moteur $c_m(t)$, le couple de l'axe de la roue sur l'arbre de sortie du réducteur $c_{re}(t)$ et les frottements visqueux du palier sur l'arbre moteur. L'équation différentielle qui régit l'évolution de la variable $\dot{\theta}_m(t)$ s'écrit :

$$J_m \ddot{\theta}_m(t) = C_m(t) - \frac{C_{re}(t)}{N} - f_m \dot{\theta}_m(t)$$

On isole la roue et son axe. Les actions mécaniques extérieures qui agissent sur cet ensemble sont : le couple de la chaussée sur la roue $c_p(t)$, le couple de l'axe de sortie du réducteur sur l'axe de la roue $c_{re}(t)$ et les frottements visqueux du palier sur la roue. L'équation différentielle qui régit l'évolution de la variable $\dot{\theta}_r(t)$ s'écrit :

$$J_r \ddot{\theta}_r = -C_p + C_{re} - f_r \dot{\theta}_r$$

On isole l'arbre de sortie du réducteur effectuant le lien avec l'axe de la roue. Cet élément déformable est supposé de comportement linéaire et de loi de déformation $C = K \cdot \Delta\theta$. $\Delta\theta$ étant l'écart angulaire entre les sections externes. Cet arbre transmet le couple $c_{re}(t)$. On a donc

$$C_{re} = K(\theta_{re} - \theta_r).$$

Q21. En combinant les 3 équations précédentes, identifier les paramètres α , β et γ dans les deux équations suivantes :

$$j_m \ddot{\theta}_m(t) = C_m(t) - \alpha \dot{\theta}_m(t) - \beta \left(\frac{\theta_m(t)}{N} - \theta_r(t) \right) \frac{1}{N}$$

$$J_r \ddot{\theta}_r(t) = -C_p(t) - \gamma \dot{\theta}_r(t) + \beta \left(\frac{\theta_m(t)}{N} - \theta_r(t) \right)$$

3.3.modélisation complète du système de commande de la vitesse angulaire

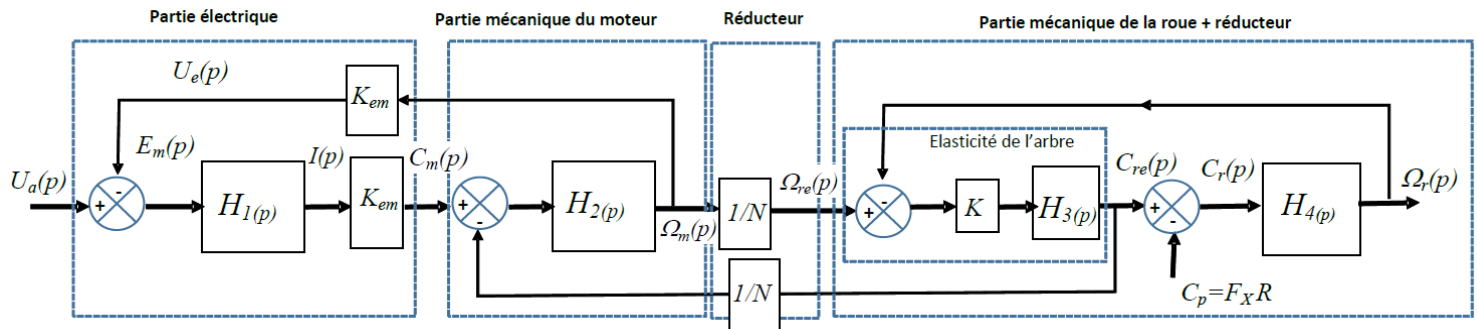


Figure 7 : Schéma bloc de simulation du système moto-réducteur-roue pour la commande de la vitesse

Q22. Le schéma de simulation du système de commande de la vitesse est donné figure 7. En vous basant sur les équations différentielles données page précédente et de la question 21, donner l'expressions des 4 fonctions de transfert : $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$ et $H_4(p)$ en fonction entre autres de α et γ .

Problème N°2 : Robot Lola (extrait Mines mp 2015)

I. Présentation

Le développement de robots à forme humaine est en croissance constante depuis quelques dizaines d'années. En robotique, il est difficile d'affirmer que tous les robots remplaçant l'homme dans ses tâches doivent être de forme humaine. Les véhicules autonomes, par exemple, ne sont pas anthropomorphes. Les tâches auxquelles sont destinées les robots définissent leur forme idéale. Si nous souhaitons un jour que les robots remplacent l'homme dans ses tâches ennuyeuses, ils devront s'intégrer au mieux à notre société, à notre environnement et à notre ergonomie.

Le robot humanoïde LOLA (figure 1), développé par l'Université de Munich, est un robot de forme humaine conçu pour un mode de marche rapide. LOLA possède une structure à 25 degrés de liberté lui permettant une flexibilité accrue. Chaque jambe possède 7 degrés de liberté, le haut du corps 8 et la tête 3.

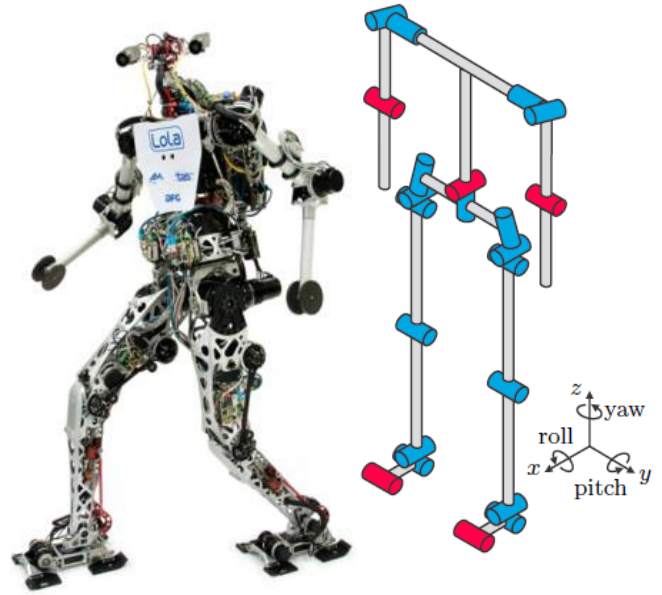


Figure 1 : le robot humanoïde LOLA et sa structure cinématique

Le robot est équipé d'une caméra stéréoscopique haute définition afin de percevoir son environnement, d'une centrale inertielle équipée de 3 gyroscopes et de 3 accéléromètres. Chaque articulation possède un codeur angulaire absolu et chaque pied est muni d'un capteur d'effort 6 axes permettant d'obtenir l'effort de contact avec le sol.

Les caractéristiques techniques de LOLA sont données dans le tableau suivant :

Caractéristiques	Valeurs
Hauteur	180 cm
Masse	55 kg
Nombre de degrés de liberté	25
Vitesse de marche	5 km.h ⁻¹ maxi
Hauteur du centre de gravité	105 cm

Tableau 1 : caractéristiques principales du robot

L'objectif de l'étude proposée est de justifier en partie le respect du cahier des charges. Elle se décomposera en 2 parties : l'étude de la stabilité du robot bipède et la mesure de l'effort de contact avec le sol

II. Stabilité du robot

Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, LOLA est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenue dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour de ses deux pieds sur la figure 2. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche et si l'accélération est compatible avec le cahier des charges, dont un extrait est donné ci-après.



Figure 2 : polygone de sustentation sur deux pieds

Exigence 1.3 : Le robot ne doit pas basculer lors de la marche

Description : La position du ZMP* reste dans le polygone de sustentation

* : défini dans la suite

Exigence 1.1 : Le robot doit pouvoir atteindre les performances cibles

Sous-exigence	Description
Id=1.1.4	La longueur d'une foulée est de 150 cm au maximum
Id=1.1.3	Le robot peut accélérer jusqu'à $1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Tableau 2 : extrait du diagramme d'exigences

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement sur la figure 3.

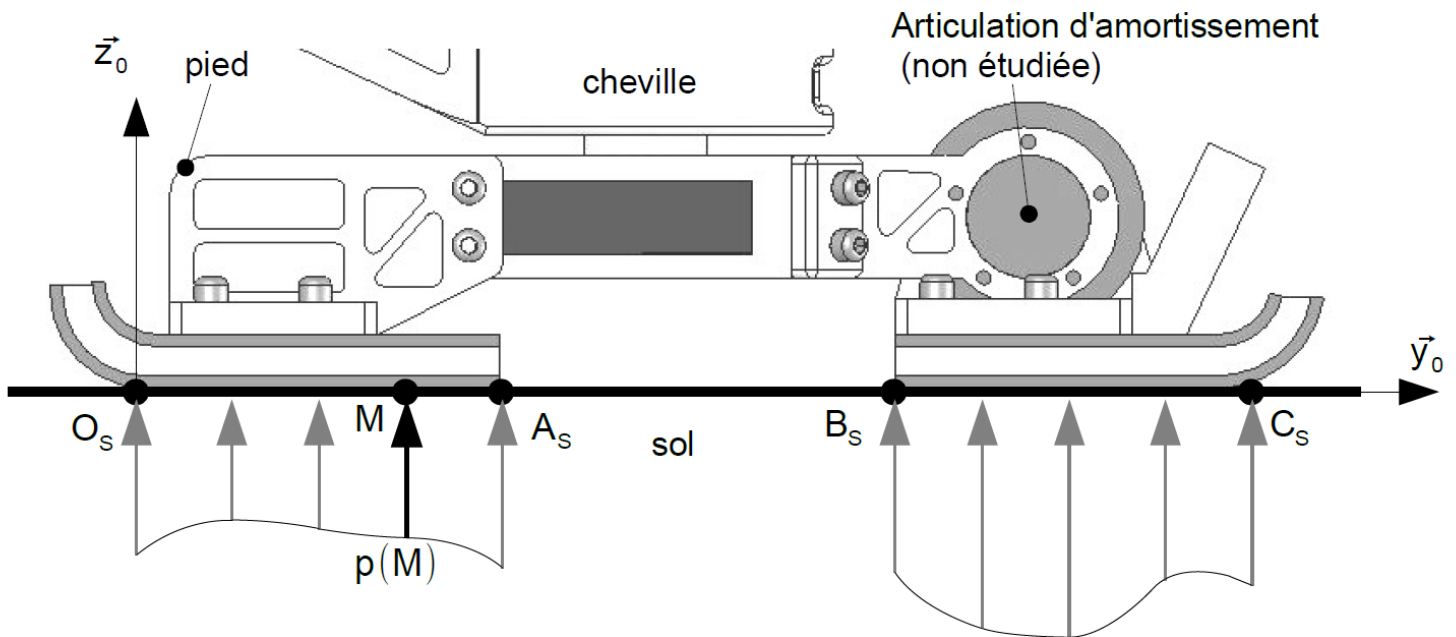


Figure 3 : modélisation du contact entre le pied et le sol

II.1. Modélisation de l'effort de contact entre le sol et le robot.

Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0). Le problème se ramène donc à une répartition linéique de pression sur les deux segments de contact $[O_S; A_S]$ et $[B_S; C_S]$. En chaque point M (d'ordonnée y) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M) \vec{z}_0$, avec $p(M)$ en N.m^{-2} . On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$. Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_S, A_S] \cup [B_S, C_S]$, le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur exprimé en O_S :

$$\{T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}} = b \int_{(M \in \Sigma)} p(M) \vec{z}_0 dy \\ \vec{M}(O_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied}) = b \int_{(M \in \Sigma)} \vec{O_S M} \wedge p(M) \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}$$

Q1. Montrer que $\{T_{\text{sol} \rightarrow \text{pied}}\}$ est un glisseur (on pourra s'intéresser à l'automoment de ce torseur).

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\vec{M}_{(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied})} = \vec{0}$, on notera $\vec{O_S H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$. Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Q2. Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot.

Q3. Donner la forme du torseur $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M) \vec{z}_0 + t(M) \vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions 1 et 2 sont inchangés.

II.2. Établissement de la condition de non-bascullement.

Considérons le robot en marche avec le torse ayant un mouvement de translation vers l'avant (suivant $+\vec{y}_0$). Le robot est toujours dans la phase d'appui d'un seul pied sur le sol, via une des deux jambes notées (2).

Données et paramètres :

Torse (1) :

- masse m_1 , accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g \vec{z}_0$ avec $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$;
- centre de gravité : G, tel que $\overline{O_s G} = Y_G(t) \vec{y}_0 + Z_G(t) \vec{z}_0$;
- le torse est supposé en mouvement de translation rectiligne, de direction \vec{y}_0 par rapport au sol, on a le torseur cinématique suivant :

$$\{V_{1/sol}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{dY_G}{dt} \vec{y}_0 \end{array} \right\}_G$$

Jambes avec les pieds (2) :

Masses et inerties négligeables dans cette phase.

N.B. : le pied d'appui est sans mouvement par rapport au sol.

L'action mécanique du sol sur la semelle du pied est modélisée par le glisseur $\{T_{sol \rightarrow pied}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{sol \rightarrow pied} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{H_S}$:

où :

- H_S est le ZMP, point mis en évidence à la question 2 tel que $\overline{O_s H_S} = Y_{H_S} \vec{y}_0$
- $\vec{R}_{sol \rightarrow pied} = N_{sol \rightarrow pied} \vec{z}_0 + T_{sol \rightarrow pied} \vec{y}_0$, avec à la limite du glissement $|T_{sol \rightarrow pied}| = \mu |N_{sol \rightarrow pied}|$ où μ est le facteur de frottement du contact sol / semelle.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à l'ensemble $E=1 \cup 2$ dans le cas de ce mouvement de translation donne l'équation torsorielle suivante :

$$\{T_{actions\ méca\ extérieures\ à\ E \rightarrow E}\} = \left\{ \begin{array}{c} m_1 \ddot{Y}_G(t) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

Q4. En projetant les trois équations issues du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble $E=1 \cup 2$, retrouver la condition de non bascullement dite de stabilité : $Y_{H_S}(t) = Y_G(t) - \frac{Z_G}{g} \ddot{Y}_G(t)$

Conformément au résultat de la question 2, le calculateur du robot contrôle en permanence la position du point H_S (ZMP) : s'il est positionné à l'intérieur du segment $[O_S ; C_S]$, le robot ne bascule pas. On appelle foulée, la longueur entre deux emplacements successifs d'appui du même pied. Lors du premier pas, le centre de gravité se déplace de sorte que $Y_G \in [-\text{foulée}/4 ; +\text{foulée}/4]$, car pour une accélération constante, les deux pas qui constituent une foulée sont de même longueur.

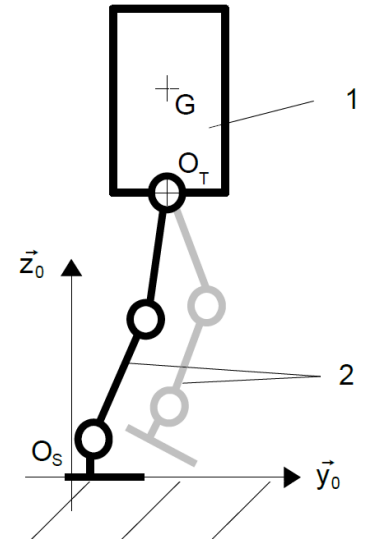


Figure 4 : modélisation du robot en marche

Le cahier des charges stipule qu'à partir de la station immobile, le robot doit atteindre la vitesse cible de

5 km.h^{-1} en une seconde, avec une accélération constante du centre de gravité $\ddot{Y}_G = 1.39 \text{ m.s}^{-2}$. On rappelle que $Z_G = 105 \text{ cm}$.

Q5. Sachant que la longueur de la semelle du robot $[O_S ; C_S]$ est $L = 300 \text{ mm}$, déterminer la longueur de la première foulée du robot qui garantit la condition de non-basculement. Est-ce compatible avec le cahier des charges ?

Q6. Dans le cas d'un sol relativement glissant, avec un facteur de frottement du contact sol /semelle $\mu = 0,1$, quelle accélération maximale $\ddot{Y}_{G_{\max}}$ le robot peut-il avoir ? Est-ce compatible avec le cahier des charges pour la phase de démarrage ?

III. Déterminer la position du Zero Moment Point

Pour déterminer en temps réel la position du ZMP de LOLA, le robot a été équipé d'un module de mesure d'effort 6 axes positionné entre la cheville et le pied (figure 5). Le corps d'épreuve est une structure constituée de 3 capteurs d'efforts indépendants. Le modèle mécanique associé à ce module est une association en parallèle de trois liaisons sphère-cylindre à 120° entre la cheville (C) et le pied (P) de LOLA (figure 5). Les capteurs (piézo électriques) mesurent les efforts dans la liaison en A_0 , A_1 et A_2 . Nous noterons : $\overrightarrow{O_P A_0} = r \overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{O_P A_1} = r \overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{O_P A_2} = r \overrightarrow{y_2}$.

Les bases de vecteurs notée $B_i (\overrightarrow{x}_i, \overrightarrow{y}_i, \overrightarrow{z}_i)$ avec $i = \{0,1,2\}$ sont définies orthonormées et directes.

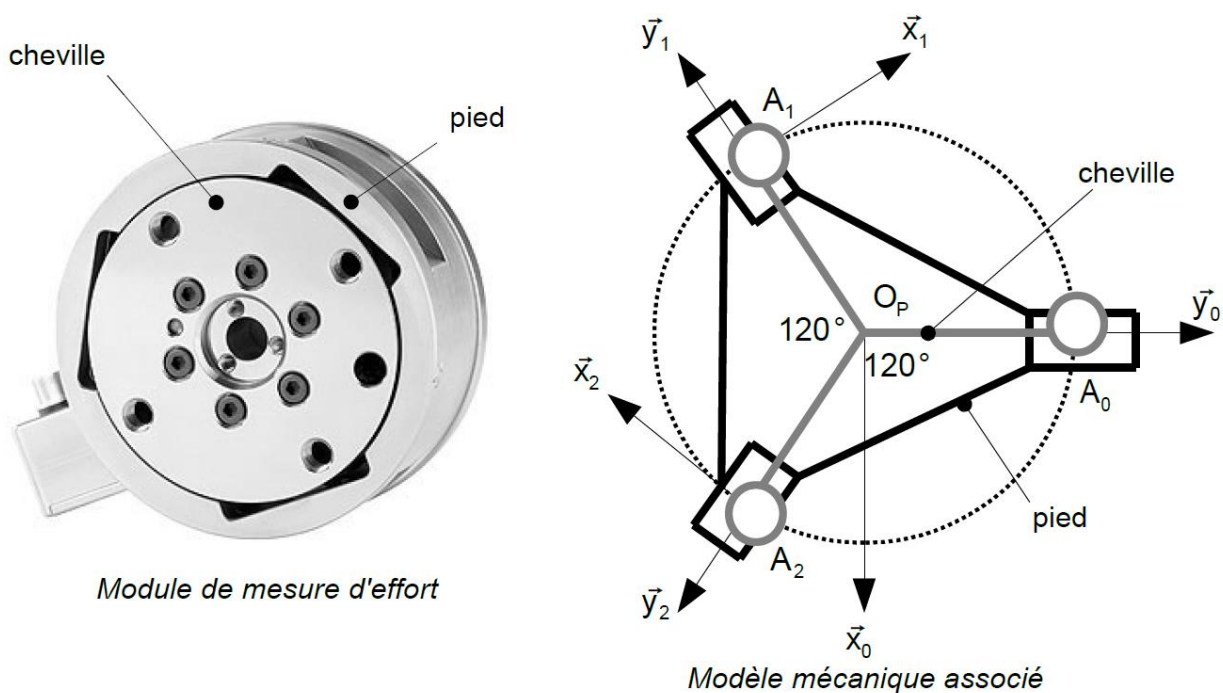


Figure 5 : module d'effort

Pour assurer la stabilité du robot, la commande doit s'assurer de respecter les exigences suivantes :

Exigence 1.3 : le robot ne doit pas basculer lors de la marche	
Sous-exigence	Description
Id=1.3.1	Lors de la marche le ZMP est déterminé en temps réel
Id=1.3.1.d	Le robot doit mesurer les 6 composantes d'effort sous chaque pied

Tableau 3 : extrait du diagramme des exigences

L'objectif de cette partie est de montrer que l'utilisation de ce module de mesure permet de déterminer l'effort de contact entre le sol et le pied ainsi que la position du "Zero Moment Point" ZMP .

Nous considérerons le pied à l'équilibre et de masse négligeable, ainsi l'action mécanique du sol (S) sur le pied (P) est égale à l'action mécanique du pied sur la cheville. Le tableau du document-réponse représente pour 3 actions mécaniques du sol sur le pied différentes, la forme des torseurs d'action mécanique transmissible dans les 3 liaisons sphère-cylindre en A_0 , A_1 et A_2 . L'action mécanique du sol (S) sur le pied (P) est modélisée par le torseur

$$\{T_{S \rightarrow P}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{SP} & L_{SP} \\ Y_{SP} & M_{SP} \\ Z_{SP} & N_{SP} \end{array} \right\}_{O_P, B_0}$$

Q7. Pour le cas n°1 du document-réponse, indiquer la forme des torseurs des efforts mesurés dans les 3 liaisons sphère-cylindre en suivant l'exemple des deux dernières colonnes. Indiquer les composantes non nulles ainsi que leurs signes par un + ou un -. Indiquer par un 0 les composantes nulles. Les torseurs seront exprimés dans les bases locales. Les composantes des torseurs seront indicées par A_0 , A_1 ou A_2 .

Le pied du robot est en contact sans mouvement relatif avec le sol selon la figure 6.

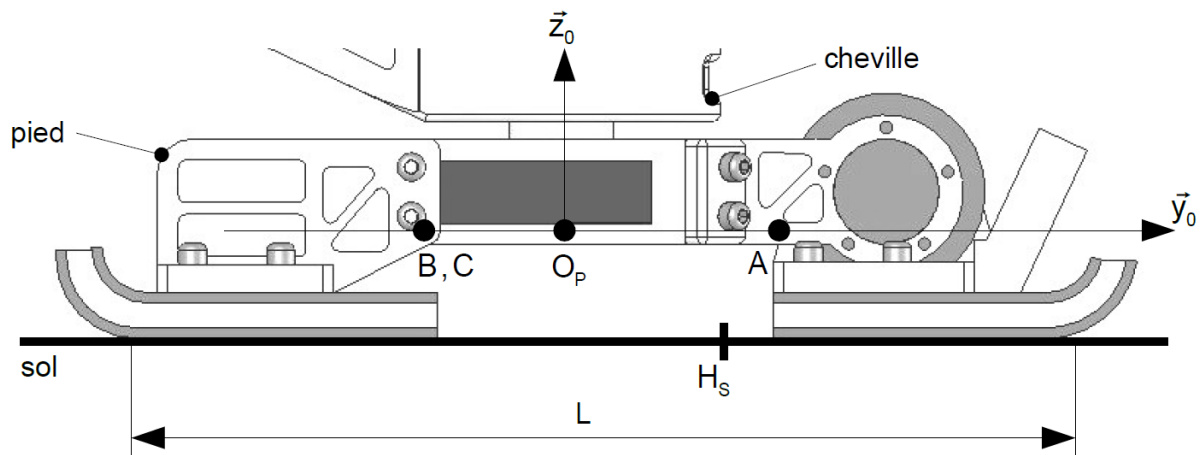


Figure 6 : contact sol/pied

La longueur L de la semelle du robot est de 300 mm. Le ZMP est repéré par le vecteur $\overrightarrow{O_p H_s} = Y_{ZMP} \vec{y}_0 - h \vec{z}_0$.

Le rayon r est de 40 mm et la hauteur h vaut 50 mm. L'action mécanique du sol (S) sur le pied (P) est modélisée par le torseur :

$$\{T_{S \rightarrow P}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_{SP} \\ Y_{SP} & 0 \\ Z_{SP} & 0 \end{array} \right\}_{O_P, B_0}$$

Une simulation a permis de déterminer l'action mécanique du sol sur le pied à la limite de l'équilibre. Le torseur obtenu est le suivant : $Y_{SP} = 300$ N, $Z_{SP} = 400$ N et $L_{SP} = 35$ N.m. Les actions mécaniques de la cheville (C) sur le pied (P), mesurées par les 3 capteurs du module de mesure d'effort, sont représentées par les 3 torseurs suivants :

$$\{T_{0_{C \rightarrow P}}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_0 & 0 \end{array} \right\}_{A_0, B_0}, \quad \{T_{1_{C \rightarrow P}}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_1 & 0 \end{array} \right\}_{A_1, B_1}, \quad \{T_{2_{C \rightarrow P}}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_2 & 0 \end{array} \right\}_{A_2, B_2}.$$

Nous cherchons à montrer qu'il est possible de localiser le ZMP à l'aide des mesures effectuées par le module de mesure d'effort.

Q8. Déterminer l'abscisse Y_{ZMP} du point H_S en fonction de L_{SP} , Y_{SP} , Z_{SP} et h . Vérifier que le critère de stabilité du robot sur ses deux pieds est assuré.

On cherche à relier l'effort du sol (S) sur le pied (P) en fonction des composantes mesurées dans le module de mesure d'efforts.

Q9. Déterminer à l'équilibre les expressions des composantes d'efforts mesurées dans les 3 capteurs X_0 , X_1 , X_2 , Z_0 , Z_1 et Z_2 en fonction de r , L_{SP} , Y_{SP} et Z_{SP} .

Le module de mesure d'effort sera supposé linéaire dans le domaine d'utilisation préconisé par le constructeur : $[-680 \text{ N}; +680 \text{ N}]$. Cela signifie que le comportement du module est linéaire tant que les composantes des actions mécaniques mesurées dans chacun des 3 capteurs restent dans cet intervalle.

Q10. Vérifier que le module de mesure d'effort permet de déterminer la position du "Zero Moment Point" ZMP en restant dans le domaine de linéarité préconisé par le constructeur.

La détermination de la position du ZMP par cette méthode permet d'assurer le contrôle de la commande en accélération du robot LOLA.

Problème N°3 : Analyse sanguine (extrait Centrale mp 2010)

L'évolution des connaissances associées à l'analyse sanguine a conduit à l'amélioration des diagnostics médicaux lors de l'apparition d'une pathologie inconnue, induisant une intensification du recours aux tests sanguins. Cette augmentation a incité certains laboratoires à créer des structures automatisées capables de réaliser l'ensemble des tests lors d'un seul processus d'analyse.

1. Présentation de la chaîne de test du laboratoire

La chaîne automatisée ADVIA WorkCell® installée dans le laboratoire du Docteur Philippe Mine, situé à THIAN (département du Nord) permet le travail simultané de trois postes de test sanguin permettant d'assurer la grande majorité des analyses demandées par les médecins, le tout sans aucune intervention humaine. Des postes spécifiques, gérés manuellement, complètent cette structure.

1.1. Structure générale du système ADVIA WorkCell®

La figure 1 décrit la structure générale du système ADVIA WorkCell®. Les échantillons sanguins à tester, identifiés par des codes-barres collés sur le tube, sont placés par les laborantins dans des zones identifiées du module automatisé de stockage et de gestion des tubes de sang.

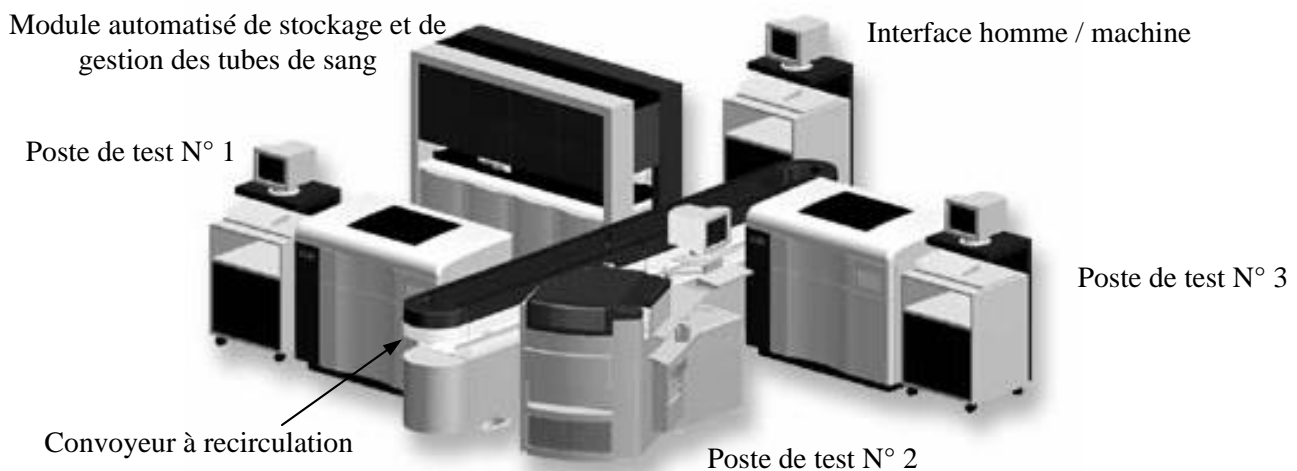


Figure 1 : Exemple d'organisation des postes autour du convoyeur [Document BAYER-SIEMENS DIAGNOSTICS]

Le début du test commence par l'extraction du tube de sang de ce module et son placement sur le convoyeur à recirculation (figure 2 à gauche). La fin du test correspond à la remise en place du tube dans son emplacement initial dans le module de stockage et de gestion des tubes de sang après que tous les tests aient été effectués (figure 2 à droite). Ces opérations sont réalisées par un bras motorisé muni d'une pince pneumatique. Entre ces deux étapes, le tube de sang est passé par les postes de test placés autour du convoyeur en fonction des tests demandés par les médecins.

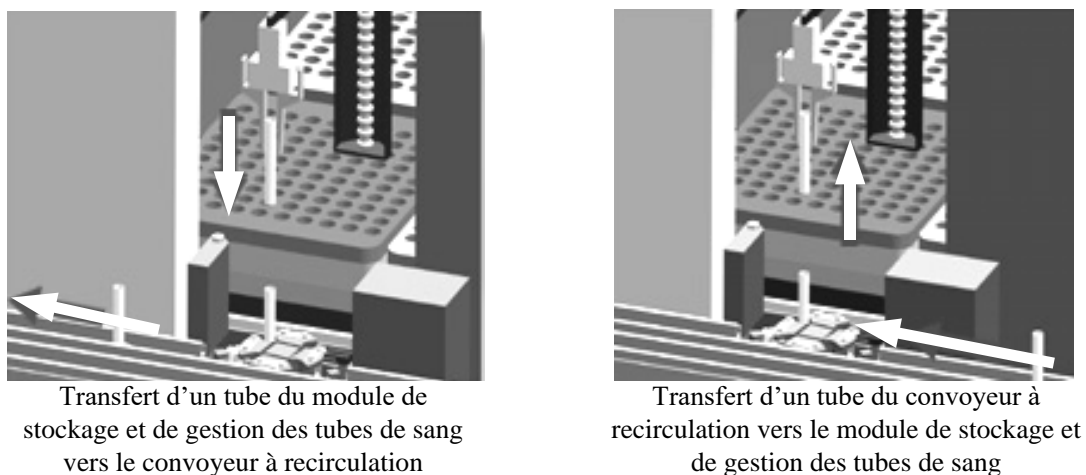


Figure 2 : Phases de déplacement du tube entre le module de stockage et de gestion et le convoyeur à recirculation

1.2. Avantages du système ADVIA® WORKCELL

L'architecture du système ADVIA WorkCell®, contrairement à certains systèmes concurrents, est très souple car :

- elle est modulaire (et peut même évoluer en une structure intégralement automatisée appelée LabCell),
- elle accepte des postes de tests de différents fournisseurs, ce qui assure l'indépendance du laboratoire vis-à-vis des acteurs économiques et industriels du marché de l'analyse sanguine
- et elle autorise la reconfiguration de la structure de la chaîne en moins d'une journée, programmation comprise, pour répondre à des sollicitations exceptionnelles.

1.3. Le module automatisé de stockage et de gestion des tubes de sang

1.3.1. Structure générale du module

Le module automatisé de stockage et de gestion des tubes (figure 3 à gauche) comporte huit plateaux pouvant accueillir jusqu'à cent tubes à tester (figure 3 à droite). Le personnel du laboratoire place les tubes à tester dans les trous du plateau au fur et à mesure de leur arrivée puis les récupère à la fin des tests. Le plateau peut être inséré dans le module qu'il soit plein ou incomplet. Il est possible d'intervenir à tout moment dans le module automatisé de stockage pour placer ou enlever un tube manuellement : cette opération n'interrompt pas le cycle mais le tube ainsi placé est alors traité en priorité.

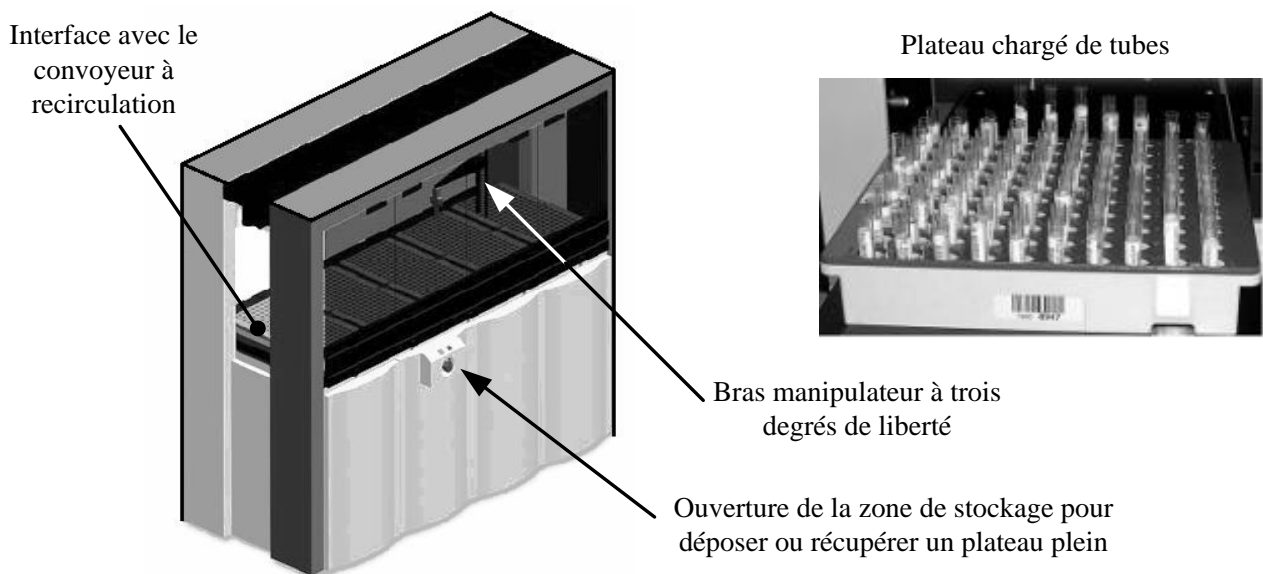


Figure 3 : Ensemble automatisé de stockage et de gestion des tubes et un plateau rempli de tubes
[Document BAYER-SIEMENS DIAGNOSTICS et photographie laboratoire]

1.3.2. Le bras à trois degrés de liberté

Un bras automatisé à trois degrés de liberté « T-R-T » (translation – rotation – translation) muni en extrémité d'une pince à commande pneumatique (air sous pression) est placé dans le module de stockage (voir figure 4). Il assure les déplacements des tubes de sang entre le plateau et le convoyeur à recirculation. La fiabilité du fonctionnement de cet élément mécanique est fondamentale pour les besoins du laboratoire :

- s'il ne fonctionne plus, la totalité de la chaîne automatisée est bloquée ;
- toute projection du sang lors des transferts des tubes conduit à un arrêt de la chaîne, l'annulation de tous les tests en cours, un nettoyage complet et la destruction de l'ensemble des échantillons présents sur la chaîne.

En conséquence :

- un bras de rechange doit toujours être disponible permettant un échange rapide (moins de 20 minutes)
- et la commande de ce système doit être performante et garantir la stérilité de la zone de stockage : **cette problématique constitue l'objet de l'étude proposée.**

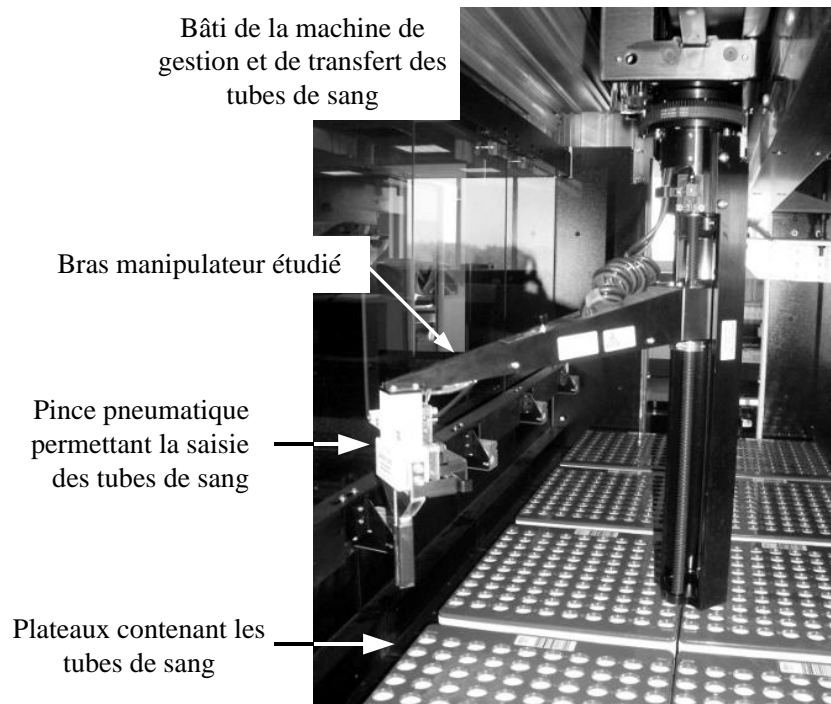


Figure 4 : Zone de stockage des tubes et bras manipulateur à trois degrés de liberté

2. Etude du bras automatisé à trois degrés de liberté « T-R-T » : Validation de l'exigence principale.

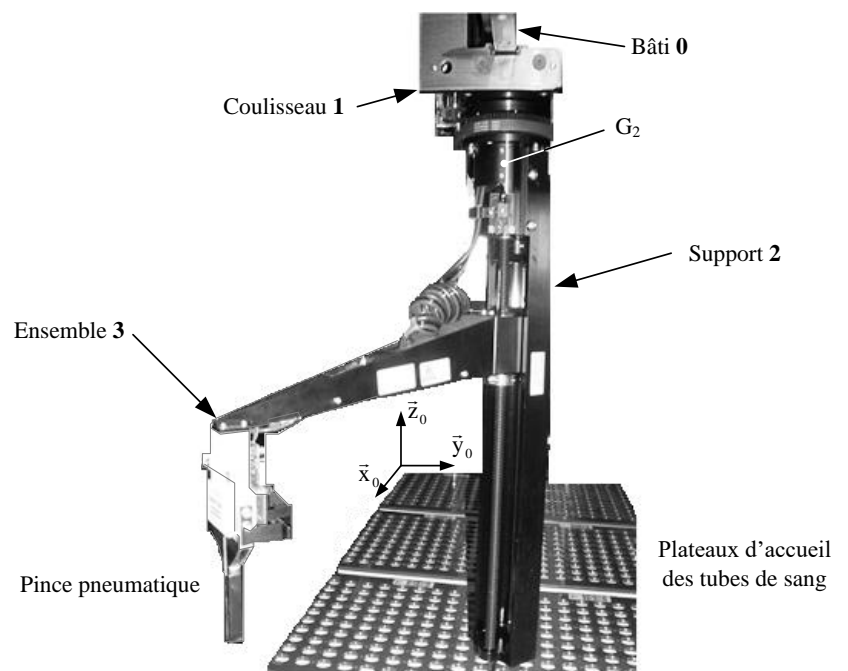
L'étude dynamique qui suit vise à valider l'exigence principale du bras automatisé : « Déplacer un tube de sang entre un plateau du poste de stockage et de gestion des échantillons de sang et le convoyeur en préservant la zone de test de toute projection de sang »

Objectif et démarche : Analyser et justifier, vis-à-vis des critères de respect de l'hygiène de la zone de stockage, les performances de la commande d'axe du bras à trois degrés de liberté dédié au transfert des tubes de sang. Pour cela on procède à la caractérisation des effets dynamiques appliqués à l'échantillon pouvant conduire à des projections de sang. Ce qui permet ensuite la synthèse d'une loi de commande (non étudiée dans cet extrait de sujet).

Description et modélisation du bras motorisé :

Le bras implanté sur le système ADVIA WorkCell[®], dont une photographie est fournie figure 5, est motorisé selon trois « axes » asservis (appelés « Axe N° 1 », « Axe N° 2 » et « Axe N° 3 » dans la suite) assurant les mouvements de type translation / rotation / translation.

Figure 5 : Constitution du bras motorisé de manipulation des tubes



Le bras est constitué de trois solides indéformables : Coulisseau **1**, Support **2** et Ensemble bras + pince + tube **3**. Les mouvements autorisés entre ces solides sont associés aux trois axes du bras manipulateur et sont paramétrés de la façon suivante :

Mouvements	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Pièces considérées	(0) / (1)	(1) / (2)	(2) / (3)
Mouvements	Translation de direction \vec{x}_0	Rotation d'axe (G_2, \vec{z}_0)	Translation de direction \vec{z}_0
Paramètre	$x(t)$	$\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$	$z(t)$
Amplitude	$-1 \text{ m} \leq x \leq 1 \text{ m}$	$-\pi/2 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi/2 \text{ rad}$	$0 \text{ m} \leq z \leq 0,3 \text{ m}$

Les amplitudes sont définies depuis la position de référence du bras, dans laquelle il se place après la prise d'origine.

- Q1.** Justifier la structure mécanique adoptée pour le bras afin d'atteindre tous les tubes de la zone. Proposer une autre structure sous la forme d'un schéma cinématique permettant de répondre au même besoin.
- Q2.** À partir du tableau donné précédemment décrivant les mouvements, proposer une modélisation des liaisons entre les différentes pièces, en indiquant précisément leurs caractéristiques (axe, direction, normale, centre, etc.). Donner pour chaque liaison, la forme du torseur d'action mécanique et du torseur cinématique : les réponses seront précisées sur le document réponse.

Les trois solides ont les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques cinétiques	Coulisseau (1)	Support (2)	Bras + pince + tube (3)
Masse	m_1	m_2	m_3
Centre de gravité G_i	$\overrightarrow{OG_1} = x(t) \vec{x}_0$	$\overrightarrow{OG_2} = x(t) \vec{x}_0 - d_1 \vec{z}_0$	$\overrightarrow{OG_3} = x(t) \vec{x}_0 - (d_1 + z(t)) \vec{z}_0 + \left(\frac{\lambda}{2}\right) \vec{x}_3$
Moment d'inertie	sans objet	J_2 selon l'axe (G_2, \vec{z}_0)	Voir question 5

L'orientation de la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ par rapport à la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est définie par $\theta(t) = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

Pour chacun des trois axes motorisés, une action mécanique et un frottement visqueux équivalents de l'actionneur $[M_i]$ associé à l'axe N° i sont définies au niveau de la liaison correspondante :

Grandeurs équivalentes rapportées à l'axe	Axe N° 1	Axe N° 2	Axe N° 3
Action mécanique de l'actionneur $[M_i]$ sur l'axe	$F_{M1}(t)$ (en N)	$C_{M2}(t)$ (en N.m)	$F_{M3}(t)$ (en N)
Coefficient de frottement visqueux	b_1 (en N.s.m ⁻¹)	f_2 (en N.m.s.rad ⁻¹)	b_3 (en N.s.m ⁻¹)

On rappelle que le frottement visqueux produit une action mécanique (résultante (N) ou moment (Nm)) résistante proportionnelle à la vitesse (respectivement vitesse (m/s) ou vitesse angulaire (rad/s))

Le « graphe des liaisons et des efforts » (encore appelé « graphe d'analyse ») du modèle mécanique du bras est proposé figure 7 :

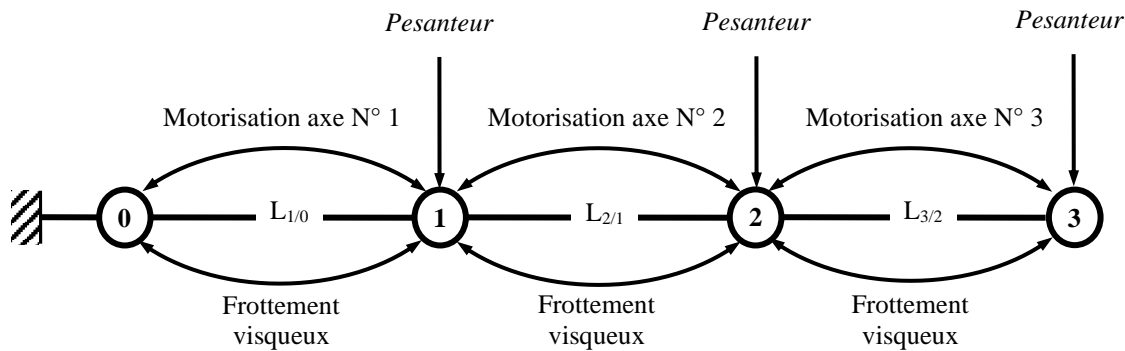


Figure 7 : Graphe des liaisons et des efforts de la modélisation mécanique du bras à trois degrés de liberté

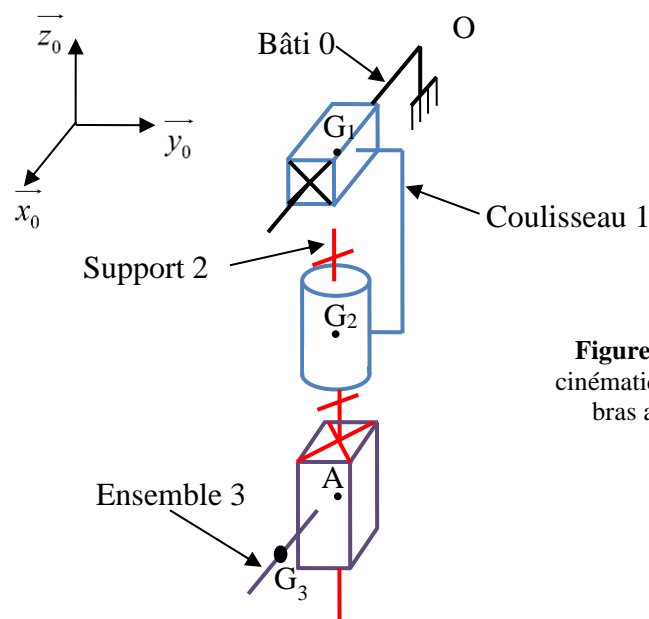


Figure 8 : Schéma cinématique spatial du bras automatisé

Q3. Expliciter la stratégie d'isollements et de calculs à mettre en œuvre pour déterminer les expressions des actions mécaniques F_{M1} , C_{M2} et F_{M3} (générées par les actionneurs $[M_i]$ associés aux trois) : on indiquera, sur le tableau du document réponse l'ensemble isolé, le théorème à utiliser (avec éventuellement le point de calcul) et la direction de projection en justifiant clairement le choix de la méthode adoptée.

À partir de la stratégie d'isollements établie, on obtient les deux équations différentielles suivantes pour les expressions des efforts F_{M1} et F_{M3} :

○ Équation (E1)
$$F_{M1}(t) = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) - m_3 \left(\frac{\lambda}{2}\right) (\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}(t)^2 \cos \theta(t))$$

○ Équation (E3)
$$F_{M3}(t) = m_3 \ddot{z}(t) + b_3 \dot{z}(t) + m_3 g$$

Afin d'établir l'équation permettant de déterminer C_{M2} , il est nécessaire d'étudier la cinétique de l'ensemble (3).

On modélise l'ensemble (3) comme composé (voir figure 9) :

- d'une tige (dimensions radiales négligeables) représentant le bras, de longueur λ , de masse m et de centre de gravité confondu avec G_3 tel que $\overrightarrow{AG_3} = \frac{\lambda}{2} \overrightarrow{x_3}$ avec A situé sur l'axe $(G_2, \overrightarrow{z_0})$.
- d'une masse ponctuelle (dimensions radiales négligeables) représentant l'ensemble pince plus tube de sang, de masse m_p , placée à l'extrémité de la tige en C_3 . On a $m_3 = m_p + m$.

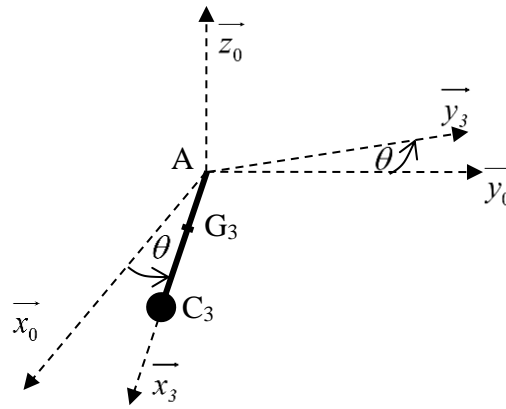


Figure 9 : Modèle de l'ensemble 3

Q4. Donner la matrice d'inertie de l'ensemble 3 au point G_3 dans la base $(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ à partir du modèle proposé figure 9. Aidez-vous de l'annexe ci-dessous donnant la matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle en son centre de gravité G .

Pour la suite on notera J_3 le moment d'inertie de l'ensemble 3 autour de l'axe (G_3, \vec{z}_0)

Q5. Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures à l'ensemble (3+2) en exprimant les torseurs associés.

Q6. Etablir l'équation différentielle reliant le couple C_{M2} , l'angle $\theta(t)$, le déplacement $x(t)$ et leurs dérivées successives en appliquant le théorème du moment dynamique en G_2 à l'ensemble (2)+(3) en projection suivant \vec{z}_0 (utiliser le formulaire de dynamique en annexe si nécessaire).

Q7. Montrer que l'équation obtenue peut s'écrire sous la forme $C_{M2}(t) = A \ddot{\theta}(t) + B \dot{\theta}(t) + C \ddot{x}(t)$ où :

$$A = \left[J_3 + J_2 + m_3 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \right]; B = f_2; C = -m_3 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \sin \theta$$

Les évolutions dynamiques associées au bras motorisé lorsque les trois actionneurs sont commandés simultanément sont donc décrites par les trois équations différentielles obtenues précédemment.

Q8. À partir des équations précédentes, justifier que les mouvements de deux des axes sont couplés.

Nota : le couplage des mouvements peut créer des accélérations transitoires importantes pouvant induire un risque de débordement du sang du tube saisi par la pince en extrémité du bras à trois degrés de liberté.

Annexe Formulaire de dynamique

Matrice d'inertie

$$I_O(S) = \begin{bmatrix} I_{O,\bar{x}} & -P_{Oxy} & -P_{Oxz} \\ -P_{Oxy} & I_{O,\bar{y}} & -P_{Oyz} \\ -P_{Oxz} & -P_{Oyz} & I_{O,\bar{z}} \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_R$$

$$I_{O,\bar{x}} = \int_S (y^2 + z^2) \cdot dm : \text{moment d'inertie } I(O, \bar{x})$$

$$P_{Oxy} = \int_S x \cdot y \cdot dm : \text{produit d'inertie } I \text{ plan } (O, \bar{x}, \bar{y})$$

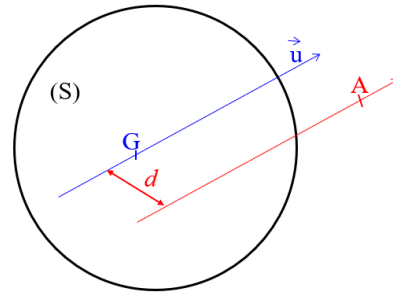
Matrice d'inertie en G d'un parallélépipède de masse m , de côtés a , b et c :

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Théorème de Huygens

Pour un moment d'inertie :

$$I_{A,\vec{u}}(S) = I_{G,\vec{u}}(S) + m.d^2$$



Pour une matrice d'inertie :

$$I_P(S) = I_G(S) + m \cdot \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -x.y & -x.z \\ -x.y & x^2 + z^2 & -y.z \\ -x.z & -y.z & x^2 + y^2 \end{bmatrix}_R$$

$$\text{avec } \overrightarrow{PG} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Torseur cinétique

ou torseur des quantités de mouvement d'un système matériel E par rapport à R

$$C(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} m.\overline{V(G,S/R)} \\ \overline{\sigma(A,S/R)} = m.\overline{AG} \wedge \overline{V(A,S/R)} + I_A(S).\overline{\Omega(S/R)} \end{array} \right\}$$

Cas particuliers :

$$\text{Si } A = G, \text{ alors : } \overline{\sigma(G \in S/R)} = I_G(S).\overline{\Omega(S/R)}$$

$$\text{Si } A \text{ fixe dans } R, \text{ alors : } \overline{\sigma(A \in S/R)} = I_A(S).\overline{\Omega(S/R)}$$

Torseur dynamique

ou torseur des quantités d'accélération d'un système matériel E par rapport à R

$$D(S/R) = \left\{ \begin{array}{l} m.\overline{\Gamma(G,S/R)} \\ \overline{\delta(A,S/R)} = \left[\frac{d\overline{\sigma(A,S/R)}}{dt} \right]_R + m.\overline{V(A/R)} \wedge \overline{V(G/R)} \end{array} \right\}$$

$$\text{Cas particuliers : Si } A = G, \text{ alors : } \overline{\delta(G \in S/R)} = \left[\frac{d\overline{\sigma(G,S/R)}}{dt} \right]_R$$

$$\text{Si } A \text{ fixe dans } R, \text{ alors : } \overline{\delta(A,S/R)} = \left[\frac{d\overline{\sigma(A,S/R)}}{dt} \right]_R$$

$$\text{Si } S \text{ est en translation /R, alors : } \overline{\delta(G \in S/R)} = \vec{0}$$