

Problème N°1 :

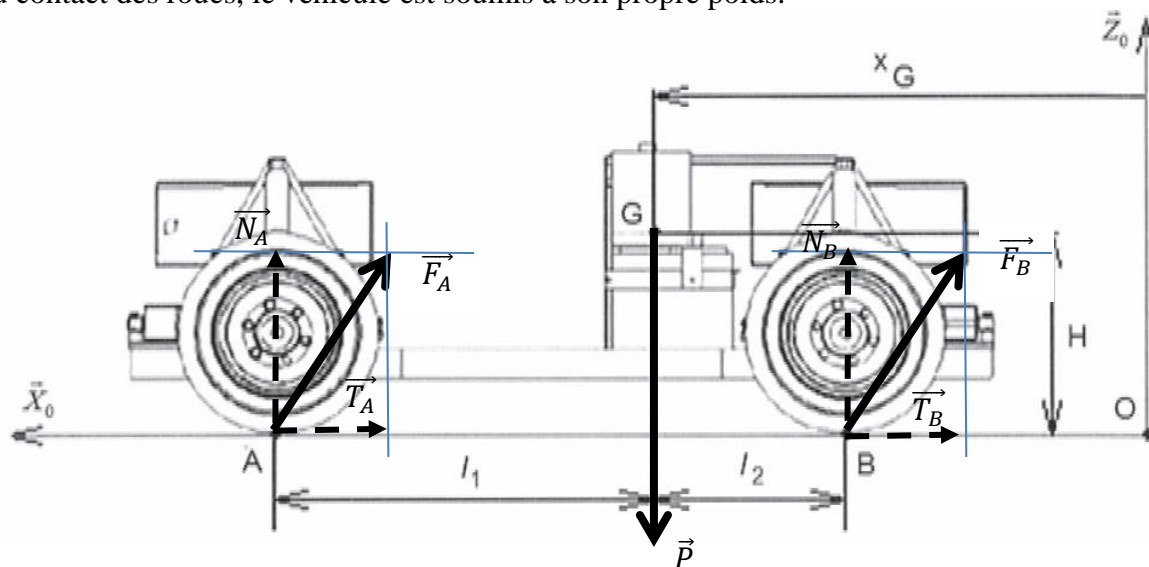
- Q1.** Etant donné l'hypothèse de roulement sans glissement : $V_{max} = R \times \omega_{rmax} = R \times \frac{N_{max}}{N} \times \frac{2\pi}{60}$

Application numérique :

$$V_{max} = 5,16 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 18,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

La vitesse à atteindre étant de $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, la performance attendue est bien vérifiée

- Q2.** La voiture est en phase de freinage, les composantes tangentielles des actions mécaniques du sol sur les roues s'opposent donc à la vitesse de glissement potentielle du véhicule par rapport au sol. Outre les actions au niveau du contact des roues, le véhicule est soumis à son propre poids.



- Q3.** Le principe fondamental de la dynamique nous donne au niveau de la résultante :

$$M \cdot \overline{\Gamma(G/R)} = \overline{F_A} + \overline{F_B} + \overline{P}$$

En projection sur $\overline{x_0}$:

$$M\ddot{x}_G = T_A + T_B$$

- Q4.** En projection sur $\overline{z_0}$:

$$0 = N_A + N_B - Mg$$

- Q5.** $\overline{\delta_A(S/R)} = \overline{\delta_G(S/R)} + \overline{AG} \wedge M \cdot \overline{\Gamma(G/R)} = \vec{0} + (-l_1 \cdot \overline{x_0} + H \cdot \overline{z_0}) \wedge M\ddot{x}_G \cdot \overline{x_0} = HM\ddot{x}_G \cdot \overline{y_0}$

En appliquant le théorème du moment dynamique à la voiture en A, on obtient :

$$\begin{aligned} \overline{\delta_A(S/R)} &= \overline{\mathcal{M}_A \overline{P}} + \overline{\mathcal{M}_A \overline{F_B}} + \overline{\mathcal{M}_A \overline{F_A}} \\ &= \overline{AG} \wedge \overline{P} + \overline{AB} \wedge \overline{F_B} + \vec{0} \\ &= (-l_1 \cdot \overline{x_0} + H \cdot \overline{z_0}) \wedge (-Mg \cdot \overline{z_0}) + (-l_1 \cdot \overline{x_0} + H \cdot \overline{z_0}) \wedge (N_B \cdot \overline{z_0} + T_B \cdot \overline{x_0}) \\ &= (-l_1 Mg + (l_1 + l_2) N_B) \cdot \overline{y_0} \end{aligned}$$

D'où :

$$HM\ddot{x}_G = -l_1 Mg + (l_1 + l_2) N_B$$

- Q6.** Et ainsi :

$$N_B = \frac{HM\ddot{x}_G + l_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

On en déduit :

$$N_A = Mg - N_B = \frac{l_2 Mg - HM\ddot{x}_G}{l_1 + l_2}$$

- Q7.** A la limite du glissement : $|T_A| = f|N_A|$ et $|T_B| = f|N_B|$

$\ddot{x}_G < 0$ étant donné qu'on est sur une phase de freinage et donc $T_A < 0$ et $T_B < 0$.

D'après les expressions trouvées à la question 7, $N_A > 0$. Afin de garder le contact au niveau de la roue B, N_B doit être positif aussi, ce qui nous donnerait une condition sur \ddot{x}_G :

$$\ddot{x}_G > -\frac{l_1 g}{H}$$

En considérant $N_B > 0$:

$$T_B = -f \cdot \frac{HM\ddot{x}_G + l_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

$$T_A = -f \cdot \frac{l_2 Mg - HM\ddot{x}_G}{l_1 + l_2}$$

Q8. Le résultat de la question 3 nous impose :

$$M\ddot{x}_G = T_A + T_B$$

Donc :

$$M\ddot{x}_{Gmax} = -f \cdot \frac{l_2 Mg - HM\ddot{x}_{Gmax}}{l_1 + l_2} - f \cdot \frac{HM\ddot{x}_{Gmax} + l_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

$$M\ddot{x}_{Gmax} = -\frac{fl_2 Mg}{l_1 + l_2} - \frac{fl_1 Mg}{l_1 + l_2}$$

$$\ddot{x}_{Gmax} = -fg$$

Cette valeur maximale est à comprendre comme étant la plus grande valeur d'accélération en valeur absolue.

Application numérique :

$$|\ddot{x}_{Gmax}| = fg = 1 \times 9,81 = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

D'après le cahier des charges, le véhicule doit pouvoir subir une décélération sans glissement de $6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce qui est vérifiée par la modélisation précédente.

Q9.

- a. y_2 correspond à la variable associée à la vitesse horizontale et y_1 à la position du véhicule. Il s'agit donc de déterminer l'évolution de ces 2 variables jusqu'à l'arrêt du véhicule.

while $y_2 > 0$:

- b. La résolution consiste à intégrer l'équation différentielle suivante à l'aide de la méthode d'Euler explicite.

$$\ddot{x}_G = -\left(0,8 + 0,2 \cdot e^{-\frac{V}{V_{REF}}}\right) \cdot g$$

On formule sous la forme d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dot{V} = -\left(a + b \cdot e^{-\frac{V}{V_{REF}}}\right) \cdot g \\ \dot{X} = V \end{cases}$$

L'écriture de la résolution par la méthode d'EULER nous donne :

$$\begin{cases} V_{k+1} = V_k + h * F_1(V_k, t_k) \\ X_{k+1} = X_k + h * F_2(X_k, t_k) \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} F_1(V_k, t_k) = -\left(a + b \cdot e^{-\frac{V_k}{V_{REF}}}\right) g \\ F_2(X_k, t_k) = V_k \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y1n &= y1 + h * y2 \\ y2n &= y2 + h * g * (-a - b * \exp(-y2/Vref)) \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} DA &= y1 \\ Vf &= y2 \\ tf &= t \end{aligned}$$

Q10.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(O_1 \in S/0)} &= \overrightarrow{V(C \in S/0)} + \overrightarrow{O_1 C} \wedge \overrightarrow{\Omega S/0} \\ &= \vec{0} + \left(-a \cdot \vec{x} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \cdot \vec{y}\right) \wedge \psi \cdot \vec{z}_0 \\ &= a\psi \cdot \vec{y} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \psi \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

De même :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in S/0)} = a\psi \cdot \vec{y} + \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \psi \cdot \vec{x}$$

Q11.

$$\overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} = \overrightarrow{V(J_1 \in Roue_1/0)} + \overrightarrow{O_1 J_1} \wedge \overrightarrow{\Omega Roue_1/0}$$

$$\overrightarrow{\Omega Roue_1/0} = \overrightarrow{\Omega Roue_1/S} + \overrightarrow{\Omega S/0}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} &= \vec{0} + (-R \cdot \vec{z}_0 \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{y}_1) \\ &= R\dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1\end{aligned}$$

De même :

$$\overrightarrow{V(O_2 \in Roue_2/0)} = R\dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_2$$

Q12.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/0)} &= \overrightarrow{V(O_1 \in Roue_1/S)} + \overrightarrow{V(O_1 \in S/0)} \\ R\dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_1 &= \vec{0} + a\psi \cdot \vec{y} + \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \psi \cdot \vec{x}\end{aligned}$$

En projetant suivant \vec{x} et \vec{y} :

$$\begin{aligned}R\dot{\theta}_1 \cos \delta_1 &= \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \psi \\ R\dot{\theta}_1 \sin \delta_1 &= a\psi\end{aligned}$$

Q13. De même qu'à la question 12 :

$$\begin{aligned}R\dot{\theta}_2 \cos \delta_2 &= \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \psi \\ R\dot{\theta}_2 \sin \delta_2 &= a\psi\end{aligned}$$

Q14. On en déduit :

$$\begin{aligned}\tan \delta_1 &= \frac{a}{\rho - \frac{d}{2}} \\ \tan \delta_2 &= \frac{a}{\rho + \frac{d}{2}}\end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}\tan \delta_1 = 0,148 &\Rightarrow \delta_1 = 8,4^\circ \\ \tan \delta_2 = 0,116 &\Rightarrow \delta_2 = 6,6^\circ\end{aligned}$$

Q15.

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \left(\rho + \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\psi}{R} \\ \theta_1 &= \left(\rho - \frac{d}{2}\right) \cdot \frac{\psi}{R}\end{aligned}$$

Q16.

$$A = \psi_c = \frac{V}{\rho}$$

$$B = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \dot{\psi}_c \cdot (t - t_1)$$

$$C = \dot{\psi}_c - \ddot{\psi}_0 \cdot (t - t_2)$$

On obtient D en intégrant C :

$$D = \dot{\psi}_c \cdot t - \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t - t_2)^2}{2} + Cte$$

Il faut calculer la constante :

$$D(t = t_2) = \dot{\psi}_c \cdot t_2 + Cte = B(t = t_2) = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1)$$

D'où :

$$Cte = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} - \dot{\psi}_c \cdot t_1$$

$$D = \dot{\psi}_c \cdot (t - t_1) + \ddot{\psi}_0 \cdot \left(\frac{(t_1 - t_0)^2}{2} - \frac{(t - t_2)^2}{2} \right)$$

Q17.

$$\begin{aligned} \psi_{TOT} &= D(t = t_3) = \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_1) \\ &= \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2 + t_2 - t_1) \\ &= \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_3 - t_2) \\ &= \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) + \frac{\dot{\psi}_c^2}{\ddot{\psi}_0} \end{aligned}$$

Q18.

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\dot{\psi}_c} \left(\psi_{TOT} - \frac{V^2}{\rho^2} \cdot \frac{1}{\dot{\psi}_0} \right) \quad \text{Application numérique : } t_2 - t_1 = 1,38 \text{ s}$$

Q19.

$$t_3 - t_0 = 2 \times (t_1 - t_0) + t_2 - t_1 = 2 \times \frac{V}{\rho} + t_2 - t_1$$

Application numérique : $t_3 - t_0 = 2,25 \text{ s}$

Q20.

$$t_1 = \frac{V}{\rho} \cdot \frac{1}{\dot{\psi}_0} \quad \text{Application numérique : } t_1 = 0,43 \text{ s}$$

$$t_2 = t_2 - t_1 + t_1 \quad \text{Application numérique : } t_2 = 1,82 \text{ s}$$

$$\text{D'après la question 20 : } t_3 = 2,25 \text{ s}$$

$$\psi(t_1) = \ddot{\psi}_0 \cdot \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} \quad \text{Application numérique : } \psi(t_1) = 0,094 \text{ rd} = 5,4^\circ$$

$$\psi(t_2) = \psi(t_1) + \dot{\psi}_c \cdot (t_2 - t_1) = \psi(t_1) + \frac{V}{\rho} \cdot (t_2 - t_1)$$

Application numérique : $\psi(t_2) = 0,69 \text{ rd} = 39,7^\circ$

$t_3 < 3\text{s}$, le cahier des charges est bien validé.

Q21.

$$J_m \ddot{\theta}_m = C_m - \frac{C_{re}}{N} - f_m \dot{\theta}_m \Rightarrow J_m \ddot{\theta}_m = C_m - \frac{K(\theta_{re} - \theta_r)}{N} - f_m \dot{\theta}_m \Rightarrow J_m \ddot{\theta}_m = C_m - f_m \dot{\theta}_m - \frac{K}{N} (\theta_m - \theta_r)$$

D'où :

$$\alpha = f_m \text{ et } \beta = K$$

$$J_r \ddot{\theta}_r = -C_p + C_{re} - f_r \dot{\theta}_r \Rightarrow J_r \ddot{\theta}_r = -C_p - f_r \dot{\theta}_r + K \left(\frac{\theta_m}{N} - \theta_r \right) \text{ Et donc : } \gamma = f_r$$

Q22.

$$H_1(p) = \frac{I_m(p)}{E_m(p)} = \frac{1}{R_e + Lp} \quad H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_m(p) - \frac{1}{N} C_{re}(p)} = \frac{1}{\alpha + J_m p}$$

$$C_{re}(p) = K(\theta_{re}(p) - \theta_r(p)) \Leftrightarrow C_{re}(p) = \frac{K}{p} \cdot (\Omega_{re}(p) - \Omega_r(p))$$

$$\text{D'où : } H_3(p) = \frac{C_{re}(p)}{K(\Omega_{re}(p) - \Omega_r(p))} = \frac{1}{p} \quad H_4(p) = \frac{\Omega_r(p)}{C_{re}(p) + C_p(p)} = \frac{1}{\gamma + J_r p}$$

Problème N°2 :

Q1 : On cherche P tel que $\vec{M}(P, sol \rightarrow pied) = \vec{0}$

$$\text{Soit } P\vec{O}_S \wedge \int p \vec{z}_0 dy + \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy = \vec{0} \Leftrightarrow P\vec{O}_S \cdot \int p dy + \int O_S \vec{M} \wedge p dy = \vec{0} \text{ d'où } O_S \vec{P} = \frac{\int O_S \vec{M} \wedge p dy}{\int p dy} \text{ donc P}$$

existe et $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ est un glisseur.

Ou plus simplement : un glisseur a sa résultante non nulle \vec{R} et orthogonale au moment $\forall P, \vec{R} \cdot \vec{M}(P) = 0$.

Autrement dit son automoment est nul. Or $\forall P, \vec{R}(P, sol \rightarrow pied) \cdot \vec{M}(P, sol \rightarrow pied) = F \vec{z}_0 \cdot \int PM \wedge p \vec{z}_0 dy = 0$ donc $\{T_{sol \rightarrow pied}\}$ est un glisseur.

Q2 : D'après 1 : $O_S \vec{H}_S = \frac{\int p y dy}{\int p dy} \vec{y}_0 > \vec{0}$ de même $C_S \vec{H}_S = \frac{\int C_S M \wedge p dy}{\int p dy} = \frac{\int p y dy - \int p L dy}{\int p dy} \vec{y}_0 < \vec{0}$ donc $H_S \in [O_S, C_S]$

Q3 :

$$\{T_{sol \rightarrow pied}\} = \left. \begin{array}{l} b \int (p \vec{z}_0 + t \vec{y}_0) dy \\ b \int O_S \vec{M} \wedge (p \vec{z}_0 + t \vec{y}_0) dy \end{array} \right\} \text{ . Or } O_S \vec{M} // \vec{y}_0 \text{ donc}$$

$$\{T_{sol \rightarrow pied}\} = \underbrace{\left. \begin{array}{l} b \int p \vec{z}_0 dy \\ b \int O_S \vec{M} \wedge p \vec{z}_0 dy \end{array} \right\}}_{\text{glisseur en } H_S \text{ trouvé en 1}} + \underbrace{\left. \begin{array}{l} b \int t \vec{y}_0 dy \\ \vec{0} \end{array} \right\}}_{\text{glisseur suivant } (O_S, \vec{y}_0)} \text{ est un glisseur en } H_S.$$

Q4 :

Théorème du moment dynamique en G : $\vec{M}(G, sol \rightarrow pied) \cdot \vec{x}_0 + \vec{M}(G, pes \rightarrow I) \cdot \vec{x}_0 = \vec{0} \Rightarrow \overline{GH}_S \wedge \vec{R}_{sol \rightarrow pied} = \vec{0}$

D'où $(-Y_G(t)\vec{y}_0 - Z_G(t)\vec{z}_0 + Y_{H_S}\vec{y}_0) \wedge (N_{sol \rightarrow pied}\vec{z}_0 + T_{sol \rightarrow pied}\vec{y}_0) = \vec{0}$

$$\Rightarrow (Y_{H_S} - Y_G(t))N_{sol \rightarrow pied} + Z_G(t)T_{sol \rightarrow pied} = 0$$

Théorème de la résultante dynamique : $N_{sol \rightarrow pied}\vec{z}_0 + T_{sol \rightarrow pied}\vec{y}_0 - m_1 g \vec{z}_0 = m_1 \ddot{Y}_G(t)\vec{y}_0$

$$\Rightarrow T_{sol \rightarrow pied} = m_1 \ddot{Y}_G(t) \quad \text{et} \quad N_{sol \rightarrow pied} = m_1 g$$

On retrouve l'équation $Y_{H_S}(t) = Y_G(t) - \frac{Z_G}{g} \ddot{Y}_G(t)$

Q5 : Le cas limite est pour $y_{H_s} = L$

$$y_G = y_{H_s} + \frac{z_G}{g} \frac{d^2 y_G}{dt^2} = 0,3 + \frac{1,05}{9,81} \times 1,39 = 0,449 \text{ m}$$

Foulée = $4 \cdot y_G = 1,795 \text{ m} > 1,5 \text{ m}$ donc le CdCf n'est pas respecté.

Q6 : Condition d'adhérence $T_{sol \rightarrow 2} \leq \mu \cdot N_{sol \rightarrow 2}$ soit avec Q4 : $\frac{d^2 y_G}{dt^2} \leq \mu \cdot g = 0,981 \text{ m.s}^{-2} < 1,39 \text{ m.s}^{-2}$

Le cahier des charges n'est pas satisfait.

Q7 : $\{T_{sol \rightarrow pied}\} + \{T_{cheville \rightarrow pied}\} = \{0\}$. Les termes du tableau sont des intensités

Action mécanique du sol sur le pied	cas n°1	cas n°2	cas n°3
	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{SP} \end{Bmatrix}_{O_p, B_0}$	$\begin{Bmatrix} X_{SP} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_p, B_0}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{SP} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{O_p, B_0}$
Action mécanique de la cheville sur le pied dans la liaison A ₀	$\begin{Bmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_0, B_0}$	$\begin{Bmatrix} -X_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_0, B_0}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_0, B_0}$
Action mécanique de la cheville sur le pied dans la liaison A ₁	$\begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_1, B_1}$	$\begin{Bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_1, B_1}$	$\begin{Bmatrix} -X_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_1, B_1}$
Action mécanique de la cheville sur le pied dans la liaison A ₂	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, B_2}$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, B_2}$	$\begin{Bmatrix} X_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A_2, B_2}$

Q8 : $\vec{M}(H_s, s \rightarrow p) = \vec{0} = \vec{M}(O_p, s \rightarrow p) + H_s \vec{P} \wedge \vec{R}(s \rightarrow p) = L_{SP} \vec{x}_0 + (h z_0 - y_{ZMP} \vec{y}_0) \wedge (Y_{SP} \vec{y}_0 + Z_{SP} \vec{z}_0)$ donc $L_{SP} \vec{x}_0 - h Y_{SP} \vec{x}_0 - y_{ZMP} \cdot Z_{SP} \vec{x}_0 = \vec{0}$ soit $y_{ZMP} = \frac{L_{SP} - h Y_{SP}}{Z_{SP}}$. A.N. : $y_{ZMP} = \frac{L_{SP} - h Y_{SP}}{Z_{SP}} = \frac{35 - 0,05 \times 300}{400} = 0,05 \text{ m}$

comme $50 \text{ mm} < 300$ donc la condition de stabilité est respectée.

Q9 : On isole le pied et on écrit les équations du PFD : $\{T_{sol \rightarrow pied}\} + \{T_{cheville \rightarrow pied}\} = \{0\}$

$$\text{d'où : } \begin{cases} X_0 - \frac{X_1}{2} - \frac{X_2}{2} = 0 \\ Y_{SP} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot X_2 = 0 \\ Z_{SP} + Z_0 + Z_1 + Z_2 = 0 \\ L_{SP} + r \cdot Z_0 - r \cdot \frac{Z_1}{2} - r \cdot \frac{Z_2}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Z_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Z_2 = 0 \\ -r \cdot X_0 - r \cdot X_1 - r \cdot X_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -\frac{Y_{SP}}{\sqrt{3}} \\ X_2 = \frac{Y_{SP}}{\sqrt{3}} \\ Z_0 = -\frac{2L_{SP} + r \cdot Z_{SP}}{3 \cdot r} \\ Z_1 = \frac{L_{SP} - r \cdot Z_{SP}}{3 \cdot r} \\ Z_2 = \frac{L_{SP} - r \cdot Z_{SP}}{3 \cdot r} \end{cases}$$

Pas de composante de liaison indéterminée. Il s'agit d'une liaison encastrement réalisée de manière **isostatique**

Q10 :

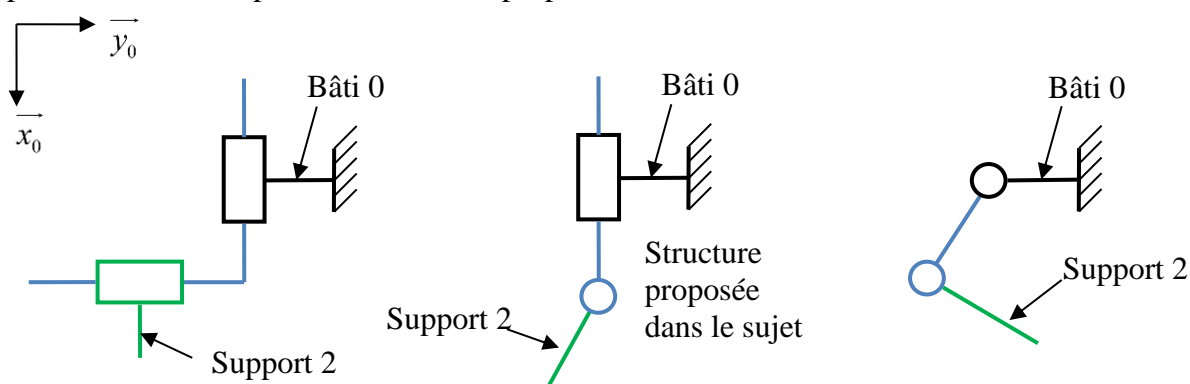
$$Z_0 \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -\frac{300}{\sqrt{3}} = -173 \text{ N} \\ X_2 = \frac{300}{\sqrt{3}} = 173 \text{ N} \\ Z_0 = -\frac{2 \times 35 + 0,04 \times 400}{3 \times 0,04} = -716 \text{ N} \\ Z_1 = Z_2 = \frac{35 - 0,04 \times 400}{3 \times 0,04} = 158 \text{ N} \end{cases}$$

est légèrement en dehors de l'intervalle de linéarité $[-680 \text{ N}; 680 \text{ N}]$

Problème N°3 :

Q1 : Le bras motorisé doit pouvoir déplacer la pince dans des plans horizontaux (\vec{x}_0, \vec{y}_0) et effectuer une translation suivant une direction verticale \vec{z}_0 .

Pour le déplacement dans un plan horizontal, on propose les trois structures suivantes :



Q2 :

Liaison	Bâti 0 / Coulisseau 1	Coulisseau 1 / Support 2	Support 2 / Ensemble 3
Modèle de liaison proposé	Glissière	Pivot	Glissière
Caractéristiques cinématiques	Direction \vec{x}_0	Axe (G_2, \vec{z}_0)	Direction \vec{z}_0
Forme torseur cinématique	$\begin{pmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{V}_{M,B_0}}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}_{G_2, B_0}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & v_z \end{pmatrix}_{\mathcal{V}_{M,B_0}}$
Forme torseur d'action mécanique	$\begin{pmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{pmatrix}_{\mathcal{V}_{M,B_0}}$	$\begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{pmatrix}_{G_2, B_0}$	$\begin{pmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & N \end{pmatrix}_{\mathcal{V}_{M,B_0}}$

Q3 :

Effort	Ensemble isolé	Théorème utilisé	Justification choix d'isolement et de théorème
F_{M1}	1 + 2 + 3	Résultante dynamique suivant \vec{x}_0	La force recherchée F_{M1} est portée par \vec{x}_0 et la composante de la résultante transmissible par la liaison 1/0 est nulle suivant cette direction.
C_{M2}	2 + 3	Moment résultant dynamique suivant \vec{z}_0 , en G_2 .	Le couple recherchée C_{M2} est portée par \vec{z}_0 et la composante du moment transmissible par la liaison 2/1 est nulle suivant cette direction en G_2 .
F_{M3}	3	Résultante dynamique suivant \vec{z}_0	La force recherchée F_{M3} est portée par \vec{z}_0 et la composante de la résultante transmissible par la liaison 3/2 est nulle suivant cette direction.

Q4 : $\bar{I}_{(G_3,3)} = \bar{I}_{(G_3,tige)} + \bar{I}_{(G_3,masse)}$ or $\bar{I}_{(G_3,tige)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{\lambda^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{\lambda^2}{12} \end{bmatrix}_{B_3}$ en utilisant l'annexe

$$\bar{I}_{(G_3,masse)} = \bar{I}_{(C_3,masse)} + m_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{4} \end{bmatrix}_{B_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_3} + m_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{4} \end{bmatrix}_{B_3} \quad (\text{huygens})$$

$$\text{D'où : } \bar{I}_{(G_3,3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m \frac{\lambda^2}{12} + m_p \frac{\lambda^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{\lambda^2}{12} + m_p \frac{\lambda^2}{4} \end{bmatrix}_{B_3}$$

Q5 : On isole l'ensemble 2+3 soumis à :

l'action de la pesanteur

$$\left\{ \tau_{pes \rightarrow 2} \right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} -m_2 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \left\{ \tau_{pes \rightarrow 3} \right\}_{G_3} = \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

l'action des frottements visqueux

$$\left\{ \tau_{fv \rightarrow 2} \right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ -f_2 \dot{\theta} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

l'action de 1 sur 2 :

$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow 2} \right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_0 + Y_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_0 + Z_{1 \rightarrow 2} \vec{z}_0 \\ L_{1 \rightarrow 2} \vec{x}_0 + M_{1 \rightarrow 2} \vec{y}_0 \end{Bmatrix}$$

l'action de la motorisation M_2 :

$$\left\{ \tau_{M_2 \rightarrow 2} \right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ C_{M_2} \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Q6 : théorème du moment résultant dynamique suivant \vec{z}_0 , en G_2 : $\overrightarrow{\delta}_{(G_2,2+3/0)} \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{M}_{G_2,2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \vec{z}_0$.

$$\overrightarrow{\sigma}_{(G_2,2/0)} \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \bar{I}_{(G_2,2)} (\overrightarrow{\Omega}_{(2/0)}) = J_2 \dot{\theta} \quad \text{et donc} \quad \overrightarrow{\delta}_{(G_2,2/0)} \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d(\overrightarrow{\sigma}_{(G_2,2/0)} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_0 - \overrightarrow{\sigma}_{(G_2,2/0)} \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_0 = J_2 \ddot{\theta}$$

$$\overrightarrow{\sigma}_{(G_3,3/0)} \cdot \vec{z}_0 = \vec{z}_0 \cdot \bar{I}_{(G_3,3)} (\overrightarrow{\Omega}_{(3/0)}) = J_3 \dot{\theta} \quad \text{ce qui donne} \quad \overrightarrow{\delta}_{(G_3,3/0)} \cdot \vec{z}_0 = \left[\frac{d(\overrightarrow{\sigma}_{(G_3,3/0)} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_0 - \overrightarrow{\sigma}_{(G_3,3/0)} \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_0 = J_3 \ddot{\theta}$$

$$\overrightarrow{V}_{(G_3,3/0)} = \left[\frac{d \overrightarrow{OG_3}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(x(t) \vec{x}_0 - (d_1 + z(t)) \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \vec{x}_3)}{dt} \right]_0 = \dot{x} \vec{x}_0 - \dot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta} \vec{y}_3$$

$$\overrightarrow{a}_{(G_3,3/0)} = \left[\frac{d \overrightarrow{V}_{(G_3,3/0)}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(\dot{x} \vec{x}_0 - \dot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta} \vec{y}_3)}{dt} \right]_0 = \ddot{x} \vec{x}_0 - \ddot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \ddot{\theta} \vec{y}_3 - (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta}^2 \vec{x}_3$$

$$\overrightarrow{\delta}_{(G_2,3/0)} = \overrightarrow{\delta}_{(G_3,3/0)} + m_3 \overrightarrow{G_2 G_3} \wedge \overrightarrow{a}_{(G_3,3/0)} = J_3 \ddot{\theta} \vec{z}_0 + m_3 (-z \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \vec{x}_3) \wedge (\ddot{x} \vec{x}_0 - \ddot{z} \vec{z}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \ddot{\theta} \vec{y}_3 - (\frac{\lambda}{2}) \dot{\theta}^2 \vec{x}_3)$$

$$\overrightarrow{\delta}_{(G_2,3/0)} \cdot \vec{z}_0 = J_3 \ddot{\theta} + \left(m_3 (\frac{\lambda}{2}) (\vec{x}_3 \wedge (\ddot{x} \vec{x}_0 + (\frac{\lambda}{2}) \ddot{\theta} \vec{y}_3)) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left[J_3 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (\frac{\lambda}{2}) \ddot{x} \sin \theta$$

$$\overrightarrow{M}_{G_2,2+3 \rightarrow 2+3} \cdot \vec{z}_0 = C_{M_2} - f_2 \dot{\theta}$$

On en déduit donc $C_{M_2} - f_2 \dot{\theta} = \left[J_3 + J_2 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (\frac{\lambda}{2}) \ddot{x} \sin \theta$

$$C_{M_2} = \left[J_3 + J_2 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right] \ddot{\theta} - m_3 (\frac{\lambda}{2}) \ddot{x} \sin \theta + f_2 \dot{\theta} \quad (E_2).$$

Q7 : Par identification : $A = \left[J_3 + J_2 + m_3 (\frac{\lambda}{2})^2 \right]$; $B = f_2$; $C = -m_3 (\frac{\lambda}{2}) \sin \theta$.

Q8 : Les mouvements des axes 1 et 2 sont couplés car les équations différentielles (E₁) et (E₂:celle à trouver) comportent toutes les deux des termes en x, θ et leurs dérivées.