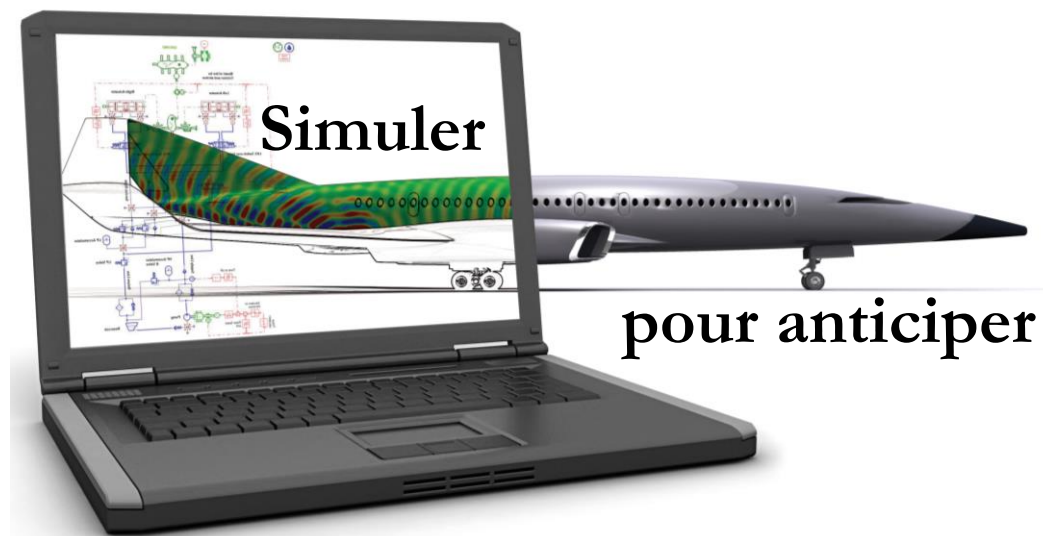


Énergétique des systèmes mécaniques

Objectifs - extraits du référentiel de 2nde année

Compétence visée	Savoir-faire associé
Identifier et caractériser les grandeurs physiques	Associer les grandeurs physiques aux échanges d'énergie et à la transmission de puissance
	Identifier les pertes d'énergie
	Évaluer le rendement d'une chaîne d'énergie en régime permanent
	Déterminer la puissance des actions mécaniques extérieures à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement rapport à un autre solide
Proposer un modèle de connaissance et de comportement	Déterminer la puissance des actions mécaniques intérieures à un ensemble de solides
	Déterminer l'énergie cinétique d'un solide, ou d'un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport à un autre solide
Proposer une démarche de résolution	Proposer une démarche permettant la détermination de la loi de mouvement
Procéder à la mise en œuvre d'une démarche de résolution analytique	Déterminer la loi du mouvement sous forme d'équations différentielles dans le cas où les efforts extérieurs sont connus



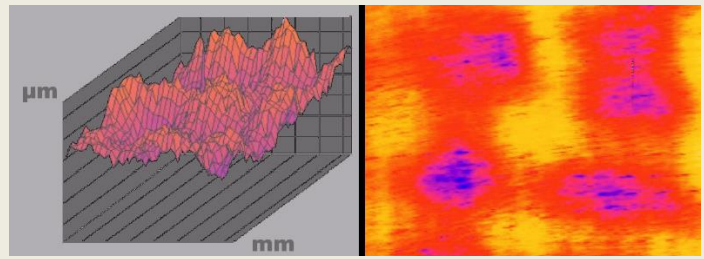
Sciences Industrielles de l'Ingénieur

2^{ème} année de CPGE

Lycée Claude Fauriel

Illustration du cours : **rugosimètre tridimensionnel à grande vitesse** (extraits du concours Mines-Ponts 2006)

La rugosimétrie est la mesure de l'état de surface des pièces mécaniques. L'ordre de grandeur des défauts mesurés est le micron. Cette mesure des états de surfaces est aussi répandue et indispensable que la mesure des caractéristiques dimensionnelles et géométriques des pièces mécaniques (longueur, orientation, perpendicularité...).



La figure ci-dessus représente un relevé rugosimétrique tridimensionnel d'une partie d'une aube de turbine de haute précision (à droite en fausses couleurs).

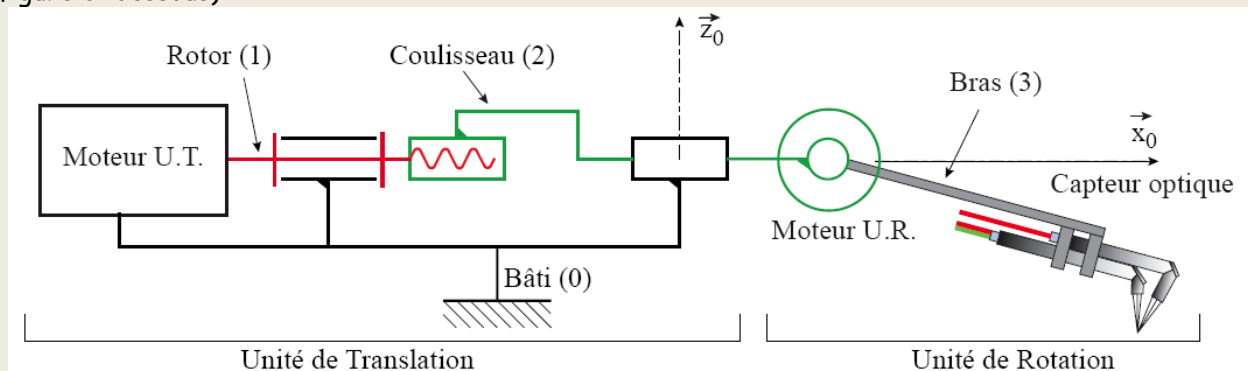
La mesure de rugosimétrie repose traditionnellement sur deux éléments distincts : le capteur, qui peut être mécanique (palpeur) ou optique, et le traitement du signal et des données (algorithmes informatiques), qui permet de traduire les mesures physiques de base, produites par le capteur, en données numériques exploitables, représentatives des caractéristiques physiques de la surface analysée.

De la conjonction des caractéristiques techniques du capteur et du traitement numérique vont découler les qualités essentielles du rugosimètre : sa rapidité ; sa résolution ; sa précision ; son amplitude de mesure. Lorsque l'ensemble est suffisamment rapide, il peut être utilisé pour réaliser des relevés de surface (z fonction de (x, y) , ou « mesure 3D ») et non plus simplement des profils linéaires (z fonction de x , ou « mesure 2D »).

Le principe d'un capteur opto-mécanique (association d'un capteur optique et d'un capteur mécanique) a été retenu, pour ce prototype. Il est décrit succinctement ci-après :

- un capteur optique assure une résolution verticale comparable à celle des meilleurs capteurs mécaniques actuels (< 10 nm). Ce capteur, de faible amplitude de lecture (20 μm), permet une mesure rapide des hautes fréquences spatiales (variations rapides) des profils rugosimétriques ;
- un asservissement mécanique vertical à grande amplitude (environ 10 mm) permet à la tête optique de suivre les moyennes et basses fréquences spatiales (variations plus lentes) des profils. Un second capteur donne la position verticale de la tête optique.

Le profil complet sera obtenu par la somme des signaux fournis par les deux capteurs. Le déplacement vertical du capteur optique est assuré par une Unité de Rotation (U.R.) portée par le coulisseau (2) (figure ci-dessous) :



Ce capteur opto-mécanique est lui-même déplacé au-dessus de la surface à mesurer par une Unité de Translation (U.T.) à vitesse régulée, ce qui permet d'obtenir un « profil 2D », z fonction de x . La vitesse de déplacement visée par ce prototype est de 20 $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$. Dans sa future version 3D, une seconde U.T. de direction (\vec{y}) permettra de donner une image de la surface par une juxtaposition de profils 2D : on « scanner » la surface.

Les calculs d'avant-projet doivent permettre de dimensionner les différents composants qui seront utilisés et de définir certains paramètres de réglages (paramètres d'asservissement ...). Les calculs prévisionnels visent, dans un premier temps, à déterminer les équations dynamiques qui permettront de déterminer les couples moteurs (minimum) des différents actionneurs en fonction des caractéristiques géométriques, massiques et inertielles des pièces ainsi que des conditions d'utilisation.

1 - Énergie cinétique :

1.1 – Définition :

$$T(E/R) = \frac{1}{2} \int_E [\vec{V}(M/R)]^2 dm$$

unité: le Joule

1.2 - Cas du solide indéformable :

$$2T(S/R) = \int_S [\vec{V}(G \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{GM}]^2 dm \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \int_S [\vec{V}(G \in S/R)]^2 dm + \int_S [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{GM}]^2 dm + 2 \int_S \vec{V}(G \in S/R) \cdot [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{GM}] dm \\ &= m [\vec{V}(G \in S/R)]^2 + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_S \overline{GM} \wedge \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{GM} dm + 2 \vec{V}(G \in S/R) \cdot \vec{\Omega}(S/R) \wedge \int_S \overline{GM} dm \end{aligned}$$

d'où
$$T(S/R) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(G \in S/R)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) \cdot \mathbf{I}_G(S) \vec{\Omega}(S/R)$$

En choisissant un point **A quelconque** on obtient l'expression générale :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(G \in S/R) \cdot \vec{V}(A \in S/R)] + \frac{1}{2} \vec{\sigma}(A, E/R) \cdot \vec{\Omega}(S/R) = \frac{1}{2} \mathbf{C}(S/R) \otimes \mathbf{V}(S/R)$$

Cas particuliers :

* mouvement de rotation d'un solide S autour d'un point fixe A de R :

$$T(S/R) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) \cdot \mathbf{I}_A(S) \vec{\Omega}(S/R)$$

* mouvement de rotation d'un solide S autour d'un axe fixe (A, \vec{x}) de R :

$$\text{on peut poser } \vec{\Omega}(S/R) = \omega \vec{x} \quad \text{d'où } T(S/R) = \frac{1}{2} I_{Ax}(S) \omega^2$$

* mouvement de translation rectiligne d'un solide S suivant un axe fixe (\vec{x}) de R :

$$\text{on peut poser } \vec{V}(A \in S/R) = V \vec{x} \quad \text{d'où } T(S/R) = \frac{1}{2} m V^2$$

* si on suppose une masse ponctuelle : $T(m_i/R) = \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_{G_i, m_i/R})^2$

* si la masse est négligée : $T(S/R) = 0$

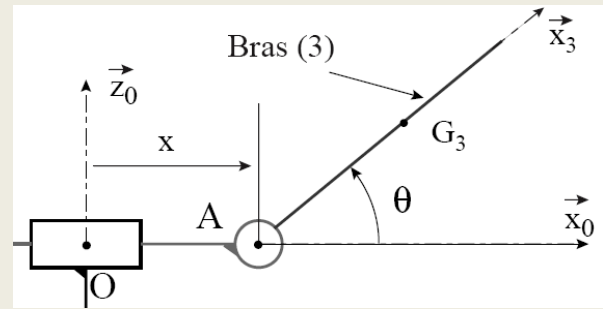
1.3 - Éléments cinétiques d'un ensemble E de n solides S_i en mouvement / R :

$$T(E/R) = \sum_{i=1}^n T_i(E/R)$$

Energie cinétique de l'ensemble (3) :

- masse : $m_3 = 8g$
- centre d'inertie (G_3) : $\overline{AG_3} = r \cdot \overline{x_3}$ avec $r = 27,5mm$
- matrice d'inertie en (A) :

$$I(A,3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(A, \overline{x_3}, \overline{y_3}, \overline{z_3})}$$



Détermination de l'énergie cinétique de l'ensemble (3) :

le comoment du torseur cinétique et du torseur cinématique peut être calculé indifféremment aux points A ou G_3 (les 2 torseurs étant réduits au même point !!!).

$$\text{Calcul au point A : } T(3/0) = \frac{1}{2} \vec{\sigma}_A(3/0) \cdot \vec{\Omega}(3/0) + \frac{1}{2} m_3 \cdot \vec{V}(G_3, 3/0) \cdot \vec{V}(A, 3/0)$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_A(3/0) &= [I(A,3)] \cdot \vec{\Omega}(3/0) + m_3 \cdot \overline{AG_3} \wedge \vec{V}(A, 3/0) \\ &= \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{B_3} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}_{B_3} + m_3 \cdot r \cdot \overline{x_3} \wedge \dot{x} \cdot \overline{x_0} \\ &= -F \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{x_3} + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \cdot \overline{y_3} - D \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_3} \end{aligned}$$

Remarque : le point A n'est pas fixe dans le référentiel galiléen ...

et

$$\vec{V}(G_3, 3/0) = \vec{V}(A, 3/0) + \vec{\Omega}(3/0) \wedge \overline{AG_3} = \dot{x} \cdot \overline{x_0} + \dot{\theta} \cdot \overline{y_0} \wedge r \cdot \overline{x_3} = \dot{x} \cdot \overline{x_0} - r \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_3}$$

donc

$$\frac{1}{2} \vec{\sigma}_A(3/0) \cdot \vec{\Omega}(3/0) = \frac{1}{2} (-F \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{x_3} + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \cdot \overline{y_0} - D \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_3}) \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{y_0}$$

$$\frac{1}{2} m_3 \cdot \vec{V}(G_3, 3/0) \cdot \vec{V}(A, 3/0) = \frac{1}{2} m_3 \cdot (\dot{x} \cdot \overline{x_0} - r \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_3}) \cdot (\dot{x} \cdot \overline{x_0})$$

soit

$$\begin{aligned} T(3/0) &= \frac{1}{2} (-F \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{x_3} + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \cdot \overline{y_0} - D \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_3}) \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{y_0} + \frac{1}{2} m_3 \cdot (\dot{x} \cdot \overline{x_0} - r \cdot \dot{\theta} \cdot \overline{z_3}) \cdot (\dot{x} \cdot \overline{x_0}) \\ &= \frac{1}{2} B \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} B \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2 - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

Finalemment

$$T(3/0) = \frac{1}{2} B \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2 - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta$$

2 – Puissance :

2.1 - Puissance des efforts extérieurs à un système matériel E en mouvement par rapport à un repère R :

Soit un champ de forces $\vec{dF}(M)$ agissant en chaque point M d'un système E.

La puissance développée, à l'instant t, par l'action des efforts extérieurs sur E, dans le mouvement de E/R est :

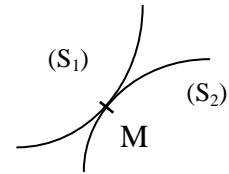
$$P(\text{Ext} \rightarrow E / R) = \int_{M \in E} \vec{V}(M/R) \cdot \vec{dF}(M)$$

Exemples :

- pesanteur: $\vec{dF}(M) = \rho \vec{g}(M) dv$
- champ de pression dans un fluide: $\vec{dF}(M) = -p(M) \vec{n}(M) ds$
- champ des forces de contact entre 2 solides : $\vec{dF}(M) = -p(M) \vec{n}(M) ds + f p(M) \vec{t}(M) ds$

Rappel sur les actions surfaciques de contact :

Soient deux solides S1 et S2 en contact sur une surface ds. On isole S1. L'action est dirigée vers l'intérieur du solide isolé .

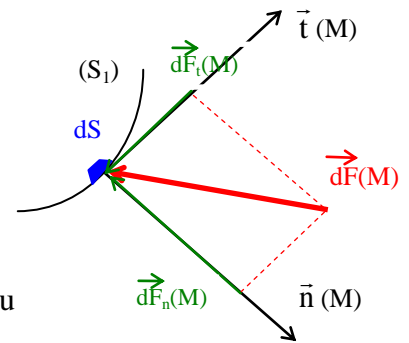


action en M de S2 sur S1: $\vec{dF}(M) = \vec{dF}_n(M) + \vec{dF}_t(M)$

$$\vec{dF}(M) = -p(M) ds \vec{n}(M) + q(M) ds \vec{t}(M)$$

avec

- $p(M)$ = pression de contact en M
- $\vec{n}(M)$ = vecteur unitaire normal au plan tangent commun en M, orienté vers l'extérieur du solide isolé.
- $q(M)$ = répartition surfacique tangentielle d'effort en M.
- $\vec{t}(M)$ = vecteur unitaire d'une direction du plan tangent commun au point M.
- S'il n'y a pas de frottement en M (ou s'il est négligeable ou si action hydro d'un fluide sur solide), $q(M) = 0$



Sinon, **les lois de Coulomb** définissent $q(M)$ et la direction et le sens de $\vec{t}(M)$:

1er cas : la vitesse de glissement en M entre S1 et S2 n'est pas nulle

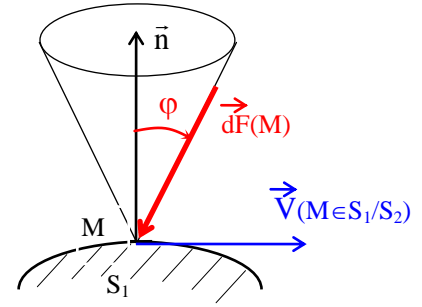
$$\vec{V}(M \in S1/S2) \neq \vec{0}$$

$$q(M) = f \cdot p(M) \quad \text{avec } f = \text{coefficient de frottement en M entre S1 et S2}$$

$\vec{t}(M)$ est opposée à la vitesse de glissement de S1/S2 (S1 étant le solide isolé)

$$f = \tan \varphi = \frac{q(M)}{p(M)}$$

le cône de frottement est le cône de demi-angle au sommet φ sur lequel se situe l'action élémentaire lorsque la vitesse de glissement change de direction.



2ème cas : la vitesse de glissement en M entre S_1 et S_2 est nulle

$$\vec{V}(M \in S_1/S_2) = \vec{0}$$

$$q(M) \leq f \cdot p(M) \quad \text{et} \quad \vec{t}(M) \text{ de direction indéterminée}$$

L'effort est alors à l'intérieur du cône de frottement, incliné de $\alpha \leq \varphi$ par rapport à la normale \vec{n} .
L'effort n'est jamais à l'extérieur du cône de frottement !

2.2 - Cas particulier du solide indéformable :

$$\vec{V}(M \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AM}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } P(\text{Ext} \rightarrow E/R) &= \int_S \vec{dF}(M) \cdot \vec{V}(A \in S/R) + \int_S \vec{dF}(M) \cdot [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AM}] \\ &= \vec{V}(A \in S/R) \cdot \int_S \vec{dF}(M) + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \int_S \vec{AM} \wedge \vec{dF}(M) \end{aligned}$$

or le torseur associé aux efforts extérieurs à S en A s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_S \vec{dF}(M) = \vec{R}(\text{Ext} \rightarrow S) \\ \int_S \vec{AM} \wedge \vec{dF}(M) = \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S) \end{array} \right\}$$

donc
$$P(\text{Ext} \rightarrow S/R) = \vec{V}(A \in S/R) \cdot \vec{R}(\text{Ext} \rightarrow S) + \vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{M}_A(\text{Ext} \rightarrow S)$$

\Rightarrow La puissance développée par les actions mécaniques extérieures à un solide S en mouvement par rapport à R est égale au produit (comoment) du torseur cinématique de S/R par le torseur des actions mécaniques extérieures.

$$P(\text{Ext} \rightarrow S/R) = \mathbf{T}(\text{Ext} \rightarrow S) \otimes \mathbf{V}(S/R)$$

Le comoment ne dépend pas du point choisi pour le calcul des deux torseurs (même point pour les deux !) mais du repère R.

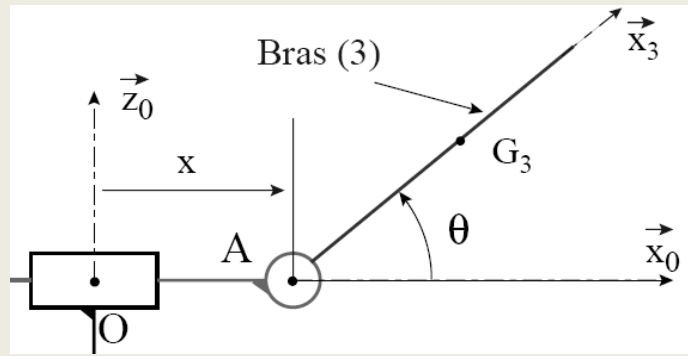
Comoment des torseurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \right\}_A \left\{ \begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array} \right\} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{array} \right\}_A \left\{ \begin{array}{l} v_x \\ v_y \\ v_z \end{array} \right\} = X v_x + Y v_y + Z v_z + L \omega_x + M \omega_y + N \omega_z$$

Puissance des actions extérieures sur (3) :

- masse : m_3

- centre d'inertie (G_3) : $\overrightarrow{AG_3} = r \cdot \overrightarrow{x_3}$



- la liaison pivot (L2/3), de paramètre angulaire $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_3})$, présente un frottement visqueux de coefficient f_3 , créant un moment : $\overrightarrow{M}_{A2 \rightarrow 3} = -f_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_0}$

- un moteur (M3) gère la rotation de l'ensemble (3) par rapport à (2). Le couple moteur appliqué sur (3) est noté : $\overrightarrow{C}_{moteur3 \rightarrow 3} = C_{m3} \cdot \overrightarrow{y_0}$

- un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^\circ$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur (M3) n'est pas alimenté. Ce système d'équilibrage exerce sur l'ensemble (3) un couple de rappel noté : $\overrightarrow{C} = C_r \cdot \overrightarrow{y_0}$, avec $C_r = -(K_{tors} \cdot \theta + C_0)$. Le terme C_0 permet d'équilibrer le moment en (A) créé par l'action de pesanteur sur (3) lorsque ($\theta = 0^\circ$).

Inventaire des puissances extérieures :

$$P(ext \rightarrow 3 / R_g) = P(pes \rightarrow 3 / R_g) + P(2 \rightarrow 3 / R_g) + P(M3 \rightarrow 3 / R_g) + P(C_r \rightarrow 3 / R_g)$$

Avec

$$\begin{aligned} P(pes \rightarrow 3 / 0) &= \left\{ \begin{array}{c} -m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{V}(G_3, 3 / 0) \end{array} \right\}_{G_3} \\ &= (-m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0}) \cdot \overrightarrow{V}(G_3, 3 / 0) = -m_3 \cdot g \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot (\dot{x} \cdot \overrightarrow{x_0} - r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{z_3}) = m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

$$P(2 \rightarrow 3 / 0) = \left\{ \begin{array}{cc} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & -f_3 \cdot \dot{\theta} \\ Z_{23} & N_{23} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{x} \\ \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A = -f_3 \cdot \dot{\theta}^2 + X_{23} \cdot \dot{x}$$

$$P(M_3 \rightarrow 3 / 0) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & C_{m3} \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\forall M} \otimes \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{x} \\ \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A = C_{m3} \cdot \dot{\theta}$$

$$P(C_r \rightarrow 3 / 0) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & C_r \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\forall M} \otimes \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{x} \\ \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A = C_r \cdot \dot{\theta} = -(K_{tors} \cdot \theta + C_0) \cdot \dot{\theta}$$

Soit finalement :

$$P(ext \rightarrow 3 / R_g) = m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta - f_3 \cdot \dot{\theta}^2 + X_{23} \cdot \dot{x} + C_{m3} \cdot \dot{\theta} - (K_{tors} \cdot \theta + C_0) \cdot \dot{\theta}$$

2.3 - Puissance des efforts intérieurs à un système de solides indéformables :

On parle aussi de la puissance des inter-efforts de liaison.

Soient 2 solides S_1 et S_2 en liaison à l'intérieur d'un système. La puissance développée par les efforts de liaison entre les 2 solides est de la forme :

$$\begin{aligned} P(S_2 \leftrightarrow S_1 / R) &= P(S_2 \rightarrow S_1 / R) + P(S_1 \rightarrow S_2 / R) \\ &= \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) \otimes \mathbf{V}(S_1 / R) + \mathbf{T}(S_1 \rightarrow S_2) \otimes \mathbf{V}(S_2 / R) \\ &= \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) \otimes [\mathbf{V}(S_1 / R) - \mathbf{V}(S_2 / R)] \end{aligned}$$

d'où

$$P_i(S_1, S_2) = \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) \otimes \mathbf{V}(S_1 / S_2)$$

Remarque : cette puissance est indépendante du repère R / auquel elle est calculée.

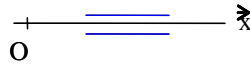
2.4 - Liaison parfaite entre deux solides :

Deux solides S_1 et S_2 ont une liaison parfaite si, quel que soit le mouvement autorisé par la liaison, la puissance développée par les actions mutuelles entre S_1 et S_2 est nulle (pas de frottement) :

$$P_i(S_1, S_2) = 0$$

Application : retrouver les torseurs des actions mécaniques pour les liaisons normalisées.

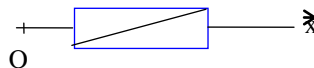
* pivot glissant d'axe \vec{x} :



$$\mathbf{V}(S_1 / S_2) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

$$P_i(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow L \cdot \omega_x + X \cdot v_x = 0, \forall \omega_x \text{ et } v_x \Rightarrow X = L = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

* glissière hélicoïdale d'axe \vec{x} :



$$\mathbf{V}(S_1 / S_2) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} & p \dot{\alpha} / 2\pi \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \mathbf{T}(S_2 \rightarrow S_1) = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

$$P_i(S_1, S_2) = 0 \Rightarrow L \cdot \alpha' + X \alpha' p / 2\pi = 0 \quad \forall \alpha' \Rightarrow L = -X p / 2\pi$$

2.5 - Liaison ponctuelle avec frottement :

Soit une liaison ponctuelle avec frottement entre 1 et 2 en A :

$$P_i(1,2) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = N_{12} \vec{n} + T_{12} \vec{t} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{V}_{A2/1} \end{array} \right\}_A = \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{A2/1}$$

* **Cas 1** : $\vec{V}_{A,2/1} \neq \vec{0}$ $\vec{V}_{A,2/1} = V_{A,2/1} \vec{t}$ et $\mathbf{P}_{(1,2)} = V_{A2/1} \cdot T_{12} < 0$: puissance dissipée sous forme de chaleur

* **Cas 2** : $\vec{V}_{A,2/1} = \vec{0}$ le mouvement est un R.S.G. et si on néglige la résistance au roulement alors : $\mathbf{P}_{(1,2)} = 0$

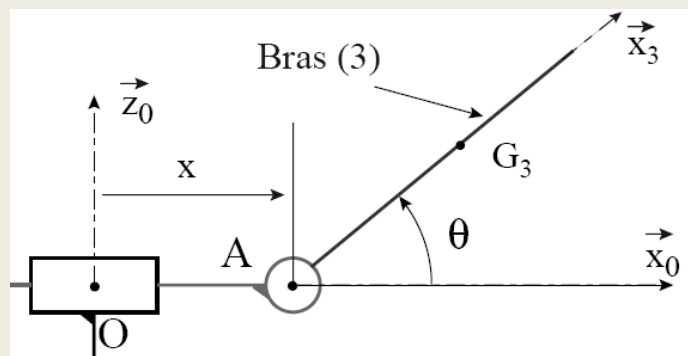
Il existe donc des liaisons avec frottement et pour lesquelles $\mathbf{P}_{(1,2)} = 0$

Puissance intérieure entre (2) et (3) :

- masse : m_3

- centre d'inertie (G_3) : $\overrightarrow{AG_3} = r \cdot \vec{x}_3$

Le moteur M3 et le système d'équilibrage ne sont pas considérés.



- la liaison pivot (L2/3), de paramètre angulaire $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$, présente un frottement visqueux de coefficient f_3 , créant un moment : $\overrightarrow{M}_{A2 \rightarrow 3} = -f_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$

$$P_i(2,3) = P(2 \rightarrow \underline{\underline{3/2}}) = \left\{ \begin{array}{l} X_{23} \quad L_{23} \\ Y_{23} \quad -f_3 \cdot \dot{\theta} \\ Z_{23} \quad N_{23} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 0 \\ \dot{\theta} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_A = -f_3 \cdot \dot{\theta}^2$$

En considérant **cette liaison parfaite** (sans frottement visqueux) :

$$P_i(2,3) = P(2 \rightarrow \underline{\underline{3/2}}) = \left\{ \begin{array}{l} X_{23} \quad L_{23} \\ Y_{23} \quad \underline{\underline{0}} \\ Z_{23} \quad N_{23} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad 0 \\ \dot{\theta} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_A = 0$$

Attention : le calcul d'une puissance extérieure est différent de celui d'une puissance intérieure, il faut être vigilant au référentiel pour le torseur cinématique !

3 - Théorème de l'énergie cinétique : TEC (ou Théorème de l'énergie – puissance)

3.1 - Solide unique S en mouvement / R_g :

$$D(S/R_g) = T(\text{Ext} \rightarrow S)$$

en multipliant cette expression par le torseur cinématique

$$D(S/R_g) \cdot V(S/R_g) = T(\text{Ext} \rightarrow S) \cdot V(S/R_g) = P(\text{Ext} \rightarrow S / R_g) = \text{puissance galiléenne des efforts extérieurs à S}$$

$$\begin{aligned} \text{or } D(S/R_g) V(S/R_g) &= \left[\int_S \vec{\Gamma}(M \in S / R_g) dm \right] \cdot \vec{V}(A \in S / R_g) + \left[\int_S \overline{AM} \wedge \vec{\Gamma}(M \in S / R_g) dm \right] \cdot \vec{\Omega}(S/R_g) \\ &= \int \vec{\Gamma}(M \in S / R_g) \left[\vec{V}(A \in S / R_g) + \vec{\Omega}(S/R_g) \wedge \overline{AM} \right] dm \\ &= \int \vec{\Gamma}(M \in S / R_g) \cdot \vec{V}(M \in S / R_g) dm = \int \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{V}(M \in S / R_g)^2 dm = \frac{d}{dt} T(S / R_g) \end{aligned}$$

d'où le théorème de l'énergie cinétique pour un solide :

La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne d'un solide S est égale à la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à S.

$$P(\text{Ext} \rightarrow S / R_g) = \frac{d}{dt} T(S / R_g)$$

3.2 - Système E de n solides S_i :

pour un solide, on a :
$$P(\text{Ext} \rightarrow S_i / R_g) = \frac{d}{dt} T(S_i / R_g)$$

en ajoutant les n relations pour les n solides :
$$\sum P(\text{Ext} \rightarrow S_i) = \sum \frac{d}{dt} T(S_i / R_g)$$

d'où le théorème de l'énergie cinétique pour un ensemble de solides :

La dérivée, par rapport au temps, de l'énergie cinétique galiléenne d'un ensemble E de solides est égale à la somme de la puissance galiléenne des actions mécaniques extérieures à E et de la puissances des inter-efforts (ou puissance intérieure).

$$P(\text{Ext} \rightarrow E) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P_i(S_i, S_j) = \frac{d}{dt} T(E / R_g)$$

Remarques :

- l'équation obtenue à partir du TEC n'est pas indépendante des équations fournies par le PFD,
- le principe fondamental de la dynamique donne 6 équations et le théorème de l'énergie cinétique une seule, donc suffisant seulement pour les problèmes à un degré de mobilité,
- pour un système de solides, il faut tenir compte des inter-efforts, contrairement au PFD,
- ce théorème n'est intéressant que si on peut intégrer facilement la puissance (ie si la puissance "dérive" d'un potentiel" et si les liaisons sont parfaites).

Forme intégrée :
$$T_{2(E/R_g)} - T_{1(E/R_g)} = W_{t1}^{t2}(\bar{E} \rightarrow E) + W_{t1}^{t2}(\text{int})$$

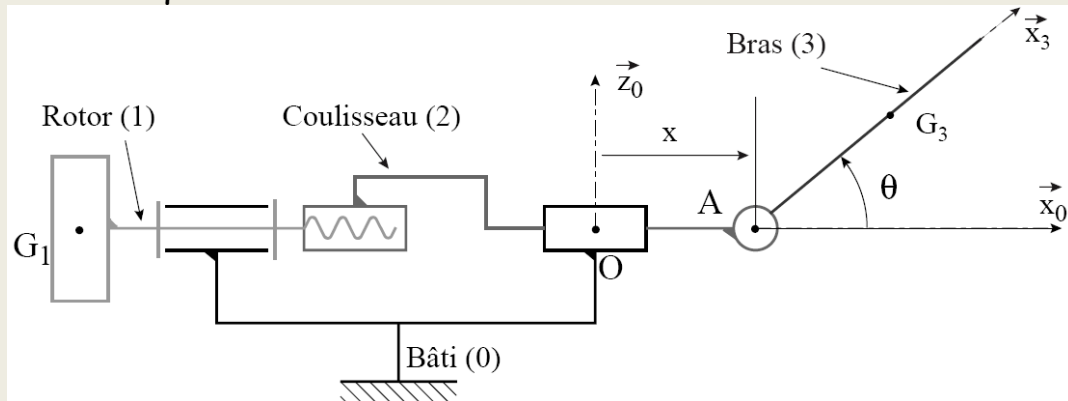
Il suffit d'intégrer entre t_1 et t_2 les écritures du TEC. L'équation obtenue à partir de cette forme intégrée du théorème de l'énergie cinétique ne permet pas de définir la loi du mouvement entre les instants t_1 et t_2 .

3.3 - Équations de mouvement :

En appliquant ces théorèmes, on obtient des relations entre les paramètres de position du système, leurs dérivées 1^{ères} et 2^{ndes} et les efforts s'exerçant sur E. On appelle **équation du mouvement** une équation différentielle du 2nd ordre traduisant les théorèmes généraux, dans laquelle ne figure aucune composante inconnue d'action mécanique.

Il y a autant d'équations de mouvement que de mobilités utiles. On les obtiendra assez facilement en projetant sur les axes de mobilité, pour éliminer le maximum d'inconnues de liaison.

Détermination de l'équation de mouvement



La figure ci-dessus présente le schéma et le paramétrage qui sera utilisé pour cette partie de l'étude. Ce système comporte quatre pièces :

Le bâti (0) : On associe à cette pièce le repère $(R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0))$ que l'on considère galiléen :

Le rotor (1) :

- moment d'inertie selon l'axe (O, \vec{x}_0) noté J_1 avec $J_1 = 10^{-6} \text{ kg.m}^2$;
- centre d'inertie (G_1) , avec $\vec{OG}_1 = -a.\vec{x}_0$;
- la liaison pivot $(L0/1)$, dont le paramètre angulaire est $\varphi = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, présente un frottement visqueux de coefficient f_1 , créant un moment $\vec{M}_{O0 \rightarrow 1} = -f_1.\dot{\varphi}.\vec{x}_0$ ($f_1 = 5.10^{-5} \text{ Nm/(rd.s}^{-1})$)
- un moteur (M_1) gère le mouvement de rotation de (1) par rapport à (0). Le couple moteur appliqué sur (1) est noté : $\vec{C}_{moteur1 \rightarrow 1} = C_{m1}.\vec{x}_0$

Le coulisseau (2) :

- masse : m_2 avec $m_2 = 2 \text{ kg}$;
- centre d'inertie (G_2) ,
- la liaison hélicoïdale $(L1/2)$ (supposée parfaite) possède un pas noté (pa) ($pa = 0,5 \text{ mm/tour}$). Ce pas est à droite (sens classique) ;
- la liaison glissière $(L0/2)$, dont le paramètre de position (translation) est noté (x) : $\vec{OA} = x.\vec{x}_0$, présente un frottement visqueux de coefficient f_2 , créant une force : $\vec{F}_{0 \rightarrow 2} = -f_2.\dot{x}.\vec{x}_0$ ($f_2 = 5 \text{ N/(m.s}^{-1})$)

L'ensemble (3) :

- masse : $m_3 = 8 \text{ g}$;
- centre d'inertie (G_3) : $\vec{AG}_3 = r.\vec{x}_3$;

- matrice d'inertie en (A) : $I(A,3) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)}$

- la liaison pivot (L2/3), de paramètre angulaire $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_3)$, présente un frottement visqueux de coefficient f_3 , créant un moment : $\vec{M}_{A2 \rightarrow 3} = -f_3 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0$

- un moteur (M_3) gère la rotation de l'ensemble (3) par rapport à (2). Le couple moteur appliqué sur (3) est noté : $\vec{C}_{moteur3 \rightarrow 3} = C_{m3} \cdot \vec{y}_0$

- un système d'équilibrage (ressort de torsion) permet à la tête optique d'être horizontale ($\theta = 0^\circ$) en position de repos, c'est-à-dire lorsque le moteur (M_3) n'est pas alimenté. Ce système d'équilibrage exerce sur l'ensemble (3) un couple de rappel noté : $\vec{C} = C_r \cdot \vec{y}_0$, avec $C_r = -(K_{tors} \cdot \theta + C_0)$. Le terme C_0 permet d'équilibrer le moment en (A) créé par l'action de pesanteur sur (3) lorsque ($\theta = 0^\circ$).

Appliquons le Théorème de l'Énergie Cinétique à l'ensemble (1 + 2 + 3) = (S) :

Inventaire des puissances extérieures :

$$P(ext \rightarrow S / R_g) = P(pes \rightarrow 1 / R_g) + P(pes \rightarrow 2 / R_g) + P(pes \rightarrow 3 / R_g) \\ + P(M1 \rightarrow 1 / R_g) + P(0 \rightarrow 1 / R_g) + P(0 \rightarrow 2 / R_g)$$

Avec

$$P(pes \rightarrow 1 / 0) = \left\{ \begin{array}{c} -m_1 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\phi} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_1} = 0$$

$$P(pes \rightarrow 2 / 0) = \left\{ \begin{array}{c} -m_2 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_2} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{x} \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{G_2} = 0$$

$$P(pes \rightarrow 3 / 0) = \left\{ \begin{array}{c} -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{V}(G_3, 3/0) \end{array} \right\}_{G_3} \\ = (-m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0) \cdot \vec{V}(G_3, 3/0) = -m_3 \cdot g \cdot \vec{z}_0 \cdot (\dot{x} \cdot \vec{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{z}_3) = m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$$

$$P(M1 \rightarrow 1 / 0) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & C_{m1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\forall M} \otimes \left\{ \begin{array}{cc} \dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_o = C_{m1} \cdot \dot{\phi}$$

$$P(0 \rightarrow 1 / 0) = \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & -f_1 \cdot \dot{\phi} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & N_{01} \end{array} \right\}_o \otimes \left\{ \begin{array}{cc} \dot{\phi} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_o = -f_1 \cdot \dot{\phi}^2$$

$$P(0 \rightarrow 2 / 0) = \left\{ \begin{array}{cc} -f_2 \cdot \dot{x} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & N_{02} \end{array} \right\}_o \otimes \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \dot{x} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{\forall M} = -f_2 \cdot \dot{x}^2$$

Remarque : l'action du moteur M3 n'est pas extérieure car le stator est solidaire de (2) et le rotor de (3), donc c'est une action intérieure entre (2) et (3).

Soit finalement :

$$P(ext \rightarrow S / R_g) = m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta + C_{m1} \cdot \dot{\varphi} - f_1 \cdot \dot{\varphi}^2 - f_2 \cdot \dot{x}^2$$

Inventaire des puissances intérieures : $P_{\text{int}}(S) = P_{\text{int}}(1,2) + P_{\text{int}}(2,3)$

Avec

$$P_{\text{int}}(2,3) = \begin{Bmatrix} X_{23} \\ Y_{23} \\ Z_{23} \end{Bmatrix}_A \begin{Bmatrix} L_{23} \\ C_{m3} + C_r - f_3 \cdot \dot{\theta} \\ N_{23} \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = (C_{m3} + C_r - f_3 \cdot \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta} = (C_{m3} + K_{\text{tors}} \cdot \theta + C_0 - f_3 \cdot \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta}$$

$$P_{\text{int}}(1,2) = 0 \quad \text{Liaison parfaite}$$

Détermination de l'énergie cinétique :

$$T(1/0) = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 \quad \text{Solide en rotation autour d'un axe fixe}$$

$$T(2/0) = \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}^2 \quad \text{Solide en translation}$$

$$\begin{aligned} T(3/0) &= \frac{1}{2} \bar{\sigma}_A(3/0) \cdot \bar{\Omega}(3/0) + \frac{1}{2} m_3 \bar{V}(G_3, 3/0) \cdot \bar{V}(A, 3/0) \\ &= \frac{1}{2} \left(-F \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{x}_3 + (B \cdot \dot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \sin \theta) \cdot \bar{y}_0 - D \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{z}_3 \right) \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{y}_0 + \frac{1}{2} m_3 \cdot (\dot{x} \cdot \bar{x}_0 - r \cdot \dot{\theta} \cdot \bar{z}_3) \cdot \dot{x} \cdot \bar{x}_0 \\ &= \frac{1}{2} B \cdot \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} B \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2 - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

Le Théorème de l'Énergie Cinétique donne donc :

$$\begin{aligned} J_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + m_2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + B \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + m_3 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \left(\ddot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + \dot{x} \cdot (\ddot{\theta} \cdot \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta) \right) = \\ m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta + C_{m1} \cdot \dot{\varphi} - f_1 \cdot \dot{\varphi}^2 - f_2 \cdot \dot{x}^2 + (C_{m3} + K_{\text{tors}} \cdot \theta + C_0 - f_3 \cdot \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta} \end{aligned}$$

Remarque :

Le Théorème du Moment Dynamique appliqué à (3) et projeté sur (A, \bar{y}_0) donne :

$$\sum \vec{M}(A, ext \rightarrow 3) \cdot \bar{y}_0 = \bar{\delta}_A(3/0) \cdot \bar{y}_0$$

$$\Leftrightarrow m_3 \cdot g \cdot r \cdot \cos \theta + C_{m3} + K_{\text{tors}} \cdot \theta + C_0 - f_3 \cdot \dot{\theta} = B \cdot \ddot{\theta} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{x} \cdot \sin \theta \quad (\text{cf illustration dynamique des solides})$$

Cette équation permet de simplifier la précédente :

$$J_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} + m_2 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + B \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + m_3 \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \left(\ddot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta + \dot{x} \cdot (\ddot{\theta} \cdot \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta) \right) =$$

$$m_3 \cdot g \cdot r \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta + C_{m1} \cdot \dot{\varphi} - f_1 \cdot \dot{\varphi}^2 - f_2 \cdot \dot{x}^2 + \left(C_{m3} + K_{tors} \cdot \theta + C_0 - f_3 \cdot \dot{\theta} \right) \cdot \dot{\theta}$$

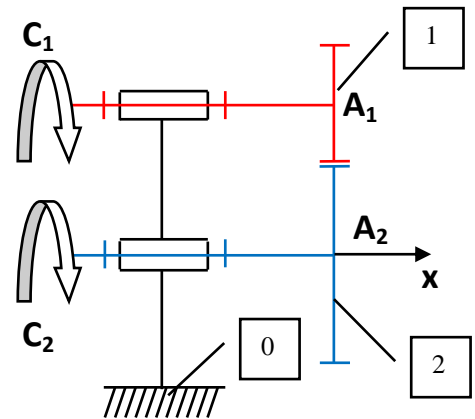
Et avec $\dot{\varphi} = -\frac{2\pi}{P_a} \cdot \dot{x}$, on retrouve l'équation de mouvement trouvée en dynamique des solides :

$$J_1 \left(\frac{2\pi}{P_a} \right)^2 \cdot \ddot{x} + (m_2 + m_3) \cdot \ddot{x} - m_3 \cdot r \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin \theta - m_3 \cdot r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos \theta = C_{m1} \cdot \left(-\frac{2\pi}{P_a} \right) \dot{x} - f_1 \cdot \left(\frac{2\pi}{P_a} \cdot \dot{x} \right)^2 - f_2 \cdot \dot{x}^2$$

3.4 – Moment d'inertie d'un système rapporté à un axe :

Soit un réducteur de vitesse à roues dentées de rapport $\omega_2/\omega_1 = k$ avec C_i couple exercé par l'extérieur sur i .

Notation : soit $I_{1/(A_1, \vec{x})}$ le moment d'inertie de 1 par rapport à l'axe (A_1, x) .



$$T_{(1+2/0)} = T_{(1/0)} + T_{(2/0)} = \frac{1}{2} I_{1/(A_1, \vec{x})} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_{2/(A_2, \vec{x})} \cdot \omega_2^2$$

$$T_{(1+2/0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{I_{1/(A_1, \vec{x})}}{k^2} + I_{2/(A_2, \vec{x})} \right] \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left[I_{1+2/(A_2, \vec{x})} \right] \cdot \omega_2^2$$

avec $I_{1+2/(A_2, \vec{x})}$ appelé moment d'inertie de (1 + 2) (ou équivalent à (1 + 2)) par rapport à (A_2, x) ou rapporté sur l'axe (A_2, x)

Méthode : écrire la somme des énergies cinétiques et factoriser avec la vitesse correspondante.

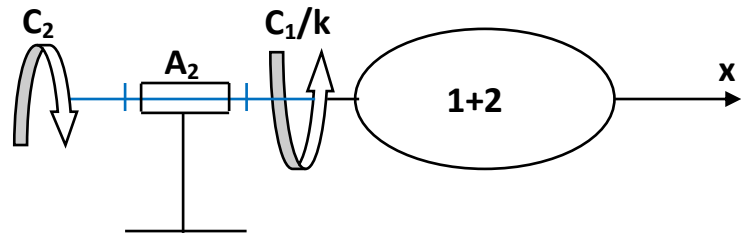
Le TEC appliqué à (1+2), si les liaisons sont parfaites donne :

$$C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 = \left[\frac{I_{1/(A_1, \vec{x})}}{k^2} + I_{2/(A_2, \vec{x})} \right] \cdot \omega_2 \cdot \dot{\omega}_2 \quad \text{et donc}$$

$$C_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + C_2 = \left[\frac{I_{1/(A_1, \vec{x})}}{k^2} + I_{2/(A_2, \vec{x})} \right] \cdot \dot{\omega}_2$$

Ainsi : $C_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{C_1}{k}$ est appelé couple C_1 ramené sur l'axe (A_2, x)

Le modèle associé est alors le suivant (avec les couples de signes opposés, $k < 0$) :

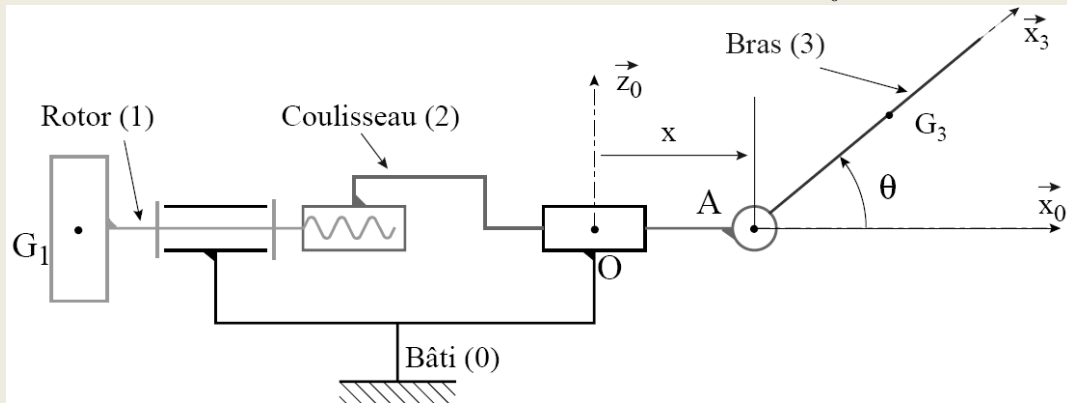


Application au système vis-écrou :

$$J_{\text{eq/axe pivot}} = J_{\text{vis}} + M_{\text{écrou}} \cdot p^2/4\pi^2$$

$$\text{ou } M_{\text{eq}} = J_{\text{vis}} \cdot 4\pi^2/p^2 + M_{\text{écrou}}$$

Détermination du moment d'inertie équivalent de (1+2+3) sur l'axe (O, \vec{x}_0)



Ce système comportant 2 mobilités (φ, θ) , nous supposons que $\theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$.

Nous avons calculé précédemment l'énergie cinétique de l'ensemble (1+2+3) :

$$T(1+2+3/0) = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} B \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2 - m_3 \cdot r \cdot \dot{x} \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta$$

$$\text{Avec } \theta = \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 : \quad T(1+2+3/0) = \frac{1}{2} J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \dot{x}^2$$

$$\text{Or } \dot{x} = -\frac{p_a}{2\pi} \cdot \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } T(1+2+3/0) &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \left(\frac{p_a}{2\pi}\right)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_3 \cdot \left(\frac{p_a}{2\pi}\right)^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(J_1 + m_2 \cdot \left(\frac{p_a}{2\pi}\right)^2 + m_3 \cdot \left(\frac{p_a}{2\pi}\right)^2 \right) \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{eq}(1+2+3)/(O, \vec{x}_0)} \cdot \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

4 – Notion de rendement :

4.1 – Définitions :

* Le rendement mécanique d'un mécanisme est donné par : $\eta(t) = \frac{|P_{\text{réceptrice}}|}{P_{\text{motrice}}}$ $0 \leq \eta(t) \leq 1$

* $P_{\text{motrice}} = P_m =$ puissance reçue par le système $P_m \geq 0$

un moteur exerce une puissance motrice si le couple a le même signe que ω et la pesanteur si le centre de gravité descend.

* $P_{\text{dissipée}} = P_d =$ puissance perdue sous forme de chaleur $P_d \leq 0$

forces de frottement dans les liaisons par exemple

* $P_{\text{réceptrice}} = P_r =$ puissance donnée par le système sous une forme autre que la chaleur $P_r \leq 0$

puissance de la pesanteur si le centre de gravité monte ou puissance d'un moteur si le couple et ω sont de signe contraire ("frein-moteur").

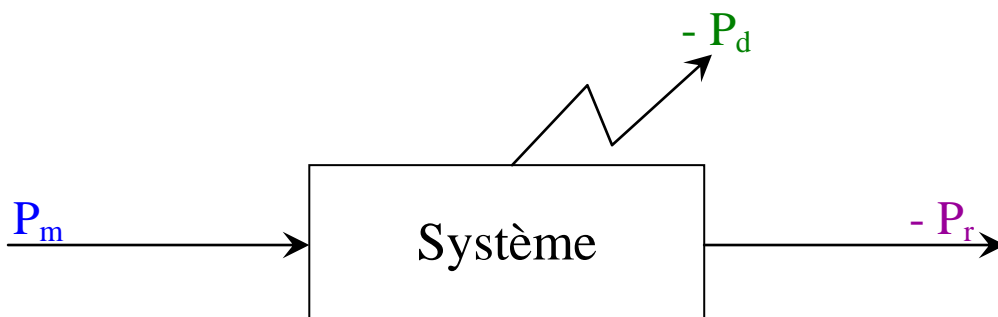
4.2 – Calcul du rendement d'un ensemble E de solides en mouvement / R_g :

théorème de l'énergie cinétique : $\frac{d}{dt} T(E/R_0) = P_m + P_d + P_r$

soit $P_m + P_d + P_r - \frac{dT}{dt} = 0$ ($-\frac{dT}{dt}$ est considéré comme une puissance)

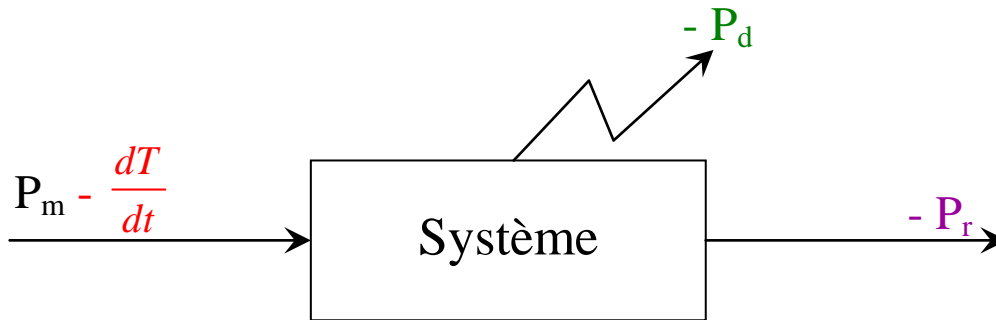
$$\text{1^{er} cas:} \quad \frac{dT}{dt} = 0 \quad \eta = \frac{|P_r|}{P_m}$$

Si la variation d'énergie cinétique est nulle, le système est en régime stationnaire et c'est dans ce cas de figure que sont toujours calculés les rendements aux concours ...



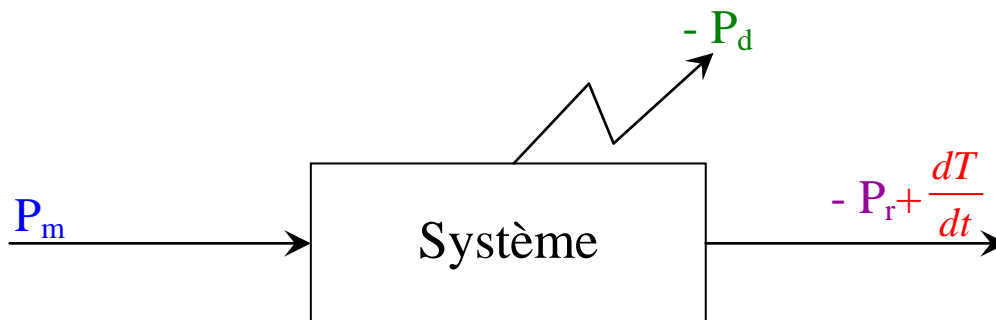
$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ cas:}} \quad \frac{dT}{dt} < 0 \quad \eta = \frac{|P_r|}{P_m - \frac{dT}{dt}} \quad (\text{hors programme})$$

Si la variation d'énergie cinétique est négative, cela signifie que le système restitue de l'énergie précédemment accumulée pour satisfaire le besoin demandé (en sortie). Cette variation d'énergie peut donc être considérée comme une puissance motrice.



$$\underline{3^{\text{ème}} \text{ cas:}} \quad \frac{dT}{dt} > 0 \quad \eta = \frac{|P_r| + \frac{dT}{dt}}{P_m} \quad (\text{hors programme})$$

Si la variation d'énergie cinétique est positive, cela signifie que le système accumule de l'énergie ; cette énergie n'est pas perdue puisqu'elle est stockée ! Cette variation d'énergie peut donc être considérée comme une puissance reçue.



Remarques :

Le rendement dépend en général du temps ; on calcule donc un rendement moyen pour les mouvements cycliques.

Si toute la puissance est dissipée sous forme de chaleur, le rendement est nul (frein).