Problème N°1 : imagerie interventionnelle (extrait ccp mp 2017)

Q1. La condition de roulement sans glissement au point I_D entre la roue et le sol s'écrit :

$\vec{V}_{roue/R_0}(I_D) = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{roue/R_0} \cdot \vec{y}_p \neq \vec{0}$

$\vec{V}_{roue/R_0}(I_D) = \vec{V}_{roue/R_0}(A) + \overrightarrow{I_D A} \wedge \overrightarrow{\Omega(roue/R_0)}$

$\vec{V}_{roue/R_0}(I_D) = \vec{V}_{roue/cadre}(A) + \vec{V}_{cadre/R_0}(A) + \overrightarrow{I_D A} \wedge \overrightarrow{\Omega(roue/R_0)}$

$\vec{V}_{cadre/R_0}(A) = -\overrightarrow{I_D A} \wedge \overrightarrow{\Omega(roue/R_0)} = -r\vec{z}_0 \wedge (\dot{\beta}\vec{z}_0 + \dot{\theta}_D \vec{y}_p)$

$\boxed{\vec{V}_{cadre/R_0}(A) = r\dot{\theta}_D \vec{x}_p}$

Q2. $\overrightarrow{I_c A} = a\vec{y}_c + \frac{e}{2}\vec{x}_c$ $\qquad \overrightarrow{I_c A} . \vec{V}_{cadre/R_0}(A) = 0$

$(a\vec{y}_c + \frac{e}{2}\vec{x}_c).r\dot{\theta}_D \vec{x}_p = 0$ $\qquad ra\sin\beta\,\dot{\theta}_D + r\frac{e}{2}\cos\beta\,\dot{\theta}_D = 0$ $\qquad \tan\beta = -\frac{e}{2a}$

Application numérique : $\tan\beta = -\frac{800}{2*1440}$ $\quad$ β= $-15{,}524°$

Q3. D'après la question précédente, on a : $a = -\frac{e}{2*\tan\beta}$, on en déduit :

$$a_{max} = -\frac{e}{2*\tan\beta_{min}} = -\frac{800}{2*\tan(-15{,}523)} = 1440{,}1\ mm$$

$$a_{min} = -\frac{e}{2*\tan\beta_{max}} = -\frac{800}{2*\tan(-15{,}525)} = 1439.9\ mm$$

<u>L'erreur de positionnement est donc de ±0.1 mm < ±5 mm, l'exigence Id1121 est respectée</u>

Q4.
```
def position_odometrie(delta_d,delta_g,p0):
    angle=p0[2]+(delta_d-delta_g)*r/(2*e)
    milieu=r*(delta_g+delta_p)/2
    return np.array([p0[0]+milieu*cos(angle),p0[1]+milieu*sin(angle),angle])
```

Q5.
```
def calcul_sigma_2(mat_sigmap,mat_jacob):
    return np.dot(np.dot(mat_jacob,mat_sigmap),np.transpose(mat_jacob))
```

Q6. D'après la figure 9, on a : $\begin{cases} x_i = x + r_i.\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) \\ y_i = y + r_i.\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) \end{cases}$

On a donc :

$r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$

$\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \theta + \text{atan}\left(\frac{y_i - y}{x_i - y}\right)$ si $x_i \neq x$

$\varphi_i = \pi - \theta$ si $x_i = x$ et si $y_i > y$)

$\varphi_i = -\theta$ si $x_i = x$ et $y_i < y$

On suppose qu'il n'y a jamais $x_i = x$ et $y_i = y$ en même temps.
```
def global_local(xi,yi,p1):
    ri=sqrt((xi-p1[0])**2+(yi-p1[1])**2)
    theta=p1[2]
    if p1[0]==xi: #x=xi
        if yi>p1[1]:
            phii=pi-theta
        else:
            phii=-theta
    else: #y différent de yi
       phii=pi/2-theta+atan((yi-p1[1])/(xi-p1[0]))
    return ri,phii
```

Q7.
```
def prediction(p1,cible_map):
    n=cible_map.shape[0]   #nombre de ligne de cible_map (12 dans le sujet)
    zpred=np.zeros((n,2)) #pour créer un tableau, valeurs initiales sans signification
    for i in range(n):
        zpred[i,:]=global_local(cible_map[i,0],cible_map[i,1],p1)
    return zpred
```

Q8. $d_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_j\cos\varphi_j - \varphi_i)}$

$d_{ij} = \|\overrightarrow{C_iC_j}\| = \sqrt{\overrightarrow{C_iC_j}^2} = \sqrt{(\overrightarrow{PC_j} - \overrightarrow{PC_i})^2} = \sqrt{r_j^2 + r_i^2 - 2.r_i.r_j.\cos(\varphi_j - \varphi_i)}$

Q9.
```
def comparaisonQ23(zj,zpred):
    n=zpred.shape[0]
    # chercher le min des distances ou des carrés revient au même
    mini=zj[0]**2+zpred[0,0]**2-2*zpred[0,0]*zj[0]*cos(zpred[0,1]-zj[1])
    proche=0
    for i in range(1,n):
        distance=zj[0]**2+zpred[i,0]**2-2*zpred[i,0]*zj[0]*cos(zpred[i,1]-
zj[1])
        if distance<mini:
            mini=distance
            proche=i
    return zpred[proche,:]
```

Q10.
```
def comparaisonQ24(zj,zpred):
    n=zpred.shape[0]
    # chercher le min des distances ou des carrés revient au même
    mini=zj[0]**2+zpred[0,0]**2-2*zpred[0,0]*zj[0]*cos(zpred[0,1]-zj[1])
    proche=0
    for i in range(1,n):
        distance=zj[0]**2+zpred[i,0]**2-2*zpred[i,0]*zj[0]*cos(zpred[i,1]-
zj[1])
        if distance<mini:
            mini=distance
            proche=i
    if mini<=dmax**2: #d est en fait un carré
        return np.array(zj[0]-zpred[proche,0],zj[1]-zpred[proche,1])
```

Q11. On isole Σ, le bilan des actions mécaniques extérieures est donné dans l'énoncé, on applique le principe fondamental de dynamique à Σ dans son mouvement par rapport à 0 supposé galiléen et on écrit le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{x}$: $\boxed{m_\Sigma \gamma = X_{01}}$

Q12. On isole la roue 1, on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de 3 sur 1 par l'intermédiaire d'une liaison pivot d'axe $A,\vec{x}$: $\overrightarrow{M_{A,3\to1}}.\vec{y} = 0$
- Couple de freinage : $-C_f\,\vec{y}$
- Action de 0 sur 1 : $\overrightarrow{M_{A,0\to1}}.\vec{y} = +r.X_{01}$

On applique le principe fondamental de dynamique à Σ dans son mouvement par rapport à 0 supposé galiléen et on écrit le théorème du moment dynamique en A en projection sur $\vec{y}$.

Moment dynamique $\overrightarrow{\delta_{A,1/0}} = J\ddot{\theta}\vec{y}$

On en déduit : $J\ddot{\theta} = -C_f + r.X_{01}$ $\quad -\frac{J\gamma}{r} = -C_f + r.m_\Sigma\gamma$ $\boxed{C_f = \left(\frac{J}{r} + r.m_\Sigma\right)\gamma}$

Q13. J est négligeable devant $m_\Sigma r^2$ donc $\frac{J}{r}$ est négligeable devant $r.m_\Sigma$, ce qui donne : $\boxed{C_f = (r.m_\Sigma)\gamma}$

Q14. Hypothèse : on néglige les moments d'inertie des roues, ainsi Σ est en translation.

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{I_2,\Sigma/0}} = \underbrace{\overrightarrow{\delta_{G,\Sigma/0}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{I_2G} \wedge m_\Sigma \overrightarrow{\Gamma_{G\in\Sigma/0}} = -z_g.m_\Sigma.\gamma.\vec{y}}$$

Q15. On isole Σ, le bilan des actions mécaniques extérieures est donné, le théorème du moment dynamique en I_2 projeté sur $\vec{y}$ donne :

$$\boxed{-z_g.m_\Sigma.\gamma = -(l - x_g)m_\Sigma.g + Z_{01}.l + 0}$$

$\frac{-z_g.m_\Sigma.\gamma + (l - x_g)m_\Sigma.g}{l} = Z_{01}$ (pour question 30)

À la limite du basculement, on a $Z_{01} = 0$ (rupture du contact en I_1), on en déduit :

$$\boxed{\gamma_{NB,1} = \frac{(l - x_g)g}{z_g} = \frac{(1 - 0.45)9.81}{0.95}} = 5{,}68\ m.s^{-2}$$

Q16. À la limite du glissement en I_1, $X_{01} = -\mu.Z_{01}$ ce qui donne en reprenant les résultats des question 25 et 29 :

$$m_\Sigma \gamma_{NG,1} = \mu\left(\frac{-z_g.m_\Sigma.\gamma_{NG,1} + (l - x_g)m_\Sigma.g}{l}\right)$$

$$\boxed{\gamma_{NG,1} = \frac{\mu(l - x_g)}{l - z_g.\mu} = 0{,}5.\frac{(1 - 0.45)}{1 - 0{,}95.0{,}5} = 5{,}13\ m.s^{-2}}$$

Q17. Pour ne pas avoir de basculement ou de glissement dans les deux sens, il faut limiter la décélération à $4{,}5\ m.s^{-2}$.