

Problème N°3 : Stabilisateur gyroscopique (extraite Mines mp 2022)

Q1 :

Situation	Zone d'affichage	Bouton ON/OFF	Bouton STAB	Barre de progression visible
S1	Courbe	Gris	Caché	Non
S2	Courbe	Bleu	Caché	Oui
S3	Courbe	Bleu	Gris	Oui
S4	Courbe	Bleu	Bleu	Oui
S5	Courbe	Bleu	Gris	Non
S6	Cadran	Bleu	Bleu	Non
S7	Cadran	Gris	Caché	Non

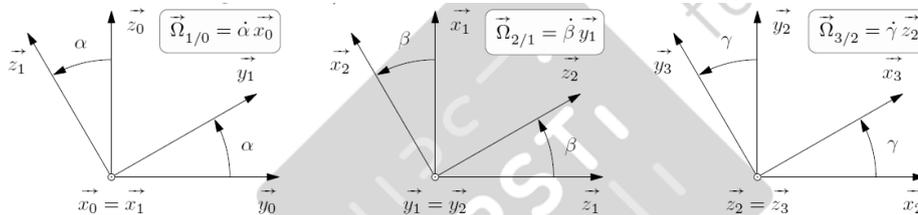
Il est impossible d'appuyer sur le bouton STAB lorsque celui-ci est caché :



Q2 :

Repère	Constituants du schéma-blocs	Repère	Constituants du schéma-blocs
1	contrôleur électronique	4	structure articulée
2	servo-distributeur	5	dynamique du bateau
3	vérins	6	centrale inertielle

Q3 :



$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\gamma} \vec{z}_2 + \dot{\beta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{x}_1$$

En projection : $\vec{x}_1 = \cos \beta \vec{x}_2 + \sin \beta \vec{z}_2$

D'où : $\vec{\Omega}_{3/0} = \dot{\alpha} \cos \beta \vec{x}_2 + \dot{\beta} \vec{y}_2 + (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \vec{z}_2$

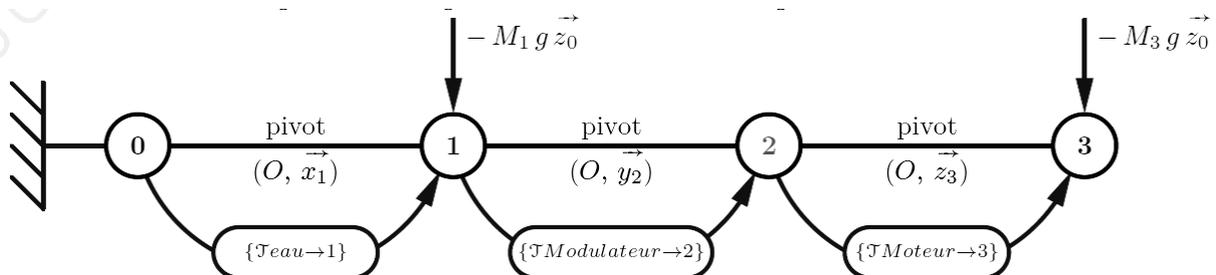
Q4 :

Le volant d'inertie possède un axe de symétrie de révolution : (O, \vec{z}_3) . Par conséquent :

- il possède 2 plans de symétrie différents, la matrice est donc diagonale.
- $\int_{S_3} x^2 dm = \int_{S_3} y^2 dm$ par symétrie et donc $A_3 = \int_{S_3} (y^2 + z^2) dm = \int_{S_3} (x^2 + z^2) dm = B_3$.

D'où une matrice en O de la forme : $[I(O, 3)] = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(-, -, \vec{z}_3)}$

Q5 :



Q6 :

On isole l'ensemble $\{2+3\}$ (moteur inclus). Le B.A.M.E. donne :

$$\begin{aligned} \bullet \{ \mathcal{T}_{Modulateur \rightarrow 2} \} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_h(t) \\ C_h(t) \vec{y}_2 \end{array} \right\}_O \\ \bullet \{ \mathcal{T}_{pes \rightarrow 3} \} &= \left\{ \begin{array}{c} -M_3 g \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_O \\ \bullet \{ \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \} &= \left\{ \begin{array}{cc} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & N_{12} \end{array} \right\}_{\forall P \in (O, \vec{y}_2), (-, \vec{y}_2, -)} \end{aligned}$$

On choisit d'appliquer le **PFD au point O** (pour ne déplacer aucun torseurs) **en moment projeté sur \vec{y}_2** pour ne faire apparaître aucune des inconnues de $\{ \mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} \}$.

Calcul du moment dynamique en O :

$$\overrightarrow{\delta_{\{2,3\}/0}}(O) = \overrightarrow{\delta_{3/0}}(O) \text{ car les masses et inerties de la pièce 2 sont négligées.}$$

$$\overrightarrow{\delta_{3/0}}(O) = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \right|_0 \text{ car O est le centre d'inertie de 3.}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) = [I(O, 3)] \cdot \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{B_2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_3 \dot{\alpha} \cos \beta \\ A_3 \dot{\beta} \\ C_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \end{pmatrix}_{B_2}$$

Par dérivation du produit $\left. \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \cdot \vec{y}_2) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \right|_0 \cdot \vec{y}_2 + \overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \cdot \left. \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right|_0$ d'où :

$$\overrightarrow{\delta_{3/0}}(O) \cdot \vec{y}_2 = \left. \frac{d}{dt} \overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \right|_0 \cdot \vec{y}_2 = \left. \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \cdot \vec{y}_2) \right|_0 - \overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \cdot \left. \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right|_0$$

$$\text{On a d'une part : } \left. \frac{d}{dt} (\overrightarrow{\sigma_{3/0}}(O) \cdot \vec{y}_2) \right|_0 = \left. \frac{d}{dt} (A_3 \dot{\beta}) \right|_0 = A_3 \ddot{\beta}$$

$$\text{et d'autre part : } \left. \frac{d}{dt} \vec{y}_2 \right|_0 = \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \vec{y}_2 = (\dot{\beta} \vec{y}_2 + \dot{\alpha} \vec{x}_1) \wedge \vec{y}_2 = \dot{\alpha} \vec{z}_1 = \dot{\alpha} (\cos \beta \vec{z}_2 - \sin \beta \vec{x}_2)$$

Application du TMD en O projeté sur \vec{y}_2 :

$$\overrightarrow{\delta_{3/0}}(O) \cdot \vec{y}_2 = C_h(t) = A_3 \ddot{\beta} + A_3 \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \dot{\alpha} \cos \beta$$

$$\text{d'où : } \boxed{C_h(t) = A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta - C_3 \dot{\gamma} \dot{\alpha} \cos \beta}$$

Q7 :

Lorsque $\beta \rightarrow 0$, on a à l'ordre 1 : $\sin \beta \rightarrow \beta$ et $\cos \beta \rightarrow 1$, d'où :

$$A_3 \ddot{\beta} + (A_3 - C_3) \dot{\alpha}^2 \beta - C_3 \dot{\gamma} \dot{\alpha} = C_h(t)$$

De plus, $\dot{\gamma} = \omega_m \gg \dot{\alpha}$ (approximation gyroscopique) donc on néglige le terme en $\dot{\alpha}^2 \beta$ devant celui en $\dot{\gamma} \dot{\alpha}$.

$$\text{D'où : } \boxed{A_3 \ddot{\beta} = C_h(t) + C_3 \omega_m \dot{\alpha}}. \text{ On identifie } \boxed{I_g = A_3}$$

Q8 :

Dans les conditions de Heaviside, on a :

$$\text{(eq1)} \Rightarrow I_g p^2 \beta(p) = C_h(p) + C_3 \omega_m p \alpha(p)$$

$$\text{(eq2)} \Rightarrow I_b p^2 \alpha(p) = C_{mes}(p) - f_b p \alpha(p) - k_b \alpha(p) - C_3 \omega_m p \beta(p)$$

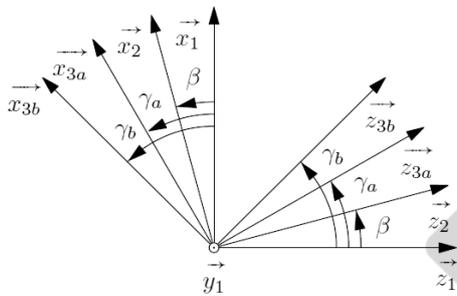
d'où, avec $C_h(p) = 0$, (eq1) dans (eq2) donne :

$$\alpha(p) \left(I_b p^2 + f_b p + k_b + C_3 \omega_m p \frac{C_3 \omega_m p}{I_g p^2} \right) = C_{mes}(p)$$

$$\text{soit } \boxed{H(p) = \frac{\alpha(p)}{C_m(p)} = \frac{1}{\left(k_b + \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} \right) + f_b p + I_b p^2}} \text{ On identifie : } \begin{cases} K = k_b + \frac{C_3^2 \omega_m^2}{I_g} \\ A = f_b \\ B = I_b \end{cases}$$

Ce système est **stable** car c'est un **système d'ordre 2 à coefficients positifs** (critère de Routh simplifié).

Q9 :



On a la fermeture : $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

soit $e\vec{z}_2 - \lambda_a\vec{x}_{3a} = -L\vec{x}_1 + d\vec{z}_1$

or $\vec{z}_2 = \cos\beta\vec{z}_1 + \sin\beta\vec{x}_1$ et $\vec{x}_{3a} = \cos\gamma_a\vec{x}_1 - \sin\gamma_a\vec{z}_1$

d'où en projection sur (\vec{x}_1, \vec{z}_1) :

$$\begin{cases} e\sin\beta - \lambda_a\cos\gamma_a = -L & (1) \\ e\cos\beta + \lambda_a\sin\gamma_a = d & (2) \end{cases}$$

On isole : $\lambda_a^2(\cos^2\gamma_a + \sin^2\gamma_a) = (e\sin\beta + L)^2 + (d - e\cos\beta)^2$

soit $\lambda_a = +\sqrt{(e\sin\beta + L)^2 + (d - e\cos\beta)^2}$ car $\lambda_a > 0$.

De plus, (1) $\Rightarrow \lambda_a = \frac{e\sin\beta + L}{\cos\gamma_a}$, soit en réintégrant dans (2) : $e\cos\beta + (e\sin\beta + L)\tan\gamma_a = d$ d'où :

$$\gamma_a = \arctan\left(\frac{d - e\cos\beta}{e\sin\beta + L}\right)$$

Q10 :

La pesanteur étant négligée, le vérin {3a,4a} est soumis à 2 glisseurs : $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3a}\} = \begin{Bmatrix} X_{23a} & - \\ - & 0 \\ Z_{23a} & - \end{Bmatrix}_{A,(-,\vec{y}_1,-)}$ et

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 4a}\} = \begin{Bmatrix} X_{14a} & - \\ - & 0 \\ Z_{14a} & - \end{Bmatrix}_{B,(-,\vec{y}_1,-)}$$

En effet, en modélisation plane de normale \vec{y}_1 , les actions mécaniques des pivots d'axe (P, \vec{y}_1) sont des glisseurs.

On note $\vec{F}_{23a} = X_{23a}\vec{x}_1 + Z_{23a}\vec{z}_1$

En déplaçant le torseur au point B, on obtient : $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 3a}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{23a} \\ \vec{BA} \wedge \vec{F}_{23a} \end{array} \right\}_B$

On néglige les effets dynamiques, le théorème du moment statique en B donne donc : $\vec{BA} \wedge \vec{F}_{23a} = \vec{0}$

On en déduit que \vec{F}_{23a} est porté par le vecteur directeur de $\vec{BA} = \lambda_a\vec{x}_{3a}$ et $\vec{F}_a = -\vec{F}_{23a}$ (actions réciproques)

également : $\vec{F}_a = F_a\vec{x}_{3a}$

Q11 :

La pièce 2 est soumise à :

- $\{\mathcal{T}_{3a \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_a \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$
- $\{\mathcal{T}_{3b \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_b \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
- la liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1) avec 1.

La somme \vec{C}_h de ces moments en O vaut :

$\vec{C}_h = \vec{OA} \wedge \vec{F}_a + \vec{OC} \wedge \vec{F}_b = e\vec{z}_2 \wedge F_a\vec{x}_{3a} + (-e\vec{z}_2) \wedge F_b\vec{x}_{3b} = (eF_a \sin(\pi/2 + (\gamma_a - \beta)) - eF_b \sin(\pi/2 + (\gamma_b - \beta)))\vec{y}_1$

d'où : $C_h = e(F_a \cos(\gamma_a - \beta) - F_b \cos(\gamma_b - \beta))$

Remarque : F_a et F_b sont de signes opposés.

Q12 :

L'angle γ_a reste très faible devant β sur toute la plage de variation de ce dernier (visiblement inférieur à 0.1rad).

D'où : $\beta \gg \gamma_a$.

De même $\beta \gg \gamma_b$, ainsi : $C_h = e\cos\beta(F_a - F_b)$

Q13 :

Dans les conditions de Heaviside, on a :

$$\begin{cases} \text{eq3} \Rightarrow Q(p) = Se\Omega_\beta(p) + \frac{V_0}{2BSe}pC_h(p) \\ \text{eq1} \Rightarrow I_g p^2 \beta(p) = C_h(p) + C_3 \omega_m \Omega_\alpha(p) \\ \text{eq2} \Rightarrow (I_b p^2 + f_p p + k_b) \alpha(p) = C_{mer}(p) - C_3 \omega_m \Omega_\beta(p) \end{cases}$$

$$\text{eq3} \Rightarrow C_h(p) = \underbrace{\frac{2BSe}{pV_0}}_{H_1(p)} (Q(p) - \underbrace{Se}_{H_6(p)} \Omega_\beta(p))$$

$$\text{eq1} \Rightarrow \Omega_\beta(p) (= p\beta(p)) = \underbrace{\frac{1}{I_g p}}_{H_2(p)} (C_h(p) + \underbrace{C_3 \omega_m}_{-H_3(p)} \Omega_\alpha(p))$$

$$\text{eq2} \Rightarrow \alpha(p) = \frac{1}{\underbrace{I_b p^2 + f_p p + k_b}_{H_4(p), H_5(p)}} (C_{mer}(p) - \underbrace{C_3 \omega_m}_{-H_3(p)} \Omega_\beta(p)). \text{ Or } H_5(p) \text{ est un intégrateur : } H_5(p) = \frac{1}{p} \text{ ce qui}$$

permet de déduire :

$H_1(p) = \frac{2BSe}{pV_0}$	$H_2(p) = \frac{1}{I_g p}$
$H_3(p) = -C_3 \omega_m$	$H_4(p) = \frac{p}{I_b p^2 + f_p p + k_b}$
$H_5(p) = \frac{1}{p}$	$H_6(p) = Se$

Q14 :

On cherche à identifier la forme suivante issue du schéma-blocs de l'énoncé : $\alpha(p) = H_b(p)(K_{sv}I(p) - H_a C_{mer}(p))$

Par lecture sur le schéma-blocs initial, on obtient :

$$\alpha(p) = H_5 H_4 \left[C_{mer}(p) + H_3 H_2 \left(-H_3 \Omega_\alpha(p) + H_1 (K_{sv} I(p) - H_6 \Omega_\beta(p)) \right) \right]$$

$$\text{Or, } \Omega_\alpha(p) = \frac{\alpha(p)}{H_5} \text{ et } (\Omega_\beta(p) H_3 + C_{mer}(p)) H_4 H_5 = \alpha(p), \text{ soit } \Omega_\beta(p) = \left(\frac{\alpha(p)}{H_4 H_5} - C_{mer}(p) \right) \frac{1}{H_3}$$

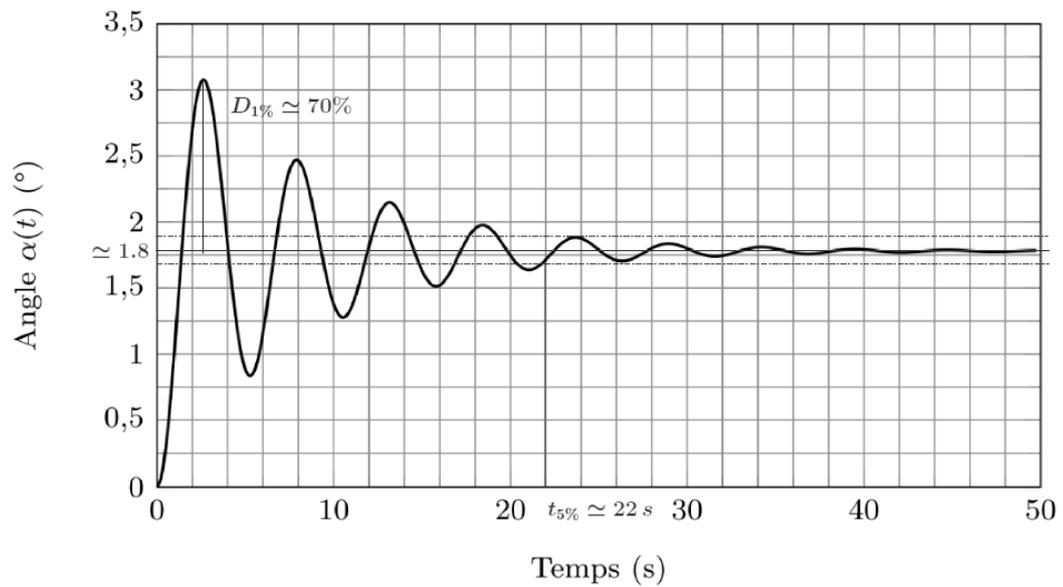
$$\begin{aligned} \text{d'où : } \alpha(p) &= C_{mer}(p) \left(H_4 H_5 + \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6}{H_3} \right) + I(p) (H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 K_{sv}) \\ &+ \alpha(p) \left(-\frac{H_2 H_3^2 H_4 H_5}{H_5} - \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5 H_6}{H_3 H_4 H_5} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Après une factorisation en } \alpha(p), \text{ on identifie : } H_b = \frac{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6}$$

$$\text{et } H_b H_a = -\frac{H_4 H_5 + H_1 H_2 H_4 H_5 H_6}{1 + H_2 H_3^2 H_4 + H_1 H_2 H_6} = H_b \left(-\frac{H_4 H_5 (1 + H_1 H_2 H_6)}{H_1 H_2 H_3 H_4 H_5} \right)$$

$$\text{d'où : } H_a = -\frac{1 + H_1 H_2 H_6}{H_1 H_2 H_3}$$

Q15 :



On propose un modèle d'ordre 2 (présence de dépassements) : $H_b(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

$$K = \frac{\alpha(\infty)}{i(0)} = \frac{1.8}{1}, \quad \boxed{K = 1.8^\circ \cdot A^{-1}}$$

$$D_{1\%} = \frac{3.1 - 1.8}{1.8} \simeq 70\%. \quad \text{On lit sur l'abaque 2 que ce dépassement correspond à } \boxed{\xi = 0.1}.$$

On lit $t_{5\%} \simeq 22$ s. Or $\xi = 0.1$ donc l'abaque 1 donne : $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 30$, soit $\omega_0 \simeq 1.4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$