

Exercice 1 : moments d'inertie et matrices d'inertie élémentaires

Q1 : $I(O, \vec{z}) = m \frac{R^2}{2}$

Q2 : $I(O) = \frac{3}{5} m \frac{R^2}{2}$ et $I(O, \vec{z}) = \frac{2}{5} m \frac{R^2}{2}$

Q3 :
$$\begin{pmatrix} m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) & 0 & 0 \\ 0 & m(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}) & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Q4 :
$$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Exercice 2 : matrice d'inertie d'un vilebrequin

Q1 : $I(G_1, \vec{z}) = m_1 \frac{R_1^2}{2} + m_2 \frac{R_2^2}{2} + m_2 \frac{a_2^2}{2} + m_3 \frac{R_3^2}{2} + m_3 \frac{a_3^2}{2}$

Q2 : $I(G_1) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & I(G_1, \vec{z}) \end{bmatrix}$

avec $A = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 \frac{c_2^2}{2} + m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} \right) + m_3 \frac{c_3^2}{2}$

et $B = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{a_2^2}{2} + \frac{c_2^2}{2} \right) + m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} \right) + m_3 \left(\frac{a_3^2}{2} + \frac{c_3^2}{2} \right)$

et $E = m_2 a_2 c_2 + m_3 a_3 c_3$

Exercice 3 : inertie du robot de chirurgie mini-invasive (extrait E3a MP 2019)

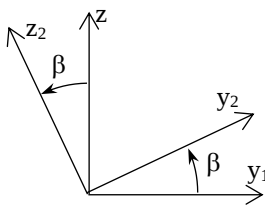
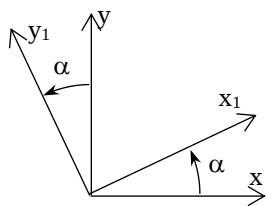
Q1 : Le modèle géométrique présentée fait apparaitre un plan de symétrie : Le plan $(O_1; \vec{z}_1, \vec{x}_1)$. Les produits d'inertie $-D = \iint y \cdot z \cdot dm$ et $-F = \iint x \cdot y \cdot dm$ sont donc nuls.

Q2 : Juste une lecture de la matrice : $J_1 = 8400 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

Q3 : Les dimensions du moteur sont petites devant la distance du centre de masse G_{M2} à l'axe de rotation.

Q4 : $J_{M2} = m_{M2} \cdot x_{1M2}^2 = 0,6 \times (211)^2 = 26700 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$

Q5 : Inertie max : A Inertie mini : F

Exercice 4 : calculs d'éléments dynamiques d'une éolienne domestique

$$\vec{\Omega}(1/R) = \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta} \vec{x}_1$$

Q1 : torseur cinématique de 1/R :
$$V_{(1/R)} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

torseur cinématique de 2+3/R :
$$V_{(2+3/R)} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/R) = \vec{\Omega}(3/R) \\ \vec{V}(P \in 2/R) = \vec{V}(P \in 3/R) \end{Bmatrix}_P$$

$$\vec{\Omega}(2/R) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/R) = \dot{\beta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}$$

$$\vec{V}(P \in 2/R) = \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a\vec{x}_1 + b\vec{z}_2)}{dt} \right]_R \text{ avec } \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_R = \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{R_2} + \vec{\Omega}(2/R) \wedge \vec{z}_2 = (\dot{\beta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z}) \wedge \vec{z}_2$$

soit
$$V_{(2+3/R)} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \vec{z} + \dot{\beta} \vec{x}_1 \\ a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 - b \dot{\beta} \vec{y}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{Q2} : \vec{\sigma}_O(1/R) = \mathbb{I}_O(1) \cdot \vec{\Omega}(1/R) \quad \text{avec} \quad \mathbb{I}_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & I \end{pmatrix}_{R_1} \quad \text{soit} \quad \vec{\sigma}_O(1/R) = \dot{\alpha} (-E_1 \vec{x}_1 + I \vec{z})$$

donc $\boxed{\vec{\sigma}_O(1/R) \cdot \vec{z} = I \dot{\alpha}}$

$$\mathbf{Q3} : \mathbf{C}_{(2/R)} = \begin{Bmatrix} M \vec{V}(G \in 2/R) \\ \vec{\sigma}_O(2/R) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{V}(G \in 2/R) = \left[\frac{d\vec{OG}}{dt} \right]_{R_1} = \left[\frac{d(a\vec{x}_1)}{dt} \right]_{R_1} = a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

$$\vec{\sigma}_O(2/R) = \vec{\sigma}_G(2/R) + \vec{OG} \wedge M \vec{V}(G \in 2/R) = \mathbb{I}_G(2) \cdot \vec{\Omega}(2/R) + a \vec{x}_1 \wedge M a \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

La matrice de 2 étant exprimée dans la base R_2 , on doit projeter $\vec{\Omega}(2/R)$ sur cette même base :

$$\dot{\beta} \vec{x}_1 + \dot{\alpha} \vec{z} = \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} (\sin \beta \vec{y}_2 + \cos \beta \vec{z}_2)$$

$$\vec{\sigma}_G(2/R) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix}_{R_2} = A \dot{\beta} \vec{x}_2 + \dot{\alpha} (B \sin \beta \vec{y}_2 + C \cos \beta \vec{z}_2)$$

d'où $\boxed{\mathbf{C}_{(2/R)} = \begin{Bmatrix} M a \dot{\alpha} \vec{y}_1 \\ M a^2 \dot{\alpha} \vec{z} + A \dot{\beta} \vec{x}_1 + B \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 + C \dot{\alpha} \cos \beta \vec{z}_2 \end{Bmatrix}}$

$$\mathbf{C}_{(3/R)} = \begin{Bmatrix} m \vec{V}(P \in 3/R) \\ \vec{\sigma}_O(3/R) \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \vec{\sigma}_O(3/R) = \vec{\sigma}_P(3/R) + \vec{OP} \wedge m \vec{V}(P \in 3/R) \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_P(3/R) = \mathbb{I}_P(3) \cdot \vec{\Omega}(3/R)$$

3 étant une masse ponctuelle, elle est sans dimension donc $\mathbb{I}_P(3)$ est la matrice nulle.

$$\vec{\sigma}_O(3/R) = (a \vec{x}_1 + b \vec{z}_2) \wedge m(a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 - b \dot{\beta} \vec{y}_2)$$

d'où $\boxed{\mathbf{C}_{(3/R)} = \begin{Bmatrix} m(a \dot{\alpha} \vec{y}_1 + b \dot{\alpha} \sin \beta \vec{x}_1 - b \dot{\beta} \vec{y}_2) \\ m[a^2 \dot{\alpha} \vec{z} + b(b \dot{\beta} - a \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{x}_1 + b^2 \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 - a b \dot{\beta} \vec{z}_2] \end{Bmatrix}}$

$$\mathbf{Q4} : \boxed{\vec{\delta}_O(1/R) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt_{1/R}} \vec{\sigma}_O(1/R) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt_{1/R}} (\vec{\sigma}_O(1/R) \cdot \vec{z}) = I \ddot{\alpha}} \quad \text{rotation autour d'un axe fixe}$$

$$\mathbf{Q5} : \vec{\delta}_O(2/R) \cdot \vec{z} = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(2/R)}{dt} \right]_{R_1} \cdot \vec{z} = \frac{d(\vec{\sigma}_O(2/R) \cdot \vec{z})}{dt} \quad \text{car O et } \vec{z} \text{ sont fixes dans R}$$

d'où $\boxed{\vec{\delta}_O(2/R) \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt} [(M a^2 + B \sin^2 \beta + C \cos^2 \beta) \dot{\alpha}]}$

$$\mathbf{Q6} : \vec{\delta}_O(3/R) \cdot \vec{x}_1 = \left[\frac{d\vec{\sigma}_O(3/R)}{dt} \right]_{R_1} \cdot \vec{x}_1 = \frac{d(\vec{\sigma}_O(3/R) \cdot \vec{x}_1)}{dt} - \vec{\sigma}_O(3/R) \cdot \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} \quad (\text{car O fixe dans R mais pas } \vec{x}_1)$$

$$= m b \frac{d}{dt} (b \dot{\beta} - a \dot{\alpha} \cos \beta) - m[a^2 \dot{\alpha} \vec{z} + b(b \dot{\beta} - a \dot{\alpha} \cos \beta) \vec{x}_1 + b^2 \dot{\alpha} \sin \beta \vec{y}_2 - a b \dot{\beta} \vec{z}_2] \cdot \dot{\alpha} \vec{y}_1$$

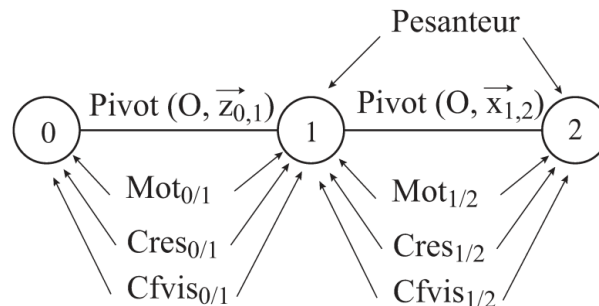
d'où $\boxed{\vec{\delta}_O(3/R) \cdot \vec{x}_1 = m b (b \ddot{\beta} - a \ddot{\alpha} \cos \beta - b \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta)}$

Exercice 6 : équations de Mouvement complexes de la station de mesures topo (extrait Centrale MP 2017)

Q1 : Les deux angles n'étant pas coplanaires, il faut dessiner deux figures de changement de bases.

$$\vec{OP} = D \cdot \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ D \cos \theta \\ D \sin \theta \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -D \cos \theta \sin \varphi \\ D \cos \theta \cos \varphi \\ D \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0} \Rightarrow \vec{OP} = \begin{pmatrix} -D \cos \theta \sin \varphi \\ D \cos \theta \cos \varphi \\ D \sin \theta \end{pmatrix}_{B_0}$$

Q2 :



Q3 :

	Ensemble isolé	Equation scalaire	Justification
(E1)	1 & 2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$	On utilise le fait que le moment en (O sur $(\vec{z}_{0,1})$ est nul dans la liaison pivot entre (0) et (1) (<i>les actions mécaniques dans les pivots n'interviendront pas</i>), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.
(E2)	2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$	On utilise le fait que le moment en (O sur $(\vec{x}_{1,2})$ est nul dans la liaison pivot entre (1) et (2) (<i>les actions mécaniques dans la pivot n'interviendront pas</i>), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.

Q4 :

A) On isole (1 & 2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$:

$$\overrightarrow{\Sigma M_{\text{ext} \rightarrow 1 \cup 2}^O} \cdot \vec{z}_{0,1} = \left(\overrightarrow{\delta_{1/0}^O} + \overrightarrow{\delta_{2/0}^O} \right) \cdot \vec{z}_{0,1}$$

$$0 + 0 + \frac{k_1}{\rho_1} \cdot (c_{m1} + c_{r1} - f_{\text{Eq1}} \cdot \dot{\varphi}) = \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{1/0}^O} \cdot \vec{z}_{0,1})}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{2/0}^O} \cdot \vec{z}_{0,1})}{dt} \quad (\text{car } O \text{ est centre d'inertie des pièces 1 et 2}).$$

Remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur $\vec{z}_{0,1}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 0 et 1.

Avec $\vec{\sigma}_{2/0}^O = I(O,2) \cdot \vec{\Omega}_{2/0} = \begin{bmatrix} J_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z2} \end{bmatrix}_{(O,B_2)} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \cdot \sin \theta \\ \dot{\phi} \cdot \cos \theta \end{bmatrix}_{(B_2)} = \begin{bmatrix} J_{x2} \cdot \dot{\theta} \\ J_{y2} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \theta \\ J_{z2} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ (car O est centre d'inertie de 2) ;

de plus $\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ d'où $\frac{k_1}{\rho_1} \cdot (c_{m1} + c_{r1} - f_{Eq1} \cdot \dot{\phi}) = J_{z1} \cdot \ddot{\phi} + \frac{d(J_{z2} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2 \theta + J_{y2} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin^2 \theta)}{dt}$

Il vient :
$$c_{m1} + c_{r1} = J_{z1} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \ddot{\phi} + f_{Eq1} \cdot \dot{\phi} + \frac{d\left(J_{z2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \dot{\phi} \cdot \cos^2 \theta + J_{y2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1} \cdot \dot{\phi} \cdot \sin^2 \theta\right)}{dt}$$

Nous obtenons la première équation avec : $A_1 = J_{z1} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$, $B_1 = f_{Eq1}$; $C_{11} = J_{y2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$; $C_{12} = J_{z2} \cdot \frac{\rho_1}{k_1}$

B) On isole (2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$:

$\Sigma \vec{M}_{ext \rightarrow 2}^O \cdot \vec{x}_{1,2} = \vec{\delta}_{2/0}^O \cdot \vec{x}_{1,2} = \frac{d(\vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \vec{x}_{1,2})}{dt} - \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \left(\frac{d\vec{x}_{1,2}}{dt}\right)_0$ (car O est centre d'inertie de la pièce 2).

$0 + 0 + \frac{k_2}{\rho_2} \cdot (c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2} \cdot \dot{\theta}) = J_{x2} \cdot \ddot{\theta} - \vec{\sigma}_{2/0}^O \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{y}_1$ (remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur

$\vec{x}_{1,2}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 1 et 2). $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$

D'où $\frac{k_2}{\rho_2} \cdot (c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2} \cdot \dot{\theta}) = J_{x2} \cdot \ddot{\theta} - (J_{y2} - J_{z2}) \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$

Il vient :
$$c_{m2} + c_{r2} = J_{x2} \cdot \frac{\rho_2}{k_2} \cdot \ddot{\theta} + f_{Eq2} \cdot \dot{\theta} + (J_{z2} - J_{y2}) \cdot \frac{\rho_2}{2 \cdot k_2} \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(2\theta)$$

Nous obtenons la deuxième équation avec : $A_2 = J_{x2} \cdot \frac{\rho_2}{k_2}$, $B_2 = f_{Eq2}$; $C_2 = (J_{z2} - J_{y2}) \cdot \frac{\rho_2}{2 \cdot k_2}$

Q5 : Dans le cas particulier où $\theta = 0^\circ$, nous obtenons : $c_{m1} + c_{r1} = A_1 \cdot \ddot{\phi} + B_1 \cdot \dot{\phi} + C_{12} \cdot \dot{\phi}$ &

$c_{m2} + c_{r2} = A_2 \cdot \ddot{\theta} + B_2 \cdot \dot{\theta}$

Ce qui donne :

$$C_{m1} + C_{r1} - B_1 \rho_1 \omega_{m1} = (A_1 + C_{12}) \rho_1 \dot{\omega}_{m1} = J_{eq1} \dot{\omega}_{m1}$$

$$C_{m2} + C_{r2} - B_2 \rho_2 \omega_{m2} = A_2 \rho_2 \dot{\omega}_{m2} = J_{eq2} \dot{\omega}_{m2}$$

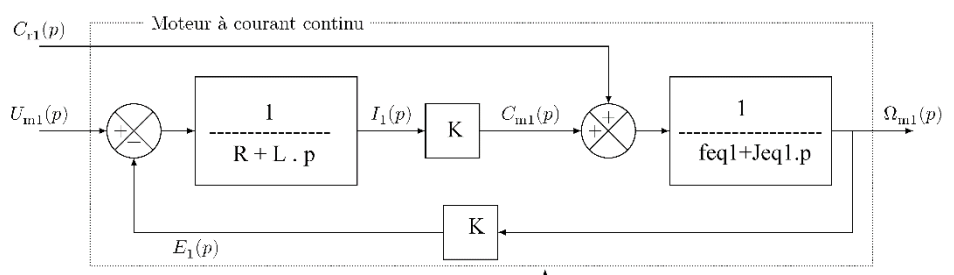
D'où : $J_{eq1} = (A_1 + C_{12}) \rho_1 = \frac{\rho_1^2}{k_1} (J_{z1} + J_{z2})$ $J_{eq2} = A_2 \rho_2 = \frac{\rho_2^2}{k_2} J_{x2}$

Q6 :

Le bloc laissé vide dans le schéma-bloc est un intégrateur dont la

fonction de transfert est $\frac{1}{p}$. En effet,

l'entrée de ce bloc est $\Omega_{m1}(p)$ alors que la sortie est $\theta_{m1}(p)$.



Exercice 7 : roulement sans glissement et équation de mouvement (extrait Ccp MP 2015)

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{z}_1$ (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$\begin{aligned}\vec{F}(G \in \text{bille}/0) &= \left[\frac{d((R-r)\dot{\theta}\vec{x}_1)}{dt} \right]_0 = (R-r)\ddot{\theta}\vec{x}_1 + (R-r)\dot{\theta} \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_0 = (R-r)\ddot{\theta}\vec{x}_1 - (R-r)\dot{\theta}^2\vec{z}_1 \\ \text{TRD}/\vec{z}_1 : & -m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 + F(t)\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_1 - N_1 \\ \Rightarrow & -m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + F(t) \sin \theta - N_1 \\ \Rightarrow & N_1 = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème du moment dynamique au point G en projection sur $\vec{y}_0$ (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$rT_1 = \frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{r-R}{r} \ddot{\theta} \right) \Rightarrow T_1 = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}_1$ (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$\begin{aligned}\text{TRD}/\vec{x}_1 : & m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + T_1 + mg\vec{z}_0 \cdot \vec{x}_1 + F(t)\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1 \\ \Rightarrow & m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + T_1 - mg \sin \theta + F(t) \cos \theta \text{ avec } T_1 = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} \\ \Rightarrow & m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} - mg \sin \theta + F(t) \cos \theta \\ \Rightarrow & F(t) \cos \theta = m(R-r)\ddot{\theta} + f_v(R-r)\dot{\theta} - \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + mg \sin \theta \\ \Rightarrow & F(t) \cos \theta = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg \sin \theta + m(R-r)\ddot{\theta} + \frac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta} \\ \Rightarrow & F(t) \cos \theta = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg \sin \theta + \frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}\end{aligned}$$

Exercice 9: Inertie équivalente de l'axe en translation du robot chirurgical MC²E (extrait Mines mp 2016)

Q1 : Transmission par courroie inextensibles et sans glissement : $\omega_e = \frac{R_i}{R_e} \cdot \omega_i = \frac{R_i}{R_e} \cdot r \cdot \omega_m$

Roulement sans glissement en I_i : $\vec{V}(I_i, 4/g_i) = \vec{0}$

d'où $\vec{V}(I_i, 4/0) = v(t)\vec{z}_0 = \vec{V}(I_i, g_i/0) = -R_g\vec{y}_0 \wedge \omega_e\vec{x}_0 = R_g \cdot \omega_e\vec{z}_0$

$$v(t) = R_g \cdot \frac{R_i}{R_e} \cdot r \cdot \omega_m(t) \quad z(t) = R_g \cdot \frac{R_i}{R_e} \cdot r \cdot \theta_m(t) \text{ en supposant les CI nulles}$$

$$\text{Q2 :} \quad E_c(E/0) = \frac{1}{2} (I_m\omega_m^2 + I_r\omega_i^2 + I_i\omega_i^2 + I_e\omega_e^2 + 2I_p\omega_e^2 + 6I_g\omega_e^2 + m_4 \cdot v^2)$$

$$\text{D'où :} \quad J = I_m + r^2(I_r + I_i) + (I_e + 2I_p + 6I_g) \frac{r^2 R_i^2}{R_e^2} + m_4 \cdot \frac{r^2 R_i^2 \cdot R_g^2}{R_e^2}$$

Exercice 10: inertie équivalente du bras robot maxpid

Q1 : On calcule l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement :

$$T_{(ensemble/0)} = T_{(Stator/0)} + T_{(Vis/0)} + T_{(écrou/0)} + T_{(bras/0)} +$$

Stator et bras tournent autour d'un axe fixe : pas nécessaire de « sortir l'artillerie lourde » c'est-à-dire les torseurs. On utilise le résultat simplifié : $T = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$.

Ce qui donne : $T_{(Stator/0)} = \frac{1}{2} J_{stator} \cdot \dot{\alpha}^2$ et $T_{(bras/0)} = \frac{1}{2} J_{bras} \cdot \dot{\theta}^2$

Les deux moments d'inertie J_{stator} et J_{bras} ne sont pas donnés (on donne celui du bras associé à l'écrou) parce qu'on va négliger les énergies cinétiques dans lesquelles intervient $\dot{\alpha}$. La courbe donnée ($\theta = f(\alpha)$) montre que sur une variation de 60° pour θ , α ne varie que de 16° . On va donc négliger les énergies cinétiques dues à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$. Celle du stator qui tourne autour de l'axe fixe $(O, \vec{Z}_0)$ d'un angle α , celle de la vis qui tourne à la fois autour de son axe propre (angle β) et de l'axe $(O, \vec{Z}_0)$ d'un angle α . Enfin celle de l'écrou qui sera donc considéré fixe par rapport au bras alors qu'il tourne d'un angle $\theta + \alpha$. On néglige ces énergies cinétiques également parce que les solides concernés sont de dimensions radiales et masses faibles.

Compte tenu de l'énoncé et des remarques précédentes pour l'ensemble bras+écrou+masses en considérant le cet ensemble ne fait que tourner autour de l'axe $(B, \vec{Z}_0)$ d'un angle θ :

$$T_{(bras+écrou/0)} = \frac{1}{2} \cdot (J_b + J_m) \cdot \dot{\theta}^2 \quad \text{les masses sont accrochées au bras}$$

Pour la vis + rotor = E moteur qui tournent autour de leur axe propre et de l'axe $(O, \vec{Z}_0)$ d'un angle α :

$$T_{(Vis+rotor/0)} = 1/2 \left\{ \frac{m_E \overrightarrow{V_{(G \in E/0)}}}{\overrightarrow{\sigma_{(O,E/0)}}} \right\}_O \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega_{E/0}}}{\overrightarrow{V_{(O \in E/0)}}} \right\}_O = 1/2 \left\{ \frac{m_E \overrightarrow{V_{(G \in E/0)}}}{\overrightarrow{\sigma_{(O,E/0)}}} \right\}_O \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega_{E/0}}}{\vec{0}} = \dot{\beta} \vec{x}_v + \dot{\alpha} \vec{Z}_0 \right\}_O$$

$$\overrightarrow{\Omega_{E/0}} = \dot{\beta} \vec{x}_v + \dot{\alpha} \vec{Z}_0 \quad \text{avec } \vec{x}_v = \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|} \text{ l'axe de la vis}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{(O,E/0)}} = I(O, E) \cdot \overrightarrow{\Omega_{E/0}} \quad \text{car O est fixe dans le repère 0}$$

$$= \begin{bmatrix} J_v + J_r & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{matrice et vecteur rotation exprimés dans la base } (\vec{x}_v, \vec{y}_v, \vec{Z}_0)$$

$$= (J_v + J_r) \dot{\beta} \vec{x}_v + * \dot{\alpha} \vec{Z}_0 \quad * \text{ est le moment d'inertie de E/axe } (O, \vec{Z}_0) \text{ non donné puisqu'on va le négliger}$$

D'où $T_{(Vis+rotor/0)} = 1/2 (J_v + J_r) \dot{\beta}^2 + * \dot{\alpha}^2 \approx 1/2 (J_v + J_r) \dot{\beta}^2$ on néglige les NRJ Cinétiques dues à la rotation d'angle α .

$$D'où : T_{(ensemble/0)} = \frac{1}{2} \cdot [(J_b + J_m) \cdot \dot{\theta}^2 + (J_v + J_r) \dot{\beta}^2] = \frac{1}{2} \cdot [(J_b + J_m) \cdot (\lambda \cdot \dot{\beta})^2 + (J_v + J_r) \dot{\beta}^2] = \frac{1}{2} \cdot J_{eq} \dot{\beta}^2$$

$$D'où l'inertie équivalente : J_{eq} = (J_b + J_m) \lambda^2 + J_v + J_r$$

Q2 : pour la vis on utilise le résultat à connaître pour un cylindre : moment d'inertie autour de son axe = $\frac{1}{2} m R^2$

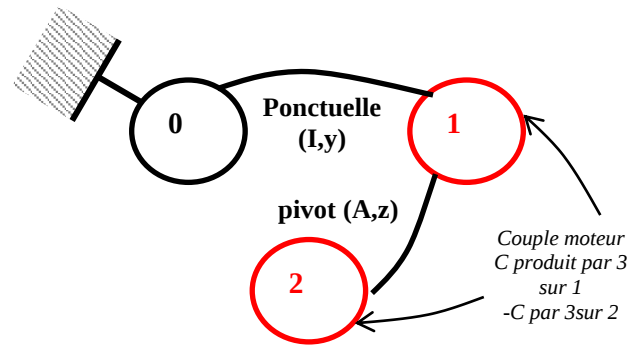
$$J_v = \frac{1}{2} \cdot (\rho \cdot \pi \cdot r_v^2 \cdot L_v) \cdot r_v^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \pi \cdot L_v \cdot r_v^4 = 0.5 * 7600 * 3.14 * 0.195 * (0.005)^4 \quad \text{en kg.m}^2$$

$$\text{Pour les masses supposées ponctuelles, c'est Huygens qui nous dit : } J_m = m \cdot L_m^2 = 1.3 \cdot (0.28)^2 \quad \text{en kg.m}^2$$

$$D'où : J_{eq} = (0.022 + 0.10192) \cdot \left(\frac{1}{112}\right)^2 + 1.45 \cdot 10^{-6} + 7 \cdot 10^{-6} = 18.3 \cdot 10^{-6} \text{ en kg.m}^2$$

Exercice 11 : Puissances des actions mécaniques dans une roue de véhicule

Faisons un graphe des liaisons sur lequel on rajoute les actions mécaniques : action de pesanteur négligée devant les modules des actions aux liaisons.



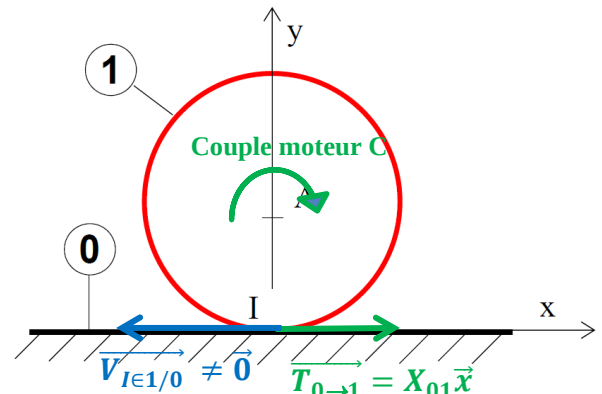
Q1 : torseurs cinématiques

- $V_{2/0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/0}} = v(t)\vec{x} \end{array} \right\}_A$ car le châssis du véhicule se déplace en translation en ligne droite suivant $\vec{x}$
 - $V_{1/2} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$ car la liaison $1/2$ est une pivot sans frottement d'axe $(A, \vec{z})$
- Remarque : si $v(t) > 0$ alors $\overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z}$ en considérant $\omega > 0$.

- $V_{1/0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} = \vec{0} \end{array} \right\}_I$ car RSG en I

Q2 : torseurs d'action mécanique ou inter-effort

- $T_{0 \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 1}} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{I, 0 \rightarrow 1}} = \vec{0} \end{array} \right\}_I$ car liaison ponctuelle de normale $(I, \vec{y})$ avec frottement puisqu'il y a RSG. Si glissement (la roue arrière 1 patine) l'action due au frottement ($\overrightarrow{T_{0 \rightarrow 1}}$) est vers la droite
- $T_{1 \rightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow 2}} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A, 1 \rightarrow 2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_A$ car liaison pivot sans frottement avec hypothèse Pb plan (x, y)
- $T_{3 \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A, 3 \rightarrow 1}} = -C\vec{z} \end{array} \right\}_A$ car C (supposé > 0) engendre ω donc la rotation de 1/2 dans le sens horaire.



Q3 : Puissances

- $P_{0 \rightarrow 1/0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 1}} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{I, 0 \rightarrow 1}} = \vec{0} \end{array} \right\}_I \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} = \vec{0} \end{array} \right\}_I = \overrightarrow{R_{0 \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} + \overrightarrow{M_{I, 0 \rightarrow 1}} \cdot \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = 0$ Résultat à connaître : la puissance perdue est nulle dans le cas du roulement sans glissement. P ext.
- $P_{3 \rightarrow 1/2} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A, 3 \rightarrow 1}} = -C\vec{z} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/2}} = \vec{0} \end{array} \right\}_A = C \cdot \omega$ c'est la puissance motrice fournie par le moteur. Pint en isolant 1+2+3.
- $P_{3 \rightarrow 1/0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A, 3 \rightarrow 1}} = -C\vec{z} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = v(t)\vec{x} \end{array} \right\}_A = C \cdot \omega$ Pext en isolant uniquement 1

- $P_{1 \rightarrow 2/1} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/1} = \omega \vec{z} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{0} \end{array} \right\}_A = 0$ Résultat à connaître : la puissance perdue dans une liaison parfaite est nulle (pas de frottement). Pint en isolant 1+2
- $P_{0 \rightarrow 1/2} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} \\ \vec{M}_{A,0 \rightarrow 1} = \vec{0} + \vec{AI} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = a \cdot X_{01} \vec{z} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/2} = -\omega \vec{z} \\ \vec{V}_{A \in 1/2} = \vec{0} \end{array} \right\}_A = a \cdot X_{01} \cdot \omega$ ni Pext, ni Pint.
- $P_{2 \rightarrow 1/0} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = -X_{12} \vec{x} - Y_{12} \vec{y} \\ \vec{M}_{A,2 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} = -\omega \vec{z} \\ \vec{V}_{A \in 1/0} = a \cdot \omega \vec{x} \end{array} \right\}_A = -a \cdot X_{12} \cdot \omega$ Pext en isolant uniquement 1
- $P_{1 \rightarrow 2/0} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = X_{12} \vec{x} + Y_{12} \vec{y} \\ \vec{M}_{A,1 \rightarrow 2} = \vec{0} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{2/0} = \vec{0} \\ \vec{V}_{A \in 2/0} = v(t) \vec{x} \end{array} \right\}_A = X_{12} \cdot v(t)$ Pext en isolant uniquement 2

$$\text{Q4 : } P_{0 \rightarrow 1/0} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{0 \rightarrow 1} = X_{01} \vec{x} + Y_{01} \vec{y} \\ \vec{M}_{I,0 \rightarrow 1} = (\lambda \cdot Y_{01} + a \cdot X_{01}) \vec{z} \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/0} = -\omega \vec{z} \\ \vec{V}_{A \in 1/0} = v(t) \vec{x} \end{array} \right\}_A = X_{01} \cdot v(t) - \omega(\lambda \cdot Y_{01} + a \cdot X_{01})$$

$$\text{Or } \vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 1/2} + \vec{V}_{A \in 2/0} = v(t) \vec{x} = \vec{V}_{I \in 1/0} + \vec{AI} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = a \cdot \omega \vec{x}$$

$$\text{D'où } P_{0 \rightarrow 1/0} = X_{01} \cdot v(t) - \omega(\lambda \cdot Y_{01} + a \cdot X_{01}) = -\lambda \cdot Y_{01} \cdot \omega \quad \text{C'est la puissance perdue}$$

On perd d'autant plus d'NRJ que le véhicule est lourd (Y_{01} grand), le pneu est sous gonflé (λ augmente), la vitesse augmente.

Exercice 12: Applications du T.E.C.

Exercice 5 (Q2) avec le TEC : on isole tous les solides qui bougent donc 1+2

BAME : $T_{0 \rightarrow 1}, T_{0 \rightarrow 2}, T_{\text{rotor moteur} \rightarrow 1}, T_{\text{ressort} \rightarrow 2}, T_{\text{fluide} \rightarrow 2}$. La pesanteur est négligée

BAMI : $T_{2 \rightarrow 1}$ ou $T_{1 \rightarrow 2}$

$$\text{Le TEC sur 1+2 s'écrit : } \frac{d}{dt} Ec_{(1+2/0)} = P_{\text{ext} \rightarrow 1+2} + P_{\text{int}}$$

$$Ec_{(1+2/0)} = Ec_{(1/0)} + Ec_{(2/0)} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Car 1 tourne autour de l'axe fixe $(O, \vec{x}_0)$ d'un angle θ et son moment d'inertie autour de cet axe est noté I.

Car 2 translate rectilignement avec une vitesse $v(t) = e \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$ (calcul exo4) et sa masse est notée m)

$$P_{\text{ext} \rightarrow 1+2} = P_{0 \rightarrow 1/0} + P_{0 \rightarrow 2/0} + P_{\text{rotor moteur} \rightarrow 1/0} + P_{\text{fluide} \rightarrow 2/0} + P_{\text{ressort} \rightarrow 2/0}$$

- $P_{0 \rightarrow 1/0}$ et $P_{0 \rightarrow 2/0}$ sont nulles : liaisons parfaites
- $P_{\text{rotor moteur} \rightarrow 1/0} = C \cdot \dot{\theta}$ c'est la puissance motrice (>0)
- $P_{\text{fluide} \rightarrow 2/0} = \vec{F}_{\text{fluide}} \cdot v(t) \vec{z}_0 = -F(t) \cdot e \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$ puissance tantôt < 0 (si $F(t) > 0$ et que 2 monte), tantôt > 0 (si $F(t) > 0$ et que 2 descend)
- $P_{\text{ressort} \rightarrow 2/0} = \vec{F}_{\text{ressort}} \cdot v(t) \vec{z}_0 = -(F_0 + k \cdot e \cdot \sin \theta) \cdot e \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta$ même remarque que pour la puissance précédente.
- Remarque : inutile ici de faire des comoments de torseur. Les mouvements sont une rotation autour d'un axe fixe générée par un couple pour 1, et une translation alternative rectiligne générée ou empêchée par des forces (centrales) pour 2. On utilise « $P = C\omega$ » quand ça tourne et « $P = F.V$ » quand ça translate. Attention toutefois, ceux sont des produits scalaires...

$$P_{\text{int}} = P_{2 \rightarrow 1/2} \quad \text{ou} \quad P_{1 \rightarrow 2/1} \quad \text{attention de ne pas la compter 2 fois}$$

$$= T_{2 \rightarrow 1} \otimes V_{1/2} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2 \rightarrow 1} = -Z_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{B,2 \rightarrow 1} = \vec{0} \end{array} \right\}_B \otimes \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}_{1/2} \\ \vec{V}_{B \in 1/2} = v_g \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B = 0$$

Le détail du calcul n'est pas nécessaire puisque la liaison est une ponctuelle parfaite. ($\overrightarrow{V_{B \in 1/2}} = v_g \overrightarrow{y_0}$ est la vitesse de glissement en B et est donc dans le plan tangent commun au contact, donc sur l'horizontale passant par B)

$$D'où : I. \ddot{\theta} + m. e^2. \ddot{\theta}. \cos^2 \theta - m. e^2. \dot{\theta}^3. \sin \theta = C. \dot{\theta} - F(t). e. \dot{\theta}. \cos \theta - (F_0 + k. e. \sin \theta). e. \dot{\theta}. \cos \theta$$

Soit l'équation de mouvement :

$$I. \ddot{\theta} + m. e^2. \ddot{\theta}. \cos^2 \theta - m. e^2. \dot{\theta}^2. \sin \theta = C - F(t). e. \cos \theta - (F_0 + k. e. \sin \theta). e. \cos \theta$$

Exercice 7 avec le TEC :

On l'applique à la bille donc pas de puissance intérieure : $\frac{d}{dt} Ec_{(bille/0)} = P_{ext \rightarrow bille/0}$

- $Ec_{(bille/0)} = 1/2 \left\{ \frac{m \overrightarrow{V_{(G \in bille/0)}}}{\sigma_{(G, bille/0)}} \right\}_G \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega_{bille/0}}}{V_{(G \in bille/0)}} \right\}_G = 1/2 \left\{ \frac{mv \overrightarrow{x_1}}{J \omega_b \overrightarrow{y_0}} \right\}_G \otimes \left\{ \frac{\omega_b \overrightarrow{y_0}}{v \overrightarrow{x_1}} \right\}_G = \frac{1}{2} (mv^2 + J \omega_b^2)$
- $P_{ext \rightarrow bille/0} = P_{pes \rightarrow bille/0} + P_{fluide \rightarrow bille/0} + P_{bob \rightarrow bille/0} + P_{rail \rightarrow bille/0}$

$$P_{pes \rightarrow bille/0} = \left\{ \frac{m. g \overrightarrow{z_0}}{\overrightarrow{0}} \right\}_G \otimes \left\{ \frac{\omega_b \overrightarrow{y_0}}{v \overrightarrow{x_1}} \right\}_G = -m. g. v \sin \theta$$

$$P_{fluide \rightarrow bille/0} = \left\{ \frac{-f_v v \overrightarrow{x_1}}{\overrightarrow{0}} \right\}_G \otimes \left\{ \frac{\omega_b \overrightarrow{y_0}}{v \overrightarrow{x_1}} \right\}_G = -f_v. v^2$$

$$P_{bob \rightarrow bille/0} = \left\{ \frac{F(t) \overrightarrow{x_0}}{\overrightarrow{0}} \right\}_G \otimes \left\{ \frac{\omega_b \overrightarrow{y_0}}{v \overrightarrow{x_1}} \right\}_G = F(t). v \cos \theta$$

$$P_{rail \rightarrow bille/0} = 0 \text{ RSG en I}$$

$$D'où : mv \dot{v} + J \omega_b \dot{\omega}_b = -m. g. v \sin \theta - f_v. v^2 + F(t). v \cos \theta$$

Après utilisation des résultats de l'énoncé, on retrouve bien l'équation de mouvement :

$$\frac{7}{5} m(R-r) \ddot{\theta} + f_v(R-r) \dot{\theta} + mg \sin \theta = F(t) \cos \theta$$

Exercice 13: Applications du T.E.C. (extrait Ccp mp 2015)

Question 1 : La position est donnée par l'aire sous la courbe de vitesse, on en déduit :

$$x_M^{\max} = \frac{T_a V_M^x}{2} + V_M^x (T - T_a - T_a) + \frac{T_a V_M^x}{2} = V_M^x (T - T_a) \quad \text{d'où} \quad V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}$$

Question 2 :

a) On isole l'ensemble des pièces en mouvement, l'inertie cinétique de l'ensemble est : $Ec(S/R) = \frac{1}{2} J_e (\omega_m^x)^2$

Les puissances intérieures sont nulles (pas de frottement)

La puissance extérieure est donnée par : $C_m \omega_m^x$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble isolé donne :

$$\frac{d \left(\frac{1}{2} J_e (\omega_m^x)^2 \right)}{dt} = P_{int}(S) + P_{ext \rightarrow S/R} \quad J_e \omega_m^x \dot{\omega}_m^x = C_m \omega_m^x \quad J_e \dot{\omega}_m^x = C_m \quad J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} = C_m$$

Pour la 1^{er} phase (t compris entre 0 et T_a) : $C_m = J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$

Pour 2^{eme} phase (t compris entre T_a et $T - T_a$) : $C_m = 0$

Pour la 3^{ème} phase (t compris entre T-Ta et T) : $C_m = J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} = -J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$

b) La puissance est maximale quand C_m et ω_m^x sont maxi donc pour $t=T_a$

$$c) P_{\max} = C_m \omega_m^x = J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} \omega_m^x = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a} \omega_m^x = \frac{J_e}{T_a} \left(\frac{V_M^x}{\lambda} \right)^2$$

$$d) \text{ Avec le résultat de la 1^{er} question, on obtient : } P_{\max} = \frac{J_e}{T_a} \left(\frac{V_M^x}{\lambda} \right)^2 = \frac{J_e}{T_a} \left(\frac{\frac{x_M^{\max}}{T - T_a}}{\lambda} \right)^2 = \frac{J_e}{\lambda^2 T_a} \frac{(x_M^{\max})^2}{(T - T_a)^2}$$

Question 3 :

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\max}}{dT_a} &= \frac{d}{dT_a} \left(\frac{J_e}{\lambda^2 T_a} \frac{(x_M^{\max})^2}{(T - T_a)^2} \right) = \frac{J_e (x_M^{\max})^2}{\lambda^2} \frac{d}{dT_a} \left(\frac{1}{T_a [(T - T_a)^2]} \right) = \frac{J_e (x_M^{\max})^2}{\lambda^2} \frac{\frac{d}{dT_a} (T_a [(T - T_a)^2])}{(T_a [(T - T_a)^2])^2} \\ -\frac{d}{dT_a} (T_a [(T - T_a)^2]) &= [(T - T_a)^2] + 2T_a (-1)(T - T_a) = T^2 - 2TT_a + T_a^2 - 2T_a T + 2T_a^2 \\ -\frac{d}{dT_a} (T_a [(T - T_a)^2]) &= -T^2 + 4TT_a - 3T_a^2 \\ -T^2 + 4TT_a - 3T_a^2 &= (T_a - \frac{T}{3})(-3T_a + 3T) = 3(T_a - \frac{T}{3})(T - T_a) \end{aligned}$$

Ta	0		T/3		T	
(Pmax)'	-		0	+	0	-
Pmax						

La puissance est bien minimale pour $T_a = T/3$ sur l'intervalle $[0 ; T]$

Question 4 : D'après la question 1, $V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}$.

$$\text{On a aussi : } V^x = R_p \omega_{\text{poulie}} = R_p k \omega_m^x \quad \left(\omega_m^x \right)_{\max} = \frac{V_M^x}{R_p k} = \frac{1}{R_p k} \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}$$

Avec $R_p = 20 \text{ mm}$, $k = 0.1$, $T = 1 \text{ s}$, $T_a = 1/3 \text{ s}$, $x_M^{\max} = 0,55 \text{ m}$

$$\left(\omega_m^x \right)_{\max} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1} \frac{0,55}{1 - \frac{1}{3}} = 412 \text{ rad.s}^{-1} = 3940 \text{ tr.min}^{-1}$$

Ce qui est bien inférieur à la vitesse maximale de rotation du moteur (4150 tr.min^{-1}).

Le choix du moteur est donc validé pour la vitesse de rotation

Exercice 14: Applications du T.E.C. sur une imprimante

Q1 : On calcule l'NRJ cinétique galiléenne toujours de l'ensemble des solides qui bougent Σ . Ici un certain nombre de solides se traduisent (cartouches et tronçons rectilignes de la courroie) et les autres tournent autour de leurs axes qui restent fixes.

$$Ec_{(\Sigma/0)} = Ec_{(\text{solides qui traduisent}/0)} + Ec_{(\text{solides qui tournent}/0)}$$

Inutile de faire les calculs avec des torseurs :

- $Ec_{(\text{solides qui traduisent}/0)} = \frac{1}{2} M \cdot V_{(M/0)}^2$
- la courroie (brins rectilignes) sur laquelle sont fixées les cartouches est de masse non définie donc négligeable..
- $Ec_{(\text{solides qui tournent}/0)} = \frac{1}{2} (J_M + J_C + J_R) \dot{\theta}_M^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}_G^2$
- Remarque : J_R est l'inertie du réducteur ramenée à l'axe moteur
- Il faut exprimer $V_{(M/0)}$ et les $\dot{\theta}_i$ en fonction de $\dot{\theta}_M$:
 - Réducteur de rapport k donc $\dot{\theta}_1 = k \cdot \dot{\theta}_M$
 - Poulies 1 et 2 de même rayon donc $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$
 - Non glissement poulie1/courroie donc $V_{(M/0)} = r_1 \dot{\theta}_1 = r \cdot k \cdot \dot{\theta}_M$
 - Non glissement galet tendeur/courroie : $V_{(M/0)} = r \cdot k \cdot \dot{\theta}_M = r_G \dot{\theta}_G$

$$\text{D'où : } Ec_{(\Sigma/0)} = \frac{1}{2} \left[M \cdot r^2 \cdot k^2 + (J_M + J_C + J_R) + (J_1 + J_2) k^2 + J_G \frac{r^2 \cdot k^2}{r_G^2} \right] \cdot \dot{\theta}_M^2$$

$$\text{Q2 : } Ec_{(\Sigma/0)} = \frac{1}{2} \left[M \cdot r^2 \cdot k^2 + (J_M + J_C + J_R) + (J_1 + J_2) k^2 + J_G \frac{r^2 \cdot k^2}{r_G^2} \right] \cdot \dot{\theta}_M^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \cdot \dot{\theta}_M^2$$

D'où l'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur :

$$J_{eq} = J_M + J_C + J_R + \left(M \cdot r^2 + J_1 + J_2 + J_G \left(\frac{r}{r_G} \right)^2 \right) k^2$$

Q3 : On cherche l'équation du mouvement par application du TEC à l'ensemble en mouvement

Puissance extérieures :

On commence par la pesanteur ($\vec{g} = g \vec{z}_0$) :

$$\cdot P_{pes \rightarrow \text{solide } i / 0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow \text{solide } i}} = m_i g \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{G_i, pes \rightarrow \text{solide } i}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_i} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{\text{solide } i / 0}} \\ \overrightarrow{V_{(G_i \in \text{solide } i / 0)}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{G_i} = 0 \text{ sur Chacun des solides tournant}$$

($i = M, 1, 2, G$). Le calcul n'est pas à faire d'autant qu'on ne donne pas les masses des solides.

$$\cdot P_{pes \rightarrow \text{cartouches} / 0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{pes \rightarrow C}} = M g \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{G, pes \rightarrow C}} = \vec{0} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{C / 0}} \\ \overrightarrow{V_{(G \in C / 0)}} = V_{(M/0)} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_G = 0 \quad \text{Les actions de pesanteur}$$

ne travaillent pas ($\vec{g} \perp$ plan d'évolution du mécanisme). G , cdg des cartouches.

Puis la puissance fournie :

$$\cdot P_{\text{stator moteur} \rightarrow \text{rotor moteur} / 0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{sm \rightarrow rm}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{C, sm \rightarrow rm}} = C_M \vec{z}_0 \end{array} \right\}_{C, \text{pt de l'axe}} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{sm \rightarrow rm / 0}} = \dot{\theta}_M \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V_{(C \in sm \rightarrow rm / 0)}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{C, \text{pt de l'axe}} = C_M \dot{\theta}_M$$

Enfin les actions aux liaisons (attention du frottement partout...) :

- Pivots avec le bâti : couple de frottement visqueux (proportionnel à la vitesse angulaire) autour de l'axe de la liaison avec b_j (en Nms/rad) le coeff de frottement visqueux $\Rightarrow \overrightarrow{\text{couple de frottement}} = -b_j \dot{\theta}_j \vec{z}_0$

$$P_{0 \rightarrow \text{solide } j/0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow j}} = X_{0j} \overrightarrow{x_0} + Y_{0j} \overrightarrow{y_0} + Z_{0j} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{C_j, 0 \rightarrow j}} = L_{0j} \overrightarrow{x_0} + M_{0j} \overrightarrow{y_0} - b_j \dot{\theta}_j \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_{C_j, \text{pt de l'axe}} \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{j/0}} = \dot{\theta}_j \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{V_{(C_j \in j/0)}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{C_j, \text{pt de l'axe}} = -b_j \cdot \dot{\theta}_j^2$$

- Glissière avec le bâti : force de frottement sec (Coulomb) suivant l'axe de la liaison avec f le coefficient de frottement : TRD aux cartouches/ $\overrightarrow{z_0}$: $\overrightarrow{R_{0 \rightarrow C}} \cdot \overrightarrow{z_0} + Mg = 0 \Rightarrow Y_{0C} = -Mg \Rightarrow X_{0C} = f \cdot Y_{0C} = -f \cdot Mg$

Remarque : les actions de la courroie sur les cartouches sont horizontales donc n'interviennent pas dans le TRD/ $\overrightarrow{z_0}$

$$P_{0 \rightarrow \text{Cartouches } /0} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow C}} = X_{0C} \overrightarrow{x_0} + Y_{0C} \overrightarrow{y_0} + Z_{0C} \overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{G, 0 \rightarrow C}} = L_{0C} \overrightarrow{x_0} + M_{0C} \overrightarrow{y_0} + N_{0C} \overrightarrow{z_0} \end{array} \right\}_G \otimes \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{C/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{(G \in C/0)}} = V_{(M/0)} \overrightarrow{x_0} \end{array} \right\}_G = -f \cdot Mg \cdot V_{(M/0)}$$

Puissance intérieures :

- Les contacts courroie/poulies se font sans glissement donc puissances perdues nulles.
- Les frottements sont globalisés au niveau du réducteur : rendement η_R

$$\eta_R = \frac{\text{Puissance en sortie de réducteur}}{\text{Puissance en entrée de reducteur}} = \frac{\text{Puissance motrice réellement fournie}}{C_M \dot{\theta}_M}$$

$$\text{D'où : Puissance motrice réellement fournie} = \eta_R C_M \dot{\theta}_M$$

$$\text{La perte de puissance autrement dit la puissance intérieure vaut } P_{int} = -(1 - \eta_R) C_M \dot{\theta}_M$$

Pour retrouver ces résultats il faut utiliser une application numérique. Si $\eta_R = 0.9$ cela veut dire que la puissance réellement motrice fournie au système vaut 90% de la puissance théorique fournie par le moteur ($C_M \dot{\theta}_M$) à cause des frottements internes au réducteur. La perte de puissance au niveau du réducteur donc la puissance intérieure est donc de 10% de la puissance théorique moteur. Cette puissance intérieure est négative puisqu'elle est perdue.

$$\text{Application du TEC : } \frac{d}{dt} E_{C(\Sigma/0)} = P_{ext \rightarrow \Sigma/0} + P_{int}$$

$$\text{D'où : } J_{eq} \cdot \dot{\theta}_M \cdot \ddot{\theta}_M = C_M \dot{\theta}_M - b_M \cdot \dot{\theta}_M^2 - b_1 \cdot \dot{\theta}_1^2 - b_2 \cdot \dot{\theta}_2^2 - b_G \cdot \dot{\theta}_G^2 - f \cdot Mg \cdot V_{(M/0)} - (1 - \eta_R) C_M \dot{\theta}_M$$

$$\text{Ce qui donne : } J_{eq} \cdot \dot{\theta}_M \cdot \ddot{\theta}_M = \eta_R C_M \dot{\theta}_M - b_M \cdot \dot{\theta}_M^2 - b_1 \cdot (k \cdot \dot{\theta}_M)^2 - b_2 \cdot (k \cdot \dot{\theta}_M)^2 - b_G \cdot \left(\frac{r \cdot k}{r_G} \cdot \dot{\theta}_M\right)^2 - f \cdot Mg \cdot r \cdot k \cdot \dot{\theta}_M$$

$$\text{On simplifie par } \dot{\theta}_M : J_{eq} \ddot{\theta}_M = \eta_R C_M - \left(b_M + (b_1 + b_2) k^2 + b_G \cdot \left(\frac{r \cdot k}{r_G}\right)^2 \right) \dot{\theta}_M - f \cdot Mg \cdot r \cdot k$$