

Systèmes Linéaires Continus Invariants

1 – Rappels :

1.1 - Définition :



Le système est décrit par une équation différentielle: $a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$ (1)

- linéaire : $e_i(t) \longrightarrow s_i(t) \Rightarrow \lambda e_i(t) \longrightarrow \lambda s_i(t)$
 $\Rightarrow e_1 + e_2(t) \longrightarrow s_1(t) + s_2(t)$
- continu : $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions continues du temps
- invariant : les coefficients a_i et b_i ne dépendent pas de t

1.2 - Transformée de Laplace : $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$

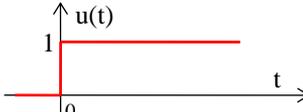
Quelques propriétés utiles :

- linéarité : $\mathcal{L} [f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L} [f_1(t)] + \mathcal{L} [f_2(t)] = F_1(p) + F_2(p)$
 $\mathcal{L} [\lambda f(t)] = \lambda \mathcal{L} [f(t)] = \lambda F(p)$
- théorème du retard : $\mathcal{L} [f(t - \tau)] = e^{-\tau p} F(p)$
- théorème de l'amortissement : $\mathcal{L} [e^{-\omega t} f(t)] = F(p + \omega)$
- théorème 1 de la dérivation : $\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p F(p) - f(0^+)$
- théorème 2 de la dérivation : $\mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n \cdot F(p)$ avec conditions initiales nulles
- théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p F(p)$ quand la limite existe
- théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p)$ quand la limite existe

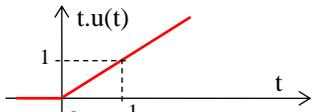
1.3 - Transformée de Laplace des signaux tests :

- Fonction de Dirac ou impulsion unité $\delta(t)$: $\mathcal{L} [\delta(t)] = 1$

si l'entrée $e(t) = \delta(t)$ alors la sortie $s(t)$ est appelée **réponse impulsionnelle**

- Echelon unité $u(t)$:  $\mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{p}$

si l'entrée $e(t) = u(t)$ alors la sortie $s(t)$ est appelée **réponse indicielle**

- Fonction rampe :  $\mathcal{L} [t.u(t)] = \frac{1}{p^2}$

si l'entrée $e(t) = t.u(t)$ alors la sortie $s(t)$ est la réponse à une rampe

- $\mathcal{L} [\sin \omega t.u(t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ $\mathcal{L} [\cos \omega t.u(t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$ $\mathcal{L} [e^{-at}] = \frac{1}{p + a}$

ces transformées seront données si besoin

Synthèse sur les transformées de Laplace (fond gris = à savoir)

Fonction temporelle f(t)	Transformée de Laplace F(p)
f(t-τ)	e^{-τ·p} F(p)
$\frac{df(t)}{dt}$	pF(p) - f(0 ⁺)
$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	p ² F(p) - pf(0 ⁺) - f'(0 ⁺)
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	pⁿ F(p) avec C.I. = 0
δ(t)	1
u(t)	$\frac{1}{p}$
$\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^{n+1}}$
e ^{-at} · u(t)	$\frac{1}{p+a}$
t e ^{-at} · u(t)	$\frac{1}{(p+a)^2}$
sin ωt · u(t)	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
cos ωt · u(t)	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$ si la limite existe	
$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$ si la limite existe	

1.4 - Fonction de transfert :

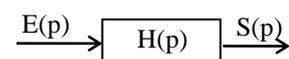
On prend des **conditions initiales nulles** pour définir la fonction de transfert. Le niveau initial importe peu : c'est l'écart par rapport à une consigne qu'on étudie.

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} a_n p^n S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_0 E(p)$$

fonction de transfert (ou transmittance) du système :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{a_n p^n + \dots + a_0}$$

L'équation différentielle décrit le système dans le domaine temporel et l'équation $S(p) = H(p) \cdot E(p)$ le décrit dans le domaine symbolique :

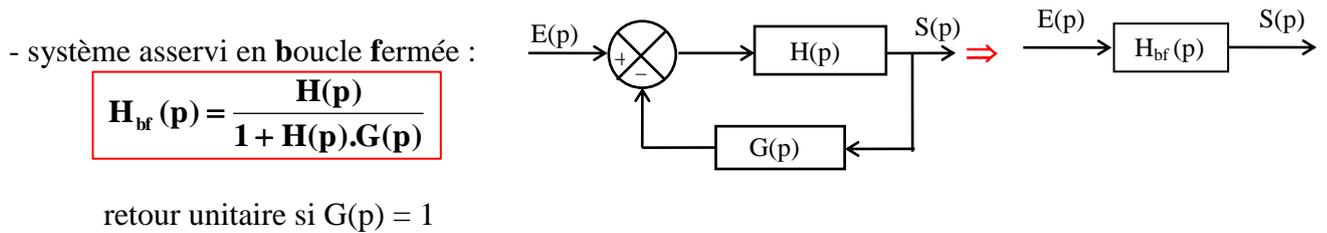
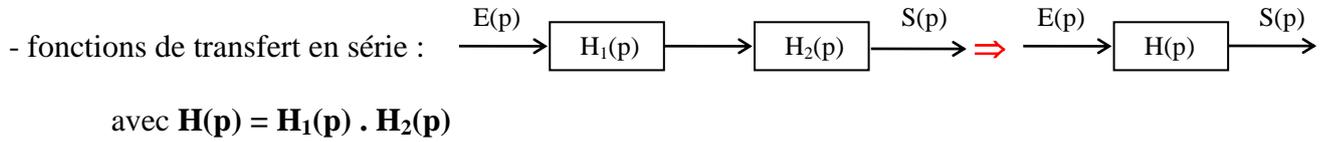


Les zéros sont les racines du numérateur de H(p) et les pôles les racines du dénominateur.

Si b_0 est différent de 0, on peut mettre $H(p)$ sous la **forme canonique** suivante :

$$H(p) = \frac{K(1 + \dots + b'_m p^{m'})}{p^\alpha (1 + \dots + a'_n p^{n'})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = \text{gain statique} \\ n = n' + \alpha \text{ ordre du système} \\ \alpha = \text{classe du système} \end{cases}$$

1.5 - Fonction de transfert équivalente :



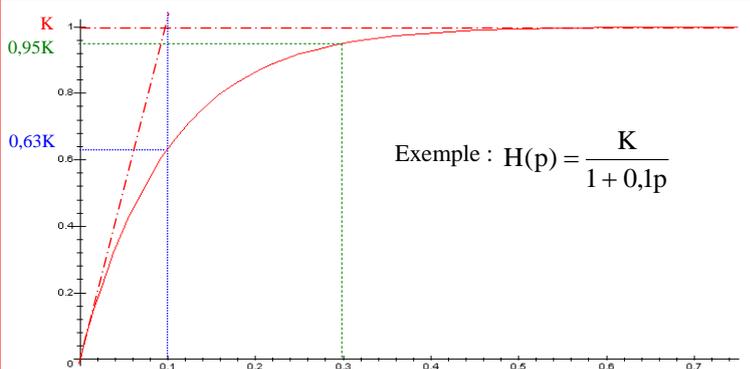
2 - Analyse temporelle : (réponses indicielles de signaux tests) $u(t) \rightarrow H(p) \rightarrow s(t) = ?$

2.1 - Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t) \Rightarrow H(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \begin{matrix} \text{Forme canonique indispensable} \\ K = \text{gain statique} \\ \tau = \text{constante de temps} \end{matrix}$$

Réponse indicielle ? $e(t) = u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow S(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)} = \frac{K}{p} - \frac{K}{p + \frac{1}{\tau}} \Rightarrow s(t) = K (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$

- pente à l'origine = K/τ
- pente nulle à l'infini
- $s(0) = 0$
- $s(\tau) = 0,63 K$
- $s(3\tau) = 0,95 K \Rightarrow 3\tau = \text{temps de réponse à 95\%}$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K$
- si échelon d'amplitude e_0 en entrée tout est multiplié par e_0 en sortie (système linéaire !!!)



Exemple : $H(p) = \frac{K}{1 + 0,1p}$

2.2 - Réponse indicelle d'un système du 2nd ordre :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t) \Rightarrow H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Forme canonique toujours indispensable

ω_0 = pulsation propre ou $\tau = 1/\omega_0$ = constante de temps

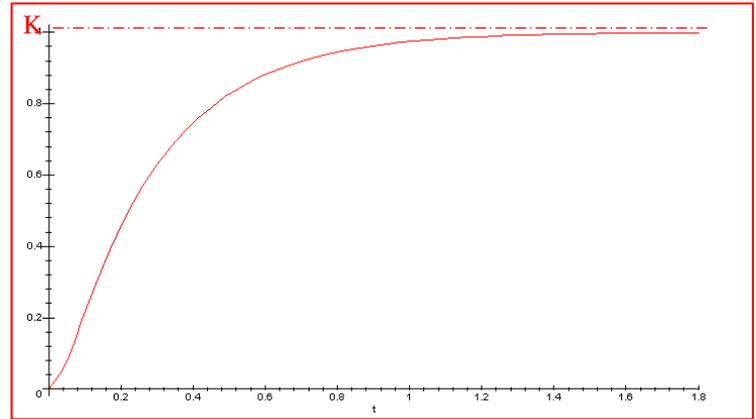
m (ou ξ ou z) = coefficient d'amortissement (facteur de qualité en phys : $Q = 1/(2m)$)

K = gain statique

1^{er} cas : système amorti ($m \geq 1$) 2 racines réelles p_1 et $p_2 < 0$

$$s(t) = K + \frac{K\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}} \left(\frac{e^{p_2 t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 t}}{p_1} \right)$$

- pente nulle à l'origine
- pente nulle à l'infini
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K$
- si échelon d'amplitude e_0 en entrée tout est multiplié par e_0 en sortie (système linéaire !!!)

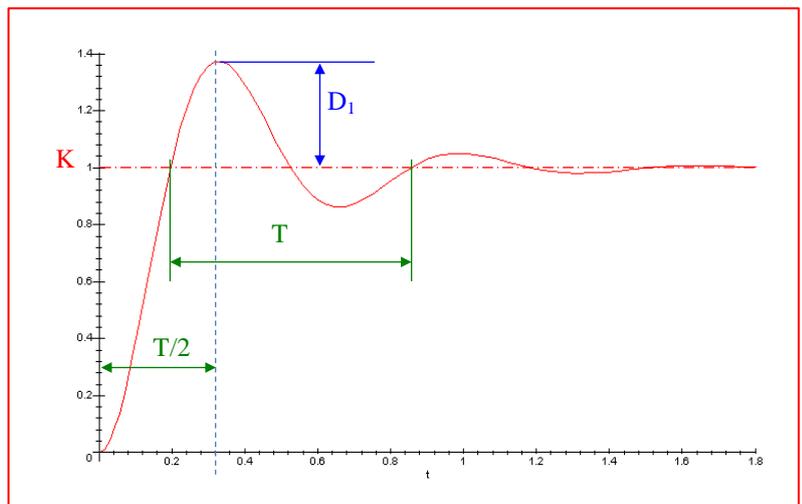


Dès qu'on s'éloigne de $t = 0$, le système amorti du 2nd ordre est comparable à un 1^{er} ordre. Au début, le 1^{er} ordre réagit plus vite (pente à l'origine non nulle).

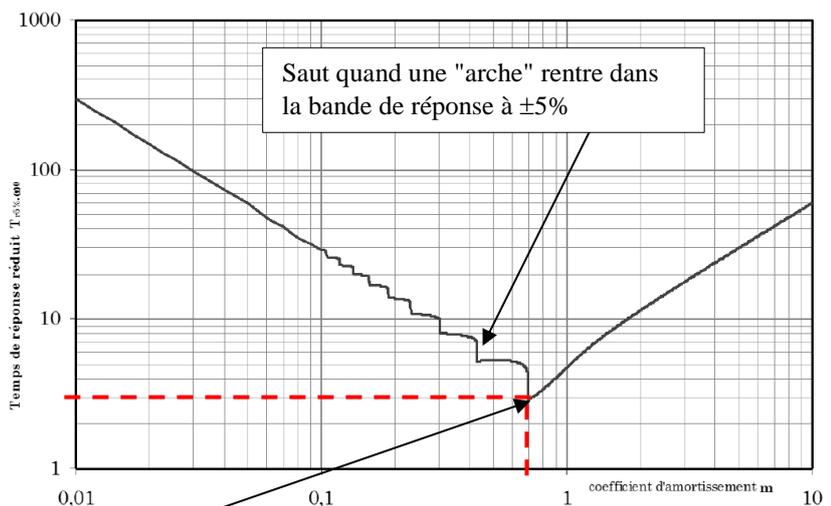
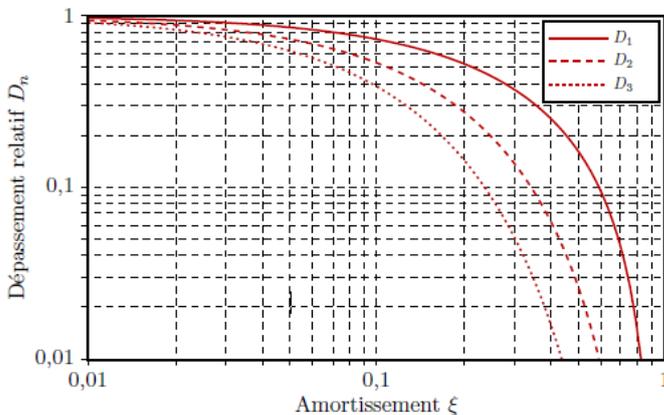
2^{ème} cas : système sous-amorti ou pseudopériodique ($m < 1$) 2 racines complexes conjuguées

$$s(t) = K \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} e^{-m\omega_0 t} \sin(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \arccos(m)) \right)$$

- pente nulle à l'origine et à l'infini
- $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K$
- pseudopériode $T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$
- si échelon d'amplitude e_0 en entrée tout est multiplié par e_0 en sortie (système linéaire !!!)



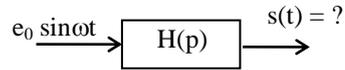
- k^{ème} dépassement $D_k = K e^{\frac{-\pi m k}{\sqrt{1-m^2}}}$
- 1^{er} dépassement relatif en % $d_1 = e^{\frac{-\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$
- ces 2 dernières formules ne sont quasi plus utilisées. On préfère souvent l'abaque ci-dessous.



Temps de réponse à 95% ($\omega_0 * Tr_{95\%}$) en fonction de l'amortissement :

- Pour $m = 0,69$, on a le meilleur temps de réponse (à ω_0 constant).
- Pour $m > 0,7$, un seul dépassement ($< 5\%$) \Rightarrow en général, on considère que le système est quasi non oscillant.

3 - Analyse fréquentielle ou harmonique :



3.1 – Définitions :

On étudie la réponse d'un système soumis en entrée à un signal sinusoïdal **en régime permanent**.

Si $e(t) = e_0 \sin \omega t$, on sait que la sortie $s(t) = s_0 \sin (\omega t + \varphi)$ s_0 et le déphasage φ dépendent de ω .

On pose $\underline{e} = e_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = s_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$. Alors, $e(t)$ et $s(t)$ représentent les parties imaginaires de \underline{e} et \underline{s} .

de (1), $a_n (j \omega)^n \underline{s} + \dots + a_0 \underline{s} = b_m (j \omega)^m \underline{e} + \dots + b_0 \underline{e}$ d'où $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{b_0 + \dots + b_m (j\omega)^m}{a_0 + \dots + a_n (j\omega)^n} = H(j\omega) = \frac{s_0}{e_0} e^{j\varphi}$

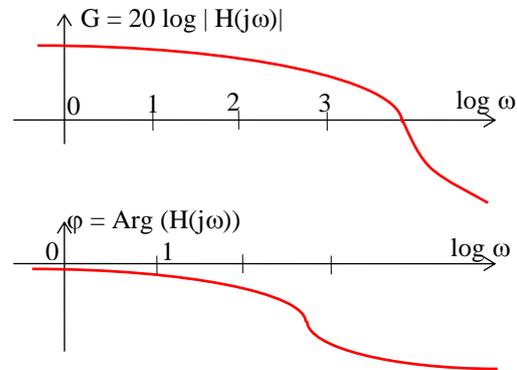
On a donc $s_0 = e_0 |H(j\omega)|$ et $\varphi = \text{Arg} (H(j\omega))$

Le module de $H(j\omega)$ donne donc le **gain G** du système (rapport entre les amplitudes d'entrée et sortie) et l'argument donne le **déphasage φ** entre l'entrée et la sortie.

3.2 - Représentations graphiques de la fonction de transfert :

3.2.1 – Diagramme de Bode :

On représente $H(j\omega)$ sur **2 courbes** en fonction de ω (axes des abscisses gradués en $\log(\omega)$) :



- le module G (gain) en décibels (dB): $G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)|$

- la phase φ en degrés ou radians

Intérêt :

si $H = H_1 \cdot H_2$ (fonctions de transfert en série) :

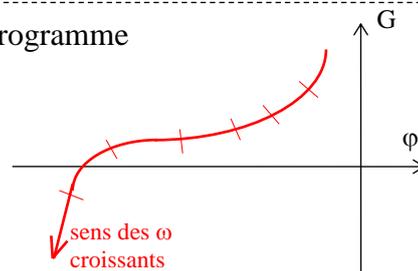
alors $20 \log |H| = 20 \log |H_1| + 20 \log |H_2|$
 et $\text{Arg} (H) = \text{Arg} (H_1) + \text{Arg} (H_2)$

Nota :

- en mécanique, $\varphi < 0$ (réponse en retard) et $G \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow \infty$ (caractère passe-bas des servomécanismes).
- variation de K \Rightarrow translation verticale de G et φ invariant

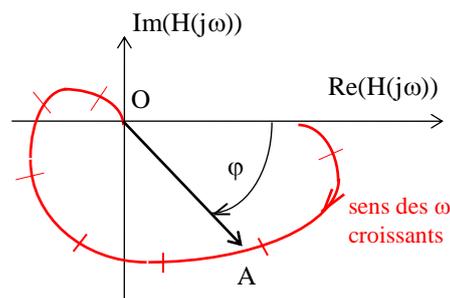
3.2.2 – Diagramme de Black (ou Black-Nichols) : Hors programme

On représente le module G de $H(j\omega)$ en dB en fonction de la phase exprimée en degrés et on gradue la courbe en ω .



3.2.3 – Diagramme de Nyquist : Hors programme

Pour chaque valeur de ω , on représente $H(j\omega)$ dans le plan complexe et on gradue la courbe en ω . Le gain (OA) et le déphasage sont directement lisibles pour chaque valeur de ω .

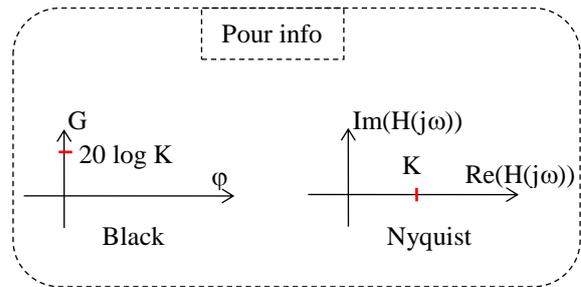
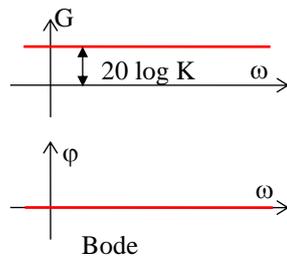


Pour info

3.3 - Système à action proportionnelle :

$$H(j\omega) = K$$

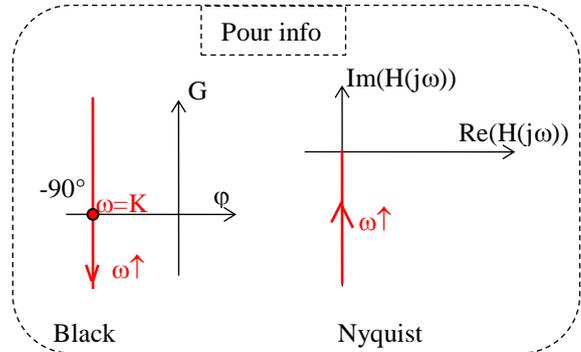
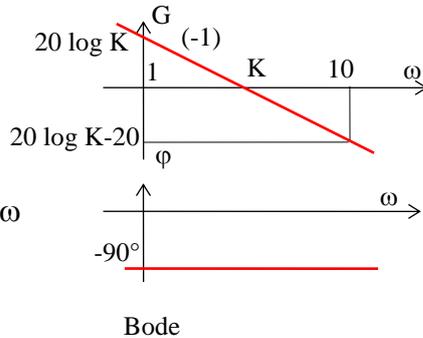
exemple: capteur



3.4 - Intégrateur pur :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

gain $G = 20 \log K - 20 \log \omega$
 phase $\varphi = -90^\circ$

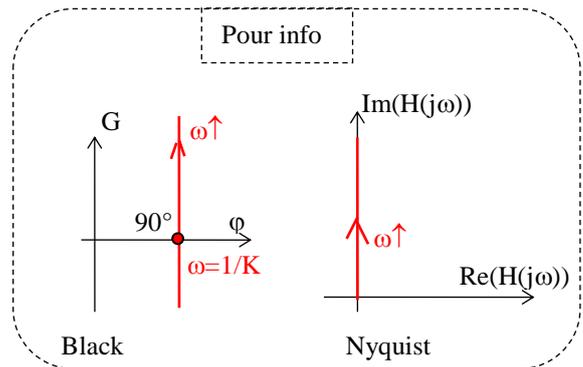
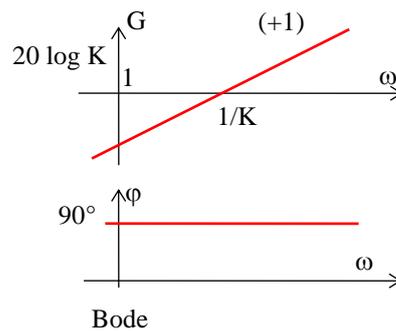


Remarque : La pente du gain est de -20 dB par décade (noté -1 car $H(p) = p^{-1}$).

3.5 - Dérivateur pur :

$$H(j\omega) = jK\omega$$

gain $G = 20 \log K + 20 \log \omega$
 phase $\varphi = 90^\circ$

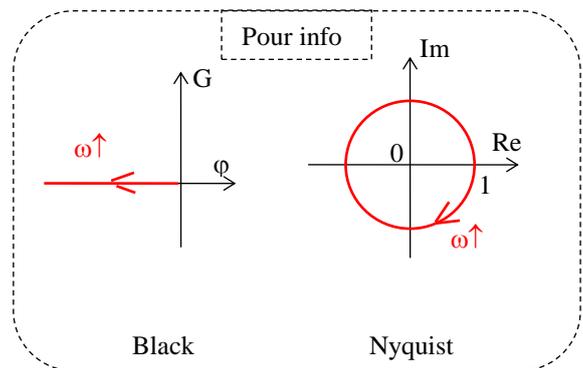
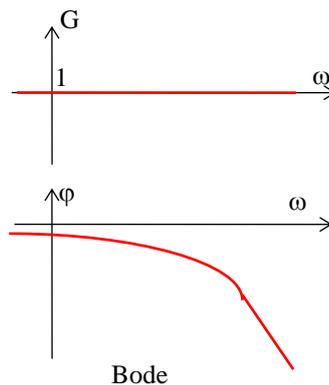


3.6 - Retard pur :

$$H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}$$

gain $G = 0$
 phase $\varphi = -\omega\tau$

ω	0	$1/\tau$	∞
$\log \omega$	$-\infty$	$-\log \tau$	∞
φ	0	-1 rad	$-\infty$



3.7 - Système du 1^{er} ordre :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

d'où

$$G = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

et

$$\varphi = -\arctan(\omega\tau)$$

3.7.1 - Diagramme de Bode :

On trace d'abord les diagrammes asymptotiques :

- quand $\omega\tau \ll 1$, $H(j\omega) \approx K$ et $\varphi = 0^\circ$
(cf système à action proportionnelle)
- quand $\omega\tau \gg 1$, $H(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega\tau}$ et $\varphi = -90^\circ$
(cf intégrateur donc pente -20dB/décade)

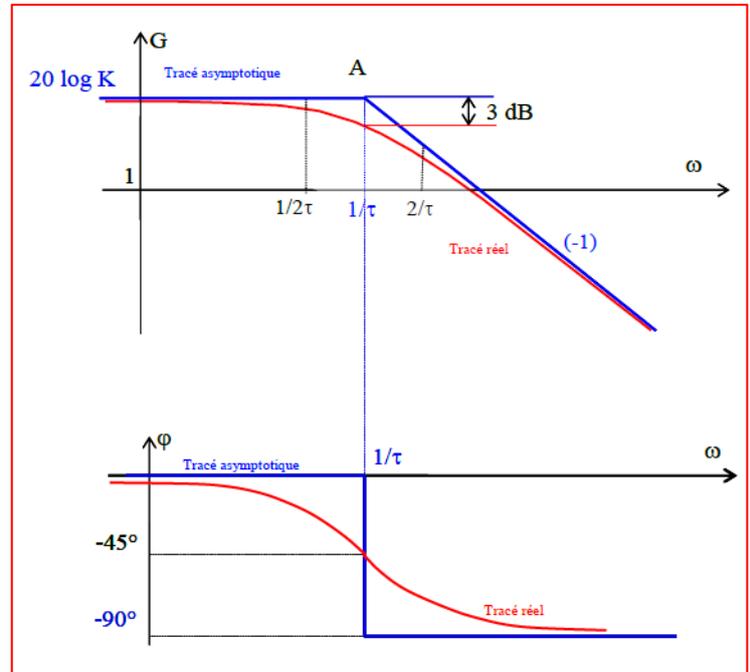
pulsation de cassure en A :

$$20 \log K = 20 \log K - 20 \log \omega\tau \Rightarrow \omega\tau = 1 \text{ d'où } \omega = 1/\tau$$

$$G(1/\tau) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

$$G(1/2\tau) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1.25} = 20 \log K - 1 \text{ dB}$$

de même, pour $\omega = 2/\tau$, l'écart entre le gain et le lieu asymptotique vaut 1 dB.



ω	0	$1/2\tau$	$1/\tau$	$2/\tau$	∞
φ	0	-26°	-45°	-63°	-90°

Nota :

- une modification de K se traduit par une translation verticale de la courbe de gain et n'a pas d'influence sur la phase (vrai $\forall H(p)$).
- une modification de la constante de temps τ déplace la pulsation de cassure.

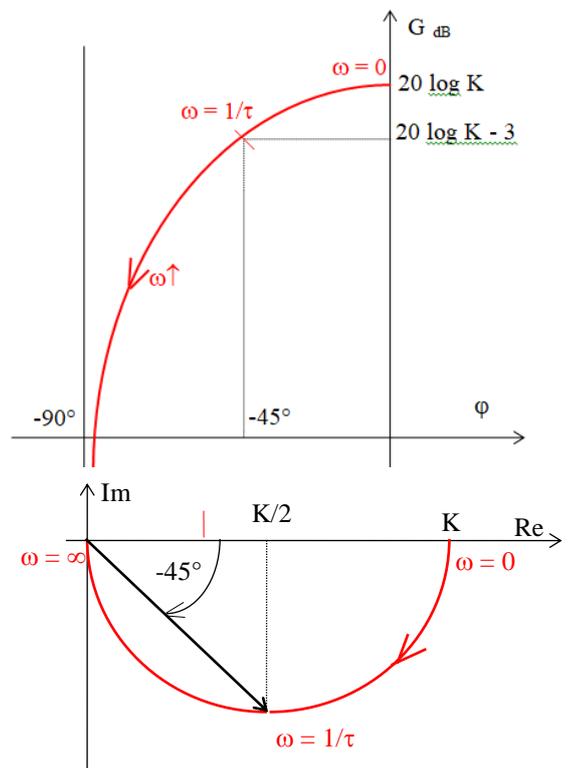
3.7.2 - Diagramme de Black :

Une modification du gain statique K se traduit par une translation verticale de la courbe de gain. (On utilise ce diagramme pour la correction des systèmes asservis).

3.7.3 - Diagramme de Nyquist :

$$H(j\omega) = \frac{K(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = \frac{K}{1 + \omega^2\tau^2} - j \frac{K\tau\omega}{1 + \omega^2\tau^2} = a + j b$$

$a^2 + b^2 = Ka \Rightarrow (a - K/2)^2 + b^2 = (K/2)^2$
donc le lieu de Nyquist est un cercle de rayon $K/2$ centré en $(K/2, 0)$ (en fait, seul le $1/2$ cercle inférieur est parcouru car $-90^\circ \leq \varphi \leq 0^\circ$).



Quand le lieu de Nyquist d'un 1^{er} ordre est connu, on a K et τ par simple lecture.

Pour info

3.10 - Système du 2nd ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j \frac{2m\omega}{\omega_0}}$$

on note $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ = pulsation réduite

- module : $|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}}$ $\Rightarrow G_{dB} = 20 \log K - 10 \log[(1-u^2)^2 + 4m^2u^2]$

\Rightarrow la dérivée s'annule pour $m < \frac{\sqrt{2}}{2}$: résonance pour la pulsation $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$

$$\Rightarrow |H(j\omega_r)| = \frac{K}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Plus m est faible, plus la résonance est importante : caractérisée par le facteur de surtension (rapport entre gain à la résonance et gain statique) $\Rightarrow Q = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$

- phase : $\varphi = - \arctan \frac{2mu}{1 - u^2}$ attention : vrai pour $u < 1$!!

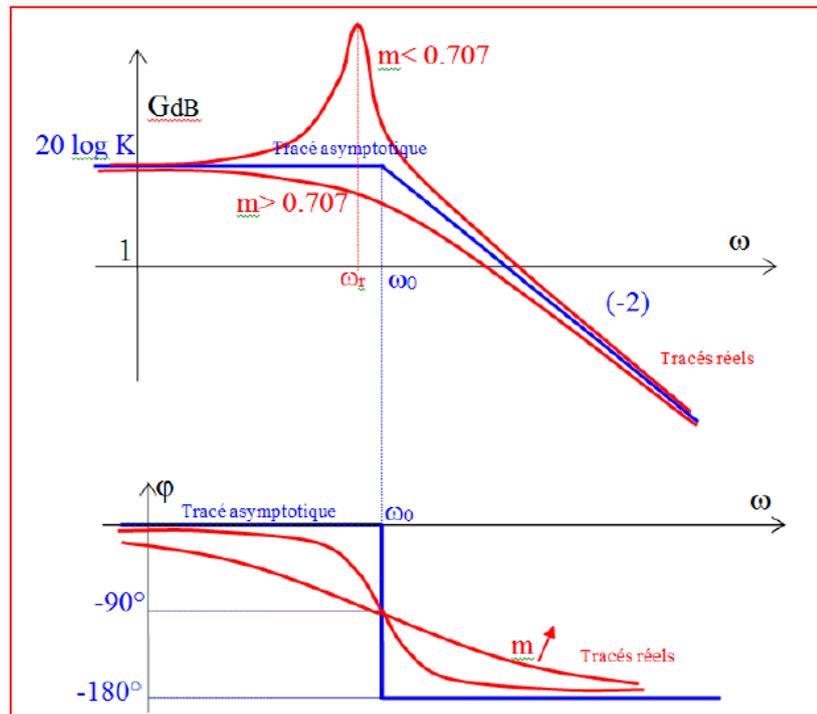
3.10.1 - Diagramme de Bode :

$$G(\omega) = 20 \log K - 10 \log [(1 - u^2)^2 + 4 m^2 u^2]$$

- $\omega \rightarrow 0$: $G \rightarrow 20 \log K$ et $\varphi \rightarrow 0$

- $\omega \rightarrow \infty$: $(1 - u^2)^2 + 4 m^2 u^2 \rightarrow u^4$
 $\Rightarrow G \rightarrow 20 \log K - 40 \log u$
 $\varphi \rightarrow -180^\circ$

- $\omega = \omega_0$: $G = 20 \log K/2m$
 $\varphi = -90^\circ$

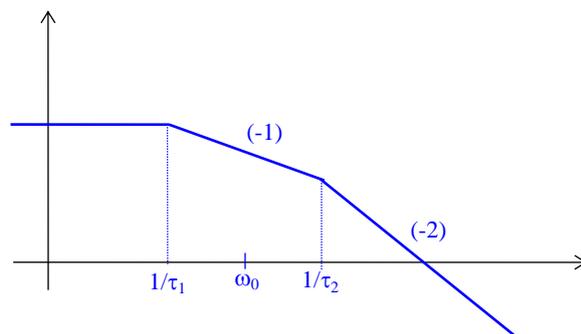


Nota : si $m > 1$, on a alors 2 racines réelles :

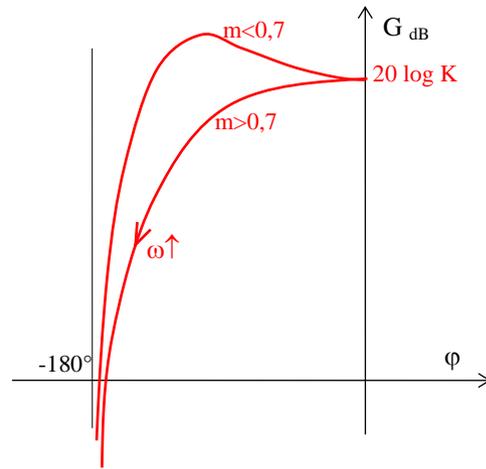
$$H = \frac{K}{1 + \tau_1 p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 p} = H_1 \cdot H_2 \text{ (diagramme asymptotique plus précis)}$$

$$\tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \log \frac{1}{\tau_1} + \log \frac{1}{\tau_2} = 2 \log \omega_0$$

donc $\log \omega_0$ est au milieu de $\log \frac{1}{\tau_1}$ et $\log \frac{1}{\tau_2}$



3.10.2 - Diagramme de Black :



3.10.3 - Diagramme de Nyquist :

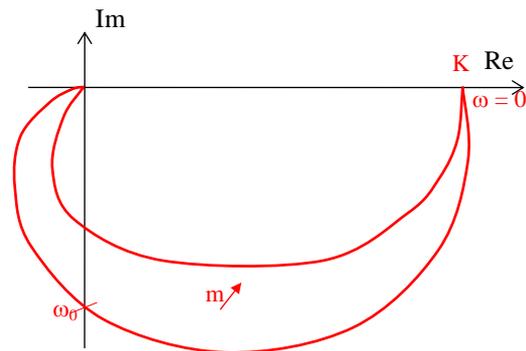
$$H(j\omega) = \frac{K(1-u^2)}{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2} - j \frac{2Kmu}{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}$$

$$- \omega = 0 : H(j\omega) = K$$

$$- \omega = \omega_0 : H(j\omega) = -j \frac{K}{2m} \text{ et } \varphi = -90^\circ$$

$$- \omega = \omega_r \text{ (si } m < 0,7) : \text{ gain max}$$

$$- \omega \rightarrow \infty : H(j\omega) \rightarrow 0 \text{ et } \varphi \rightarrow -180^\circ$$

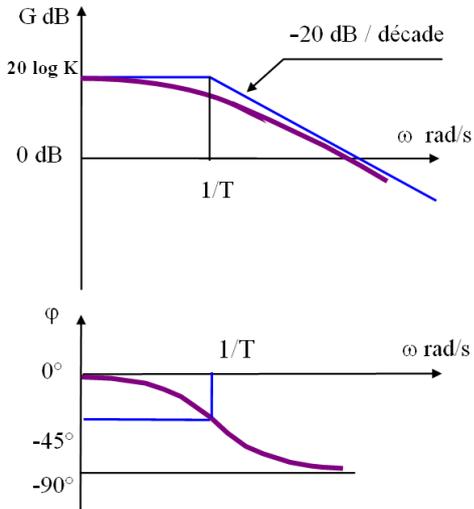
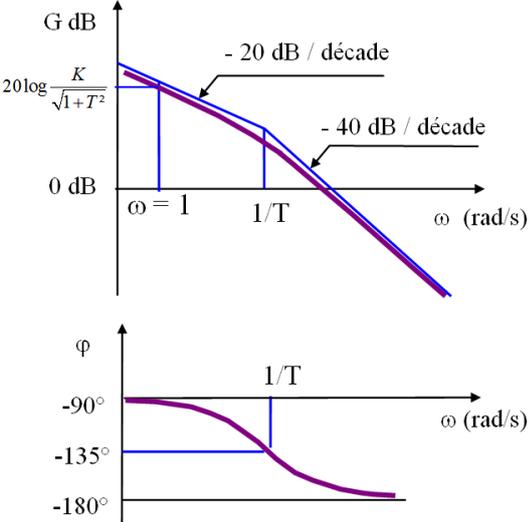
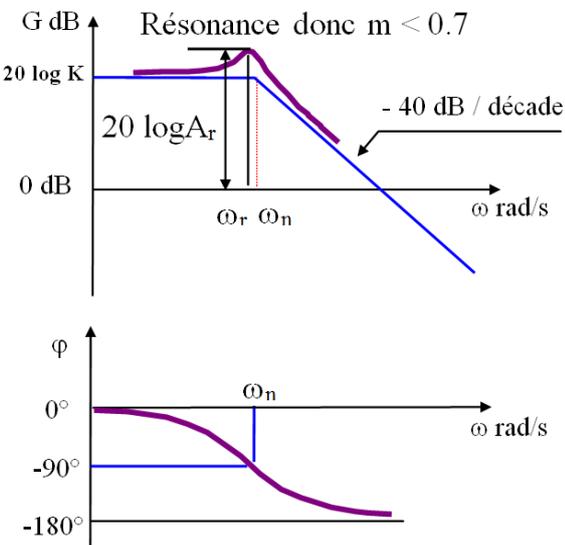


Pour info

4 – Identification :

Identifier un système réel c'est déterminer un modèle (dit de comportement) associé à ce système. L'objectif est donc de traduire le comportement global du système. Dans ce contexte, les informations seront expérimentales ; elles seront obtenues en excitant le système à l'aide d'entrées connues (échelon, rampe, sinusoïde, ...) et en comparant les valeurs expérimentales des sorties avec celles théoriques correspondantes. Un **modèle de comportement** peut alors être construit.

Trois exemples « classiques »

Diagramme de Bode relevé expérimentalement	Modèle de comportement associé sous forme de fonction de transfert
	$H_{(p)} = \frac{K}{1 + Tp}$ <p>Le gain statique K est relevé sur la courbe de gain en basse fréquence (zone de pente nulle).</p> <p>La constante de temps T est relevée :</p> <ul style="list-style-type: none"> - sur la courbe de phase : valeur à -45° ou - sur la courbe de gain à l'intersection des asymptotes. <p><i>La 1^{ère} solution est plus précise !</i></p>
	$H_{(p)} = \frac{K}{p(1 + Tp)}$ <p>Le gain statique K est relevé sur la courbe de gain : pour une valeur particulière, par exemple $\omega = 1$, la lecture du gain donne la valeur de K (il faut d'abord déterminer T).</p> <p>La constante de temps T est relevée :</p> <ul style="list-style-type: none"> - sur la courbe de phase : valeur à -135° ou - sur la courbe de gain à l'intersection des asymptotes <p><i>La 1^{ère} solution est plus précise !</i></p>
	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$ <p>Le gain statique K est relevé sur la courbe de gain en basse fréquence, dans la zone où la pente est nulle.</p> <p>La pulsation propre ω_n est déterminée par la mesure de la pulsation où la phase atteint -90° (ou à la cassure sur le gain).</p> <p>Le coefficient d'amortissement m est déterminé à la résonance :</p> <p>par la mesure de A_r : $A_r = \frac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$</p> <p>ou par celle de ω_r : $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2m^2}$</p>