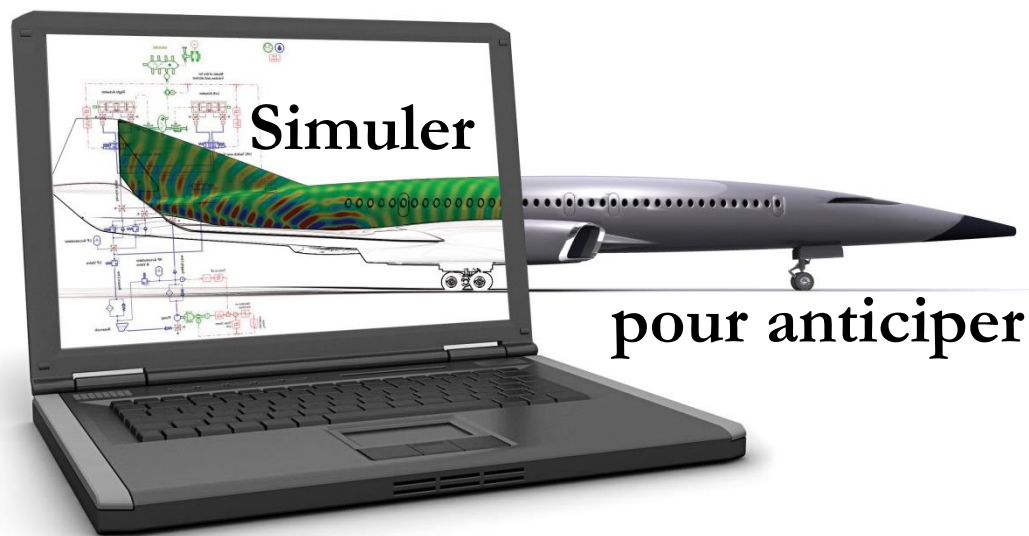


Correction des systèmes asservis

extraits du référentiel de 2nde année

Compétence visée	Savoir-faire associé
Proposer une démarche de résolution	<i>Proposer la démarche de réglage d'un correcteur proportionnel, proportionnel intégral et à avance de phase</i>
Mettre en œuvre un protocole expérimental	<i>Réaliser une intégration et une dérivation sous une forme numérique (somme et différence)</i>
Concevoir	<i>Choisir un type de correcteur adapté</i>



*Sciences Industrielles de l'Ingénieur
2^{ème} année de CPGE
Lycée Claude Fauriel*

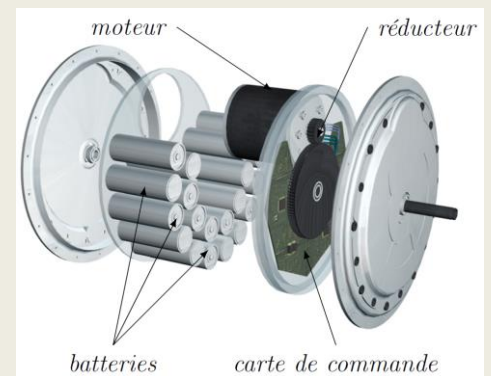
Illustration du cours : roue autonome ez-Wheel pour une implantation sur un fauteuil roulant

La roue autonome ez-Wheel (prononcer "easy-wheel") propose une solution simple pour tracter des équipements de manutention et de transport de charges, des véhicules légers et matériels médicaux.



La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, un contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur.

Nous nous proposons, dans cette illustration, d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant. Pour ce genre d'application, où il est nécessaire de mettre en place deux roues autonomes sur le fauteuil, la commande des roues n'est pas aussi simple que pour des applications à une seule roue. En effet, en plus de gérer le mouvement d'avance du fauteuil, il faut également gérer ses changements de direction. Les deux ez-Wheel étant implantées sur chacune des deux roues arrière, le pilotage des deux roues est lié afin de maîtriser la direction du fauteuil. Chacune des deux roues est alors asservie par l'intermédiaire de capteurs mesurant la vitesse de rotation de l'arbre du moteur brushless.

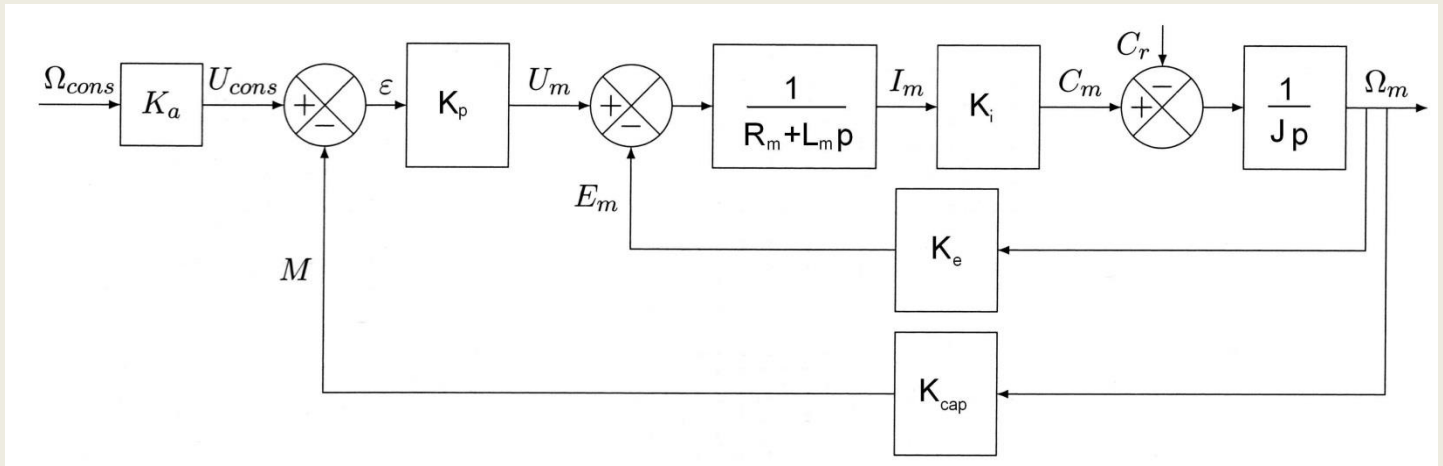


Le fonctionnement du fauteuil motorisé désiré par la société ez-Wheel est le suivant : l'utilisateur fournit une commande au système via un joystick. La carte de commande génère alors un ordre au variateur qui distribue une énergie électrique adaptée au moteur électrique. L'énergie mécanique de rotation fournie par le moteur électrique est alors adaptée et transmise aux roues. Afin d'assurer l'asservissement en vitesse des roues (et donc du fauteuil), des capteurs permettent de mesurer la vitesse de rotation sur l'arbre de sortie du moteur.

Exigences à satisfaire :

Stabilité :	Marge de phase	$\geq 45^\circ$
	Marge de gain	$\geq 10\text{dB}$
Précision :	Erreur statique pour une vitesse V_{cons} en ligne droite	$\pm 2\%$
	Dépassement sur la vitesse	aucun
Rapidité :	Temps de réponse à 5% pour chaque consigne	$\leq 0,3 \text{ s}$

Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse :



Où :

- U_m est la tension aux bornes de l'induit (en V) ;
- I_m est l'intensité circulant dans l'induit (en A) ;
- E_m est la tension contre-électromotrice (en V) ;
- Ω_m est la vitesse de rotation de l'arbre moteur (en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$) ;
- C_m est le couple moteur (en $\text{N}\cdot\text{m}$) ;
- C_r est le couple résistant appliqué sur l'arbre moteur (en $\text{N}\cdot\text{m}$) ;
- R_m est la résistance de l'induit $R_m = 0,18 \Omega$;
- L_m est l'inductance de l'induit, $L_m = 0,8 \text{ mH}$;
- J est la moitié de l'inertie équivalente de l'ensemble ramené à un arbre moteur $J = 0,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$;
- K_i est la constante de couple du moteur $K_i = 0,2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$;
- K_e est la constance de force contre-électromotrice $K_e = 0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$.
- K_{capt} est le gain du capteur à effet hall -modélisé par un gain pur - $K_{\text{capt}} = 0,2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$
- K_a est le gain de l'adaptateur qui convertit la vitesse de consigne en tension de consigne, $K_a = K_{\text{capt}}$
- K_p est le gain du correcteur proportionnel avec $K_p \geq 0$

Remarque : $K_e = K_i = K_{\text{capt}} = K_a$ On utilisera la notation K_a dans la suite de l'illustration.

On note les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot \Omega_{\text{cons}}(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$

Avec :

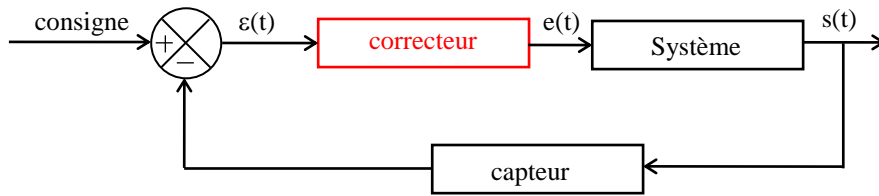
$$H_1(p) = \frac{\frac{K_p}{K_p + 1}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

et

$$H_2(p) = \frac{\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

1 – Structure générale :

Pour asservir le système, on installe une boucle de retour qui corrige les "erreurs" de la sortie. Il faut donc pouvoir comparer la sortie à une valeur de consigne (\Rightarrow **comparateur**) et corriger éventuellement la valeur de l'entrée du système (\Rightarrow **correcteur**).



2 – Correction (compensation) des systèmes asservis :

Un système est connu grâce à sa fonction de transfert et on en déduit ses caractéristiques : stabilité, précision et rapidité.

* la stabilité est la caractéristique la plus impérative : à une consigne bornée, la réponse doit être bornée quels que soient les parasites, les perturbations, les variations des paramètres (température, usure...) : il faut donc **prévoir une marge de sécurité**. L'instabilité est due à la présence d'une boucle de retour (un système mécanique non bouclé ne peut être instable), à des retards dans la chaîne directe, à un gain de la boucle ouverte trop élevé ...

* la rapidité caractérise la facilité du système à suivre des variations rapides de la consigne (on dit que l'asservissement est "mou" s'il est peu rapide : il faut donc le "raidir" pour le rendre plus rapide). **La rapidité augmente avec la bande passante de la FTBO et avec le gain statique de la FTBO.**

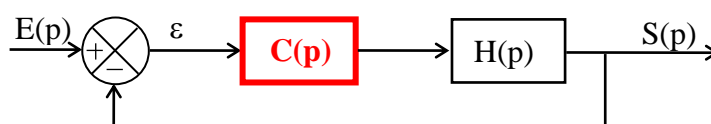
* la précision est caractérisée par l'écart entre la consigne et la sortie en régime permanent : elle augmente avec le gain statique de la FTBO et est liée à la présence d'intégrateurs dans la BO :

Rappels du cours sur les performances des systèmes asservis :

Soit α la classe de la FTBO :

$e(t)$	$E(p)$	écart statique	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha \geq 2$
$u(t)$	$1/p$	ε_s (en position)	$1/(1+K)$	0	0
$t.u(t)$	$1/p^2$	ε_v (en vitesse)	∞	$1/K$	0
$t^2.u(t)$	$1/p^3$	ε_a (en accélération)	∞	∞	$1/K$

Ces trois caractéristiques sont en général incompatibles : il faut donc faire des compromis. On corrige les systèmes asservis en ajoutant un correcteur (de fonction de transfert $C(p)$) dans la boucle ouverte :



2.1 – Correction proportionnelle : $C(p) = K$.

Pour augmenter la rapidité et la précision, $K > 1$.
 Pour augmenter la stabilité, $K < 1$.

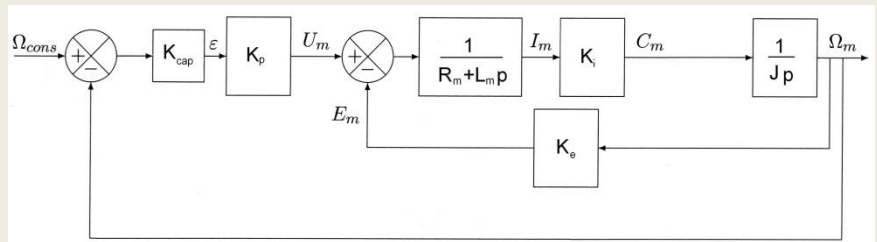
Détermination de K (K n'influe pas sur la phase de la FTBO car $\arg(K) = 0$) :

- en se donnant des marges de phase ou de gain :
 - si M_φ donnée : $\varphi = -180^\circ + M_\varphi \Rightarrow \omega \Rightarrow |K.H(j\omega)| = 1$ d'où K
 - si M_g donnée : $\varphi = -180^\circ \Rightarrow \omega \Rightarrow 20 \log ||K.H(j\omega)|| = -M_g$ d'où K
- en se donnant une marge d'amplitude :

On limite la résonance en se fixant un facteur de surtension $Q = \frac{|FTBF|_{\max i}}{|FTBF|_0} < 1,3 = 2,3 \text{ dB}$

Réglage d'un correcteur Proportionnel

Ci-contre le schéma-bloc de l'asservissement en vitesse



$$FTBO(p) = \frac{K_a^2 \cdot K_p}{K_a^2 + J \cdot p \cdot (R_m + L_m \cdot p)} = \frac{K_p}{1 + 2,25 \cdot p + 0,01 \cdot p^2} = K_p \times \frac{1}{1 + 2,25 \cdot p} \times \frac{1}{1 + 0,004 \cdot p}$$

Détermination de K_p pour obtenir une marge de phase égale à 45° :

Ci-contre le tracé de la FTBO dans le plan de Bode :

Puisque K_p n'a aucune influence sur la phase de la FTBO (argument nul),

il faut translater la courbe de gain pour que celui-ci s'annule à la pulsation où la phase vaut -135° .

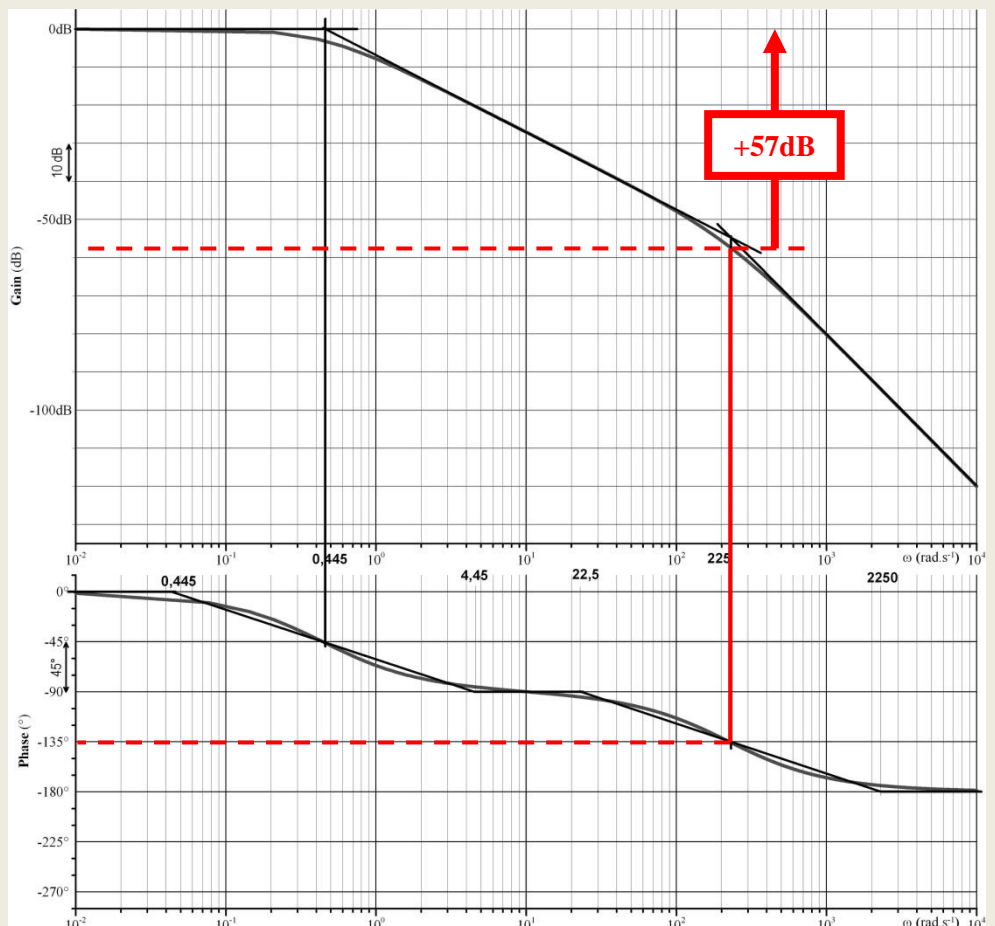
Graphiquement nous mesurons une translation de $+57\text{dB}$.

Le gain K_p doit donc vérifier :

$$20 \log K_p = +57 \text{ dB} \Leftrightarrow K_p = 10^{\frac{57}{20}}$$

Soit :

$$K_p \approx 708$$



Remarque : le réglage de K_p au regard de la marge de phase peut également être fait analytiquement, d'ailleurs ce calcul a déjà été fait dans le cours « Performances des systèmes asservis » (chapitre 3.1).

On peut également déterminer le réglage de K_p au regard de la précision ou de la rapidité ; ces calculs ont été faits dans le cours « Performances des systèmes asservis » (chapitres 3.2 et 3.3).

2.2 – Correction intégrale :

Comment augmenter la précision d'un système ? en introduisant un intégrateur dans la BO mais on risque ainsi de déstabiliser le système (en diminuant la phase de 90°) \Rightarrow on choisit un correcteur qui modifie la phase uniquement pour les basses fréquences :

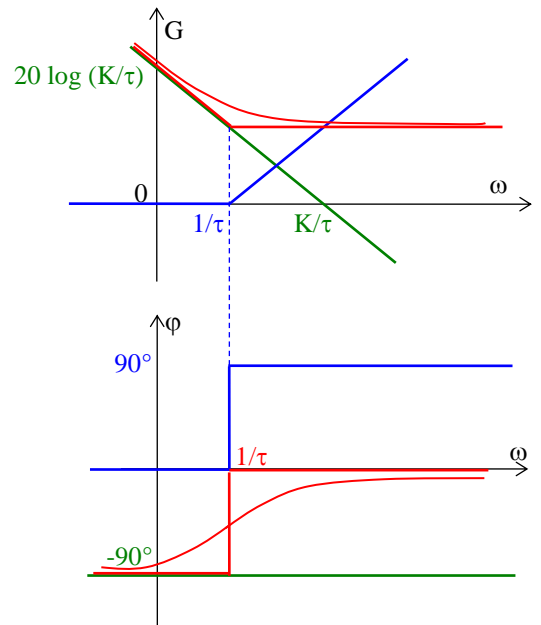
$$C(p) = K \frac{1 + \tau p}{\tau p}$$

$$C(p) = K/\tau p \cdot (1 + \tau p)$$

Choix du correcteur PI (proportionnel intégral) :

Il faut faire attention à ne pas diminuer la phase à la pulsation critique \Rightarrow éloigner $1/\tau$ de cette pulsation critique :

- si le système n'a pas de réserve de marge de phase ($M_\phi < 45^\circ$), on place le correcteur une décade avant ω_c soit $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_c}{10}$
- si on a une marge de phase suffisante, on peut placer le correcteur plus près de ω_c (jusqu'à $\frac{\omega_c}{4}$).



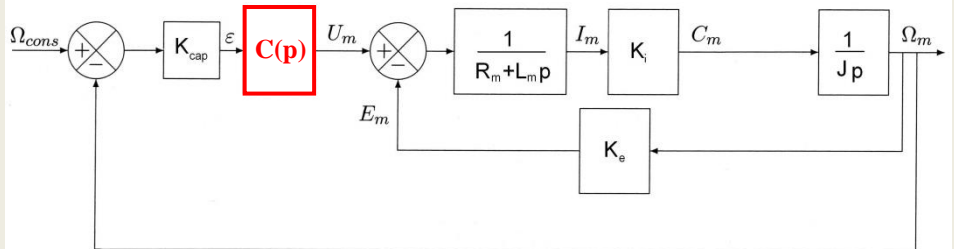
En général, ce correcteur diminue la rapidité du système.

Réglage d'un correcteur Intégral

Ci-contre le schéma-bloc de l'asservissement en vitesse :

Prenons :

$$C(p) = \frac{K_i}{p}$$



$$FTBO(p) = \frac{K_a^2 \cdot K_i}{p \cdot (K_a^2 + J \cdot p \cdot (R_m + L_m \cdot p))} = \frac{K_i}{p \cdot (1 + 2,25 \cdot p + 0,01 \cdot p^2)} = \frac{K_i}{p} \times \frac{1}{1 + 2,25 \cdot p} \times \frac{1}{1 + 0,004 \cdot p}$$

Détermination de K_p pour obtenir une marge de phase égale à 45° :

Il faut donc déterminer la pulsation pour laquelle $\text{Arg}(FTBO(j\omega_1)) = -135^\circ$

$$\Leftrightarrow \arctan \frac{2,25.\omega_1}{1-0,01.\omega_1^2} = 45^\circ \quad \text{soit} \quad 2,25.\omega_1 = 1-0,01.\omega_1^2$$

On trouve donc : $\omega_1 = 0,44 \text{ rad.s}^{-1} \quad \underline{\forall K_i}$

Cette exigence (de marge de phase) sera vérifiée si :

$$20.\log|FTBO(j\omega_1)| \leq 0 \Leftrightarrow 20.\log K_i \leq 20.\log \left(\omega_1 \cdot \sqrt{(1-0,01.\omega_1^2)^2 + (2,25.\omega_1)^2} \right)$$

Soit finalement : $K_i \leq 0,62$

Ce calcul montre bien qu'une action intégrale « pure » risque fortement de déstabiliser l'asservissement !

Influence de l'action intégrale sur la précision :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (1 - FTBF(p)) \cdot \frac{\Omega_0}{p} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Omega_0}{1 + FTBO(p)} \quad \text{avec} \quad FTBO(p) = \frac{K_i}{p \cdot (1 + 2,25.p + 0,01.p^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve un résultat logique puisque la classe de la FTBO passe de 0 à 1 après correction !

2.3 – Correction dérivée :

Quand on diminue le gain de la BO pour stabiliser le système, on diminue la rapidité et la précision en général. Pour améliorer la stabilité, on peut aussi augmenter la phase donc ajouter un correcteur à phase positive (action dérivée). Un dérivateur pur n'étant pas physiquement réalisable, on utilise un correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K \frac{1 + \tau p}{1 + a\tau p} \quad \text{avec } a < 1$$

$$C(p) = K(1 + \tau p)/(1 + a\tau p)$$

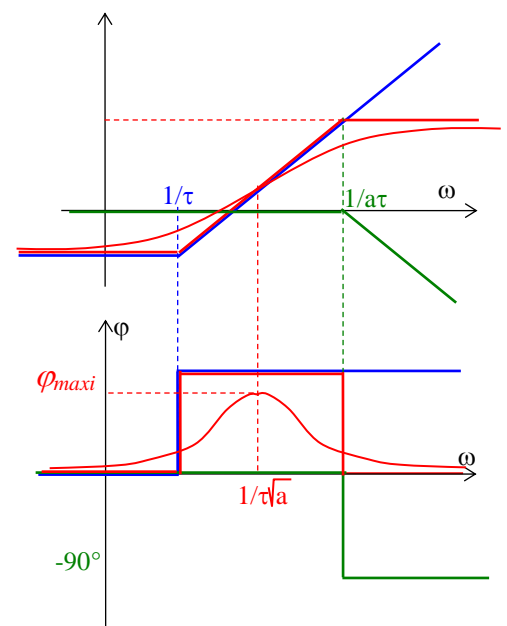
φ_{maxi} pour ω_n tel que $\log \omega_n = (\log(1/\tau) + \log(1/a\tau))/2$

$$\text{d'où } \omega_n = 1/(\tau \sqrt{a})$$

$$\varphi_{\text{maxi}} = \arctan \tau \cdot \omega_n - \arctan a \cdot \tau \cdot \omega_n \Rightarrow \tan \varphi_{\text{maxi}} = \frac{1-a}{2\sqrt{a}}$$

$$a = 0,5 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\text{maxi}} = 20^\circ$$

$$a = 0,1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\text{maxi}} = 50^\circ$$



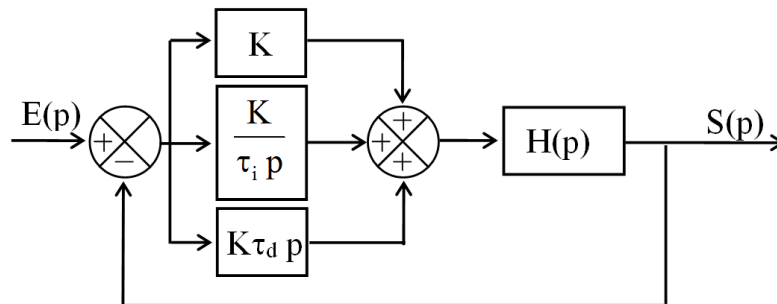
Choix du correcteur PD (Proportionnel Dérivé) :

il faut modifier la FTBO du système asservi au voisinage du point critique donc choisir ω_n proche de ω_c . Ensuite, on détermine a pour avoir une marge de phase correcte et K pour affiner les réglages (rapidité, précision ...).

Ce correcteur augmente la marge de phase, donc la stabilité et aussi la rapidité du système (en ajoutant un gain aux pulsations élevées) mais il provoque un pic important lors de changements brutaux de la consigne si a est faible. Il n'a pas d'influence sur la précision si $K = 1$.

De plus, la différentiation engendre des bruits de fond sur le signal ...

2.4 – Correction proportionnelle, intégrale et dérivée :



- l'action proportionnelle diminue le temps de réponse et l'erreur statique mais augmente le dépassement donc risque d'instabilité,
- l'action intégrale annule l'erreur statique donc augmente la précision mais risque d'instabilité,
- l'action dérivée augmente la marge de phase donc la stabilité.

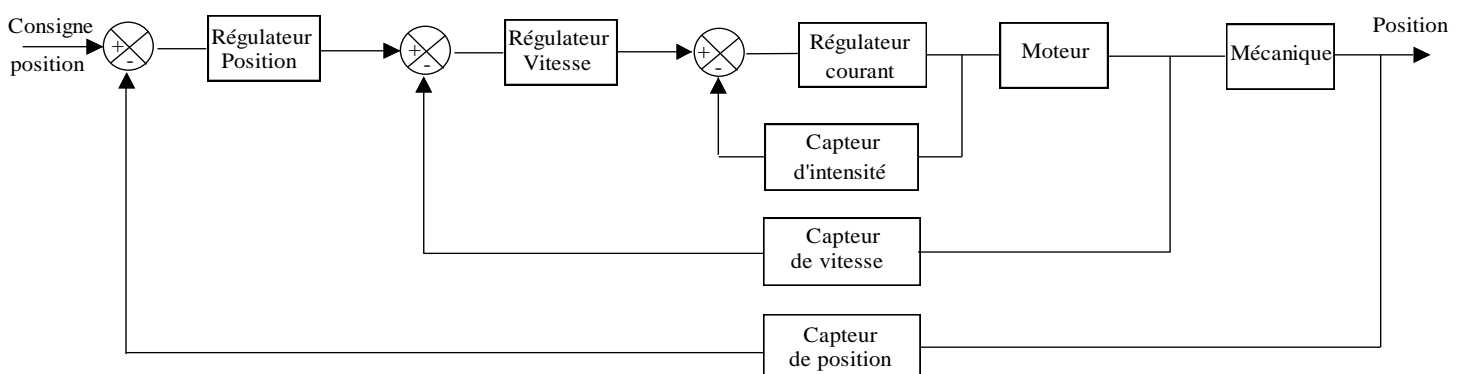
Le correcteur PID théorique a une fonction de transfert $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p \right)$.

En pratique, on prend $C(p) = K \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \frac{\tau_d p}{1 + a\tau_d p} \right)$ avec $a < 1$.

2.5 – Techniques de la compensation par retours dérivés :

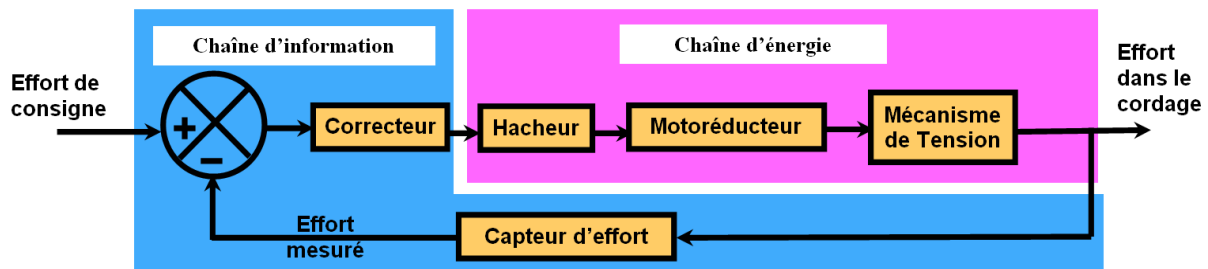
La technique de correction vue précédemment consiste à insérer un correcteur de fonction de transfert $C(p)$ dans la boucle. D'ailleurs ce correcteur peut être installé à différents endroits de la boucle.

Les techniques de compensation par retours dérivés consistent à créer des boucles internes sur les grandeurs dérivées de la grandeur commandée ; par exemple, le système ci-dessous permet de réguler en position, en vitesse et en courant (le courant permettant de réguler la puissance transmise au moteur) :



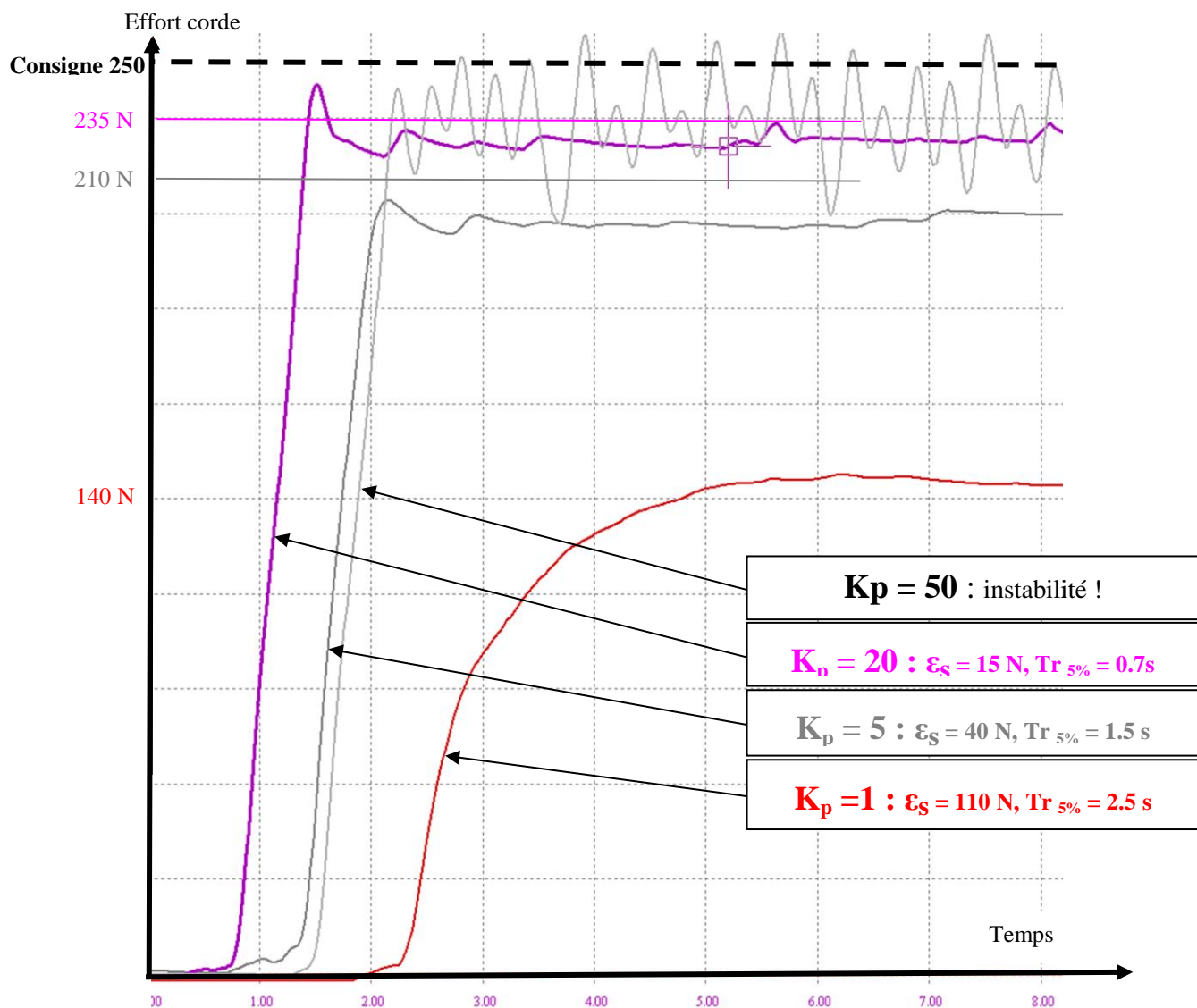
2.6 – Exemple sur la cordeuse : influence de K_p et K_i

La structure asservie de la cordeuse est représentée à l'aide du schéma ci-dessous :



Des essais ont été effectués avec mise en tension du cordage à une **consigne de 250 N**.

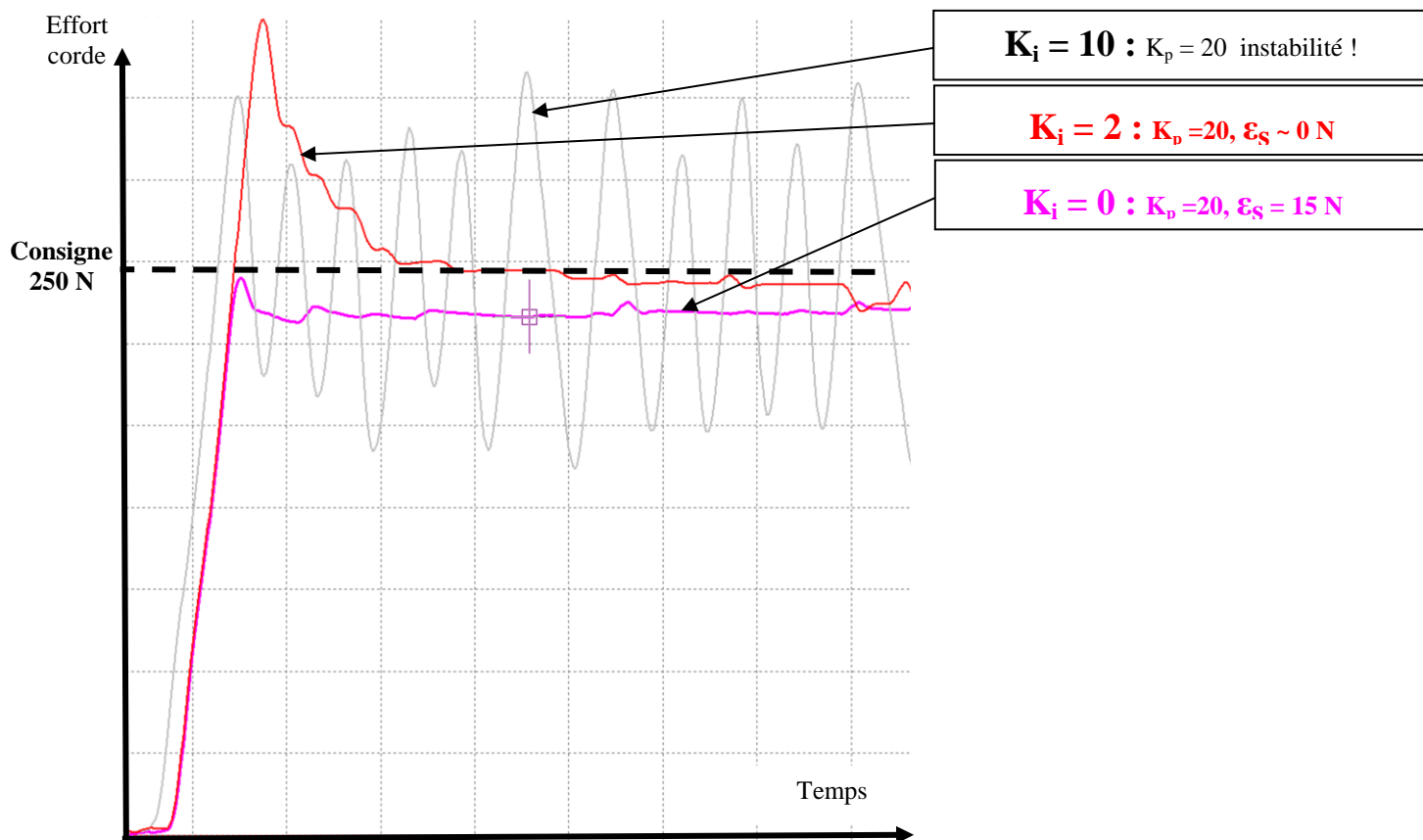
Les 4 courbes ci-dessous ont été obtenues en faisant varier le **gain proportionnel K_p** du correcteur : il représente un facteur multiplicatif du gain K_{BO} en boucle ouverte, c'est-à-dire un correcteur proportionnel.



Ainsi, à partir de ces mesures, nous allons conforter une règle générale importante :

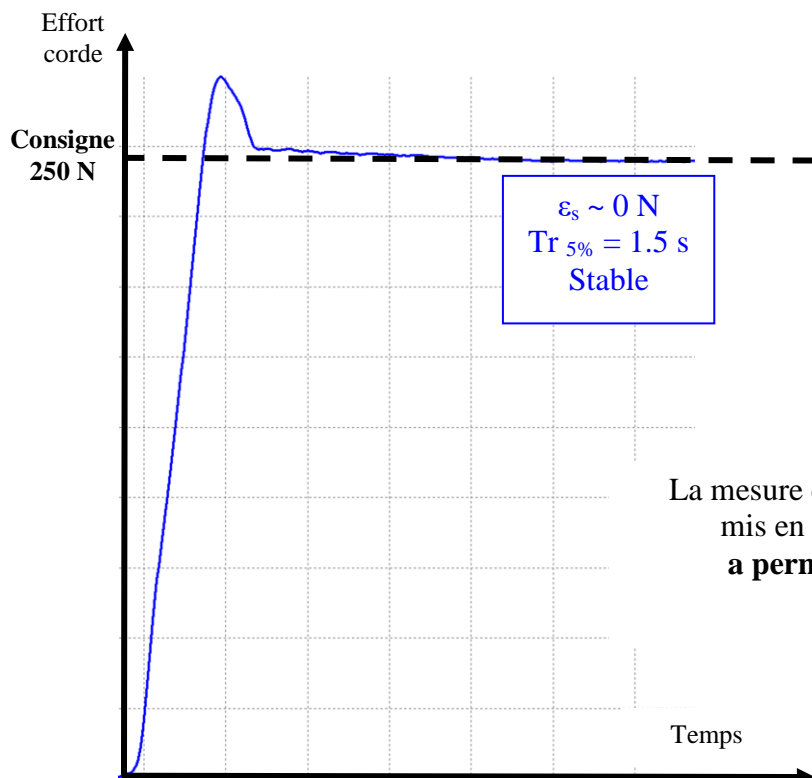
lorsque le gain en Boucle Ouverte K_{BO} augmente, la rapidité et la précision augmentent, mais la stabilité est moins bonne.

Les 3 courbes ci-dessous ont été obtenues en faisant varier le **gain intégral K_i** du correcteur :



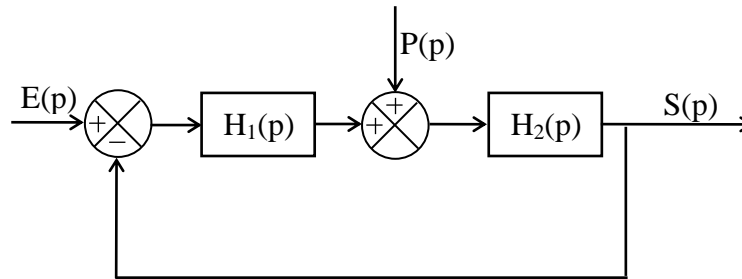
Ainsi, à partir de ces mesures, nous allons conforter une règle générale importante :

**lorsque le gain intégral K_i augmente,
la précision augmente mais la stabilité est moins bonne.**



La mesure ci-contre montre que le correcteur industriel, mis en place par les concepteurs de la cordeuse, **a permis d'obtenir un bon compromis entre rapidité, précision et stabilité.**

3 – Influence des perturbations sur la précision des systèmes asservis :



Théorème de superposition :
$$S(p) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2} E(p) + \frac{H_2}{1 + H_1 H_2} P(p)$$

Ecart $\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = \frac{1}{1 + H_1 H_2} E(p) - \frac{H_2}{1 + H_1 H_2} P(p)$

Soit $\varepsilon_{\text{pert}}(p)$ l'écart dû à la perturbation :
$$\varepsilon_{\text{pert}}(p) = \frac{H_2}{1 + H_1 H_2} P(p)$$

Supposons une perturbation en échelon: $p(t) = p_0 u(t) \Rightarrow P(p) = \frac{p_0}{p}$

En régime permanent, $|\varepsilon_{\text{pert}}| = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_{\text{pert}}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p_0 K_2 p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 K_2}$ en notant $H_i(p) \approx \frac{K_i}{p^{\alpha_i}}$

• 1^{er} cas: $\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad |\varepsilon_{\text{pert}}| = \frac{p_0 K_2}{1 + K_1 K_2}$

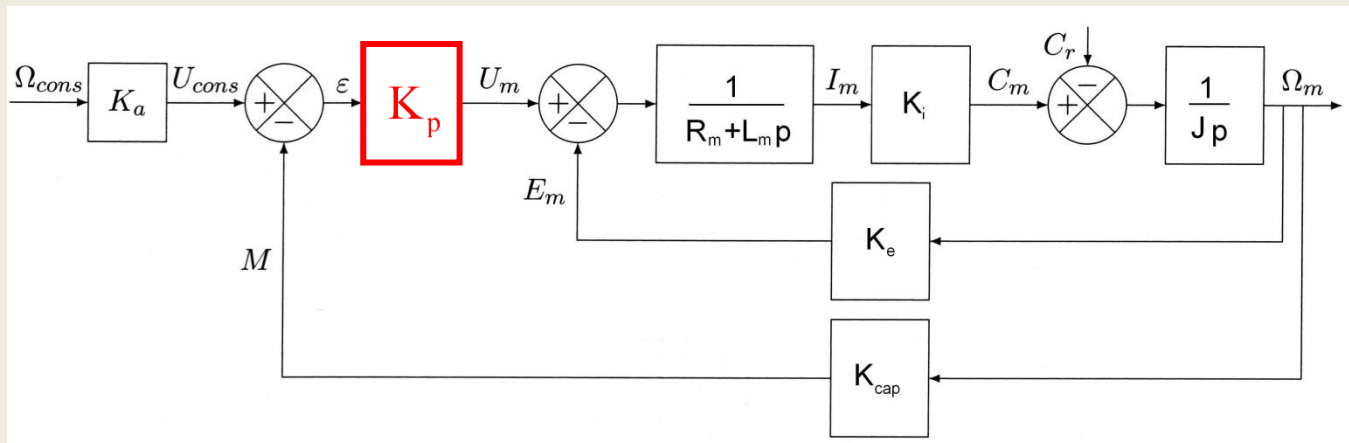
Quand il n'y a pas d'intégrateur dans la boucle ouverte, une perturbation engendre un écart statique non nul.

• 2^{ème} cas: $\alpha_1 + \alpha_2 > 0 \quad |\varepsilon_{\text{pert}}| = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p_0 p^{\alpha_1}}{K_1}$

- S'il y a au moins un intégrateur dans la boucle ouverte, la précision ne dépend que de la partie du système en amont de la perturbation.
- Si la partie amont du système comporte au moins un intégrateur, la perturbation n'a pas d'effet sur la précision : on dit que le système rejette la perturbation.

Par application du théorème de superposition, l'écart global $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ent}} + \varepsilon_{\text{pert}}$, il résulte donc de la somme de :

- ε_{ent} : écart dû à la consigne **E(p)** seule ($P(p)=0$) \Rightarrow problème dit de **poursuite** ;
- $\varepsilon_{\text{pert}}$: écart dû à la perturbation **P(p)** seule ($E(p)=0$) \Rightarrow problème dit de **régulation**.

Influence de l'action intégrale en amont d'une perturbation :Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse avec un correcteur Proportionnel :On note les fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot \Omega_{cons}(p) - H_2(p) \cdot C_r(p)$

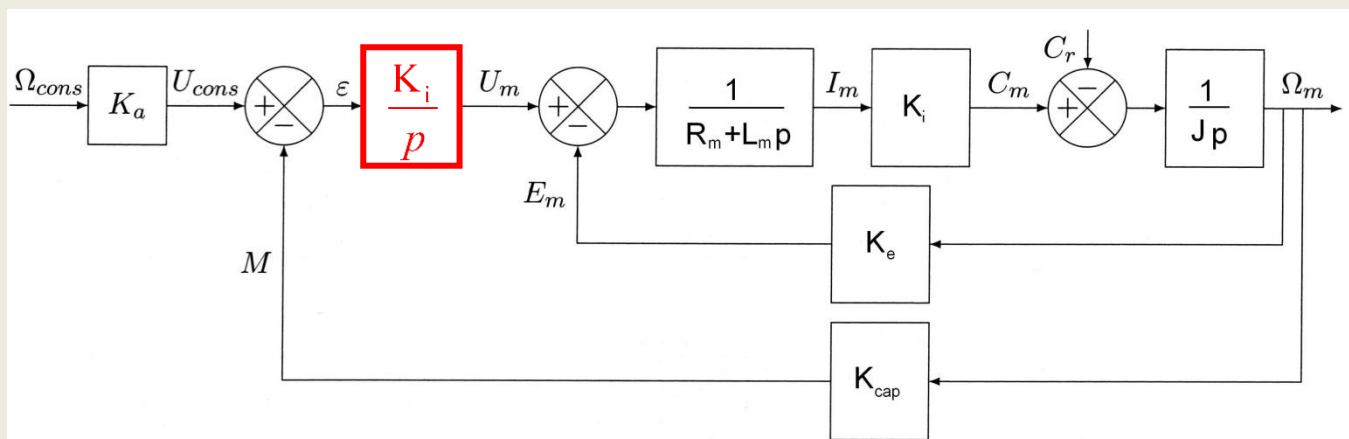
Avec :

$$H_1(p) = \frac{\frac{K_p}{K_p + 1}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2} \quad \text{et} \quad H_2(p) = \frac{\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2}$$

Etude de la précision vis-à-vis de la perturbation :(donc on suppose $\Omega_{cons}(p) = 0$)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s2} &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (\cancel{\Omega_{cons}(p)} - \Omega_m(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (-H_1(p) \cdot \cancel{\Omega_{cons}(p)} - H_2(p) \cdot C_r(p)) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{-\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \cdot p^2} \cdot C_0 = -\frac{R_m \cdot C_0}{K_a^2 \cdot (K_p + 1)} \end{aligned}$$

Ce calcul montre que la perturbation a une influence sur la précision de l'asservissement ; en effet, puisque la consigne est nulle, il faudrait que la sortie tende vers zéro en régime permanent malgré l'échelon de perturbation.

Schéma-bloc de l'asservissement en vitesse avec un correcteur Intégral :

Nous avons ainsi :

$$H_2(p) = \frac{\frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a \cdot \left(\frac{K_i + 1}{p}\right)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot \left(\frac{K_i + 1}{p}\right)} \cdot p + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot \left(\frac{K_i + 1}{p}\right)} \cdot p^2} = \frac{p \cdot \frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a^2 \cdot (K_i + p)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_i + p)} \cdot p^2 + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_i + p)} \cdot p^3}$$

Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{s2} &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(\cancel{\Omega_{cons}(p)} - \Omega_m(p) \right) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \left(-H_1(p) \cdot \cancel{\Omega_{cons}(p)} - H_2(p) \cdot C_r(p) \right) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \cdot \frac{R_m + L_m \cdot p}{K_a^2 \cdot (K_i + p)}}{1 + \frac{J \cdot R_m}{K_a^2 \cdot (K_i + p)} \cdot p^2 + \frac{J \cdot L_m}{K_a^2 \cdot (K_i + p)} \cdot p^3} \cdot C_0 = 0 \end{aligned}$$

Cette limite étant nulle, cela montre que la sortie tend vers zéro en régime permanent malgré l'échelon de perturbation.

Conclusion : la présence d'un intégrateur en amont de la perturbation garantit que celle-ci n'aura pas d'influence sur la précision de l'asservissement en régime permanent.