Exercice 1 : moments d'inertie et matrices d'inertie élémentaires

Q1 : $I(O,\vec{z}) = m\frac{R^2}{2}$

Q2 : $I(O) = \frac{3}{5}m\frac{R^2}{2}$ *et* $I(O,\vec{z}) = \frac{2}{5}m\frac{R^2}{2}$

Q3 :

$$\begin{pmatrix} m(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}) & 0 & 0 \\ 0 & m(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{-,-,z}$$

Q4 :

$$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Exercice 2 : matrice d'inertie d'un vilebrequin

Q1 : $I(G_1,\vec{z}) = m_1\frac{{R_1}^2}{2} + m_2\frac{{R_2}^2}{2} + m_2\frac{{a_2}^2}{2} + m_3\frac{{R_3}^2}{2} + m_3\frac{{a_3}^2}{2}$

Q2 : $I(G_1) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & I(G_1,\vec{z}) \end{bmatrix}$

$$avec\ A = m_1\left(\frac{{R_1}^2}{4}+\frac{{h_1}^2}{12}\right) + m_2\left(\frac{{R_2}^2}{4}+\frac{{h_2}^2}{12}\right) + m_2\frac{{c_2}^2}{2} + m_3\left(\frac{{R_3}^2}{4}+\frac{{h_3}^2}{12}\right) + m_3\frac{{c_3}^2}{2}$$

$$et\ \ B = m_1\left(\frac{{R_1}^2}{4}+\frac{{h_1}^2}{12}\right) + m_2\left(\frac{{R_2}^2}{4}+\frac{{h_2}^2}{12}\right) + m_2\left(\frac{{a_2}^2}{2}+\frac{{c_2}^2}{2}\right) + m_3\left(\frac{{R_3}^2}{4}+\frac{{h_3}^2}{12}\right) + m_3\left(\frac{{a_3}^2}{2}+\frac{{c_3}^2}{2}\right)$$

$$et\ E = m_2 a_2 c_2 + m_3 a_3 c_3$$

Exercice 3 : inertie du robot de chirurgie mini-invasive (extrait E3a MP 2019)

Q1 : Le modèle géométrique présentée fait apparaitre un plan de symétrie : Le plan $(\boldsymbol{O_1};\overrightarrow{z_1},\overrightarrow{x_1})$. Les produits d'inertie $-\boldsymbol{D} = \iint \boldsymbol{y.z.dm}$ et $-\boldsymbol{F} = \iint \boldsymbol{x.y.dm}$ sont donc nuls.

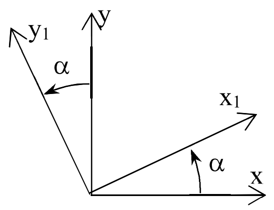
Q2 : Juste une lecture de la matrice : $\boldsymbol{J_1 = 8400\ kg.mm^2}$

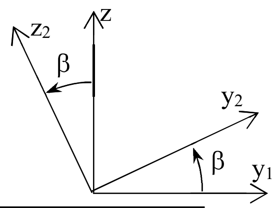
Q3 : Les dimensions du moteur sont petites devant la distance du centre de masse $\boldsymbol{G_{M2}}$ à l'axe de rotation.

Q4 : $\boldsymbol{J_{M2} = m_{M2}.{x_{1M2}}^2 = 0,6\times(211)^2 = 26700\ kg.mm^2}$

Q5 : Inertie max : A Inertie mini : F

Exercice 4 : calculs d'éléments dynamiques d'une éolienne domestique





$\vec{\Omega}(1/R) = \dot{\alpha}\,\vec{z}$

$\vec{\Omega}(2/1) = \dot{\beta}\,\vec{x}_1$

Q1 : torseur cinématique de 1/R : $\boxed{\mathcal{V}(1/R) = {}_O\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}}$

torseur cinématique de 2+3/R : $\mathcal{V}(2+3/R) = {}_P\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(2/R) = \vec{\Omega}(3/R) \\ \vec{V}(P\in 2/R) = \vec{V}(P\in 3/R) \end{Bmatrix}$

$\vec{\Omega}(2/R) = \vec{\Omega}(2/1) + \vec{\Omega}(1/R) = \dot{\beta}\,\vec{x}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}$

$\vec{V}(P\in 2/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d(a\vec{x}_1 + b\vec{z}_2)}{dt}\right]_R$ avec $\left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{z}_2}{dt}\right]_{R_2} + \vec{\Omega}(2/R)\wedge\vec{z}_2 = (\dot{\beta}\,\vec{x}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z})\wedge\vec{z}_2$

soit $\boxed{\mathcal{V}(2+3/R) = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} + \dot{\beta}\,\vec{x}_1 \\ a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + b\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 - b\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2 \end{Bmatrix}}$

Q2 : $\vec{\sigma}_O(1/R) = \mathcal{I}_O(1)\,.\,\vec{\Omega}(1/R)$ avec $\mathcal{I}_O(1) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & I \end{pmatrix}_{R_1}$ soit $\vec{\sigma}_O(1/R) = \dot{\alpha}\,(-E_1\,\vec{x}_1 + I\,\vec{z})$

donc $\boxed{\vec{\sigma}_O(1/R).\,\vec{z} = I\,\dot{\alpha}}$

Q3 : $\mathcal{C}(2/R) = \left\{ \begin{matrix} M\,\vec{V}(G \in 2/R) \\ \vec{\sigma}_O(2/R) \end{matrix} \right\}_O$ avec $\vec{V}(G\in 2/R) = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}\right]_R = \left[\dfrac{d(a\vec{x}_1)}{dt}\right]_R = a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

$\vec{\sigma}_O(2/R) = \vec{\sigma}_G(2/R) + \overrightarrow{OG} \wedge M\,\vec{V}(G\in 2/R) = \mathcal{I}_G(2)\,.\,\vec{\Omega}(2/R) + a\,\vec{x}_1 \wedge M\,a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$

La matrice de **2** étant exprimée dans la base R_2, on doit projeter $\vec{\Omega}(2/R)$ sur cette même base :

$\dot{\beta}\,\vec{x}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z} = \dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\,(\sin\beta\,\vec{y}_2 + \cos\beta\,\vec{z}_2)$

$$\vec{\sigma}_G(2/R) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{R_2} . \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha}\sin\beta \\ \dot{\alpha}\cos\beta \end{pmatrix}_{R_2} = A\,\dot{\beta}\,\vec{x}_2 + \dot{\alpha}\,(B\sin\beta\,\vec{y}_2 + C\cos\beta\,\vec{z}_2)$$

d'où $\boxed{\mathcal{C}(2/R) = \left\{ \begin{matrix} M\,a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 \\ M\,a^2\,\dot{\alpha}\,\vec{z} + A\,\dot{\beta}\,\vec{x}_1 + B\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 + C\,\dot{\alpha}\cos\beta\,\vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_O}$

$\mathcal{C}(3/R) = \left\{ \begin{matrix} m\,\vec{V}(P \in 3/R) \\ \vec{\sigma}_O(3/R) \end{matrix} \right\}_O$ avec $\vec{\sigma}_O(3/R) = \vec{\sigma}_P(3/R) + \overrightarrow{OP} \wedge m\,\vec{V}(P\in 3/R)$ et $\vec{\sigma}_P(3/R) = \mathcal{I}_P(3)\,.\,\vec{\Omega}(3/R)$

3 étant une masse ponctuelle, elle est sans dimension donc $\mathcal{I}_P(3)$ est la matrice nulle.

$\vec{\sigma}_O(3/R) = (a\,\vec{x}_1 + b\,\vec{z}_2) \wedge m(a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + b\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 - b\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2)$

d'où $\boxed{\mathcal{C}(3/R) = \left\{ \begin{matrix} m\,(a\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + b\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{x}_1 - b\,\dot{\beta}\,\vec{y}_2\,) \\ m[\,a^2\,\dot{\alpha}\,\vec{z} + b(b\,\dot{\beta} - a\,\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{x}_1 + b^2\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 - a\,b\,\dot{\beta}\,\vec{z}_2 \end{matrix} \right\}_O}$

Q4 : $\boxed{\vec{\delta}_0(1/R).\,\vec{z} = \dfrac{d}{dt_{/R}}\vec{\sigma}_O(1/R).\,\vec{z} = \dfrac{d}{dt_{/R}}(\vec{\sigma}_O(1/R).\vec{z}) = I\,\ddot{\alpha}}$ rotation autour d'un axe fixe

Q5 : $\vec{\delta}_0(2/R).\,\vec{z} = \left[\dfrac{d\vec{\sigma}_O(2/R)}{dt}\right]_R .\,\vec{z} = \dfrac{d(\vec{\sigma}_O(2/R).\vec{z}}{dt}$ car O et $\vec{z}$ sont fixes dans R

d'où $\boxed{\vec{\delta}_0(2/R).\,\vec{z} = \dfrac{d}{dt}[(M\,a^2 + B\sin^2\beta + C\cos^2\beta)\;\dot{\alpha}\,]}$

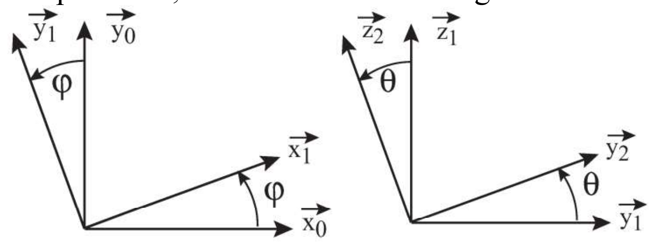
Q6 : $\vec{\delta}_0(3/R).\,\vec{x}_1 = \left[\dfrac{d\vec{\sigma}_O(3/R)}{dt}\right]_R .\,\vec{x}_1 = \dfrac{d(\vec{\sigma}_O(3/R).\vec{x}_1}{dt} - \vec{\sigma}_O(3/R).\left[\dfrac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_R$ (car O fixe dans R mais pas $\vec{x}_1$)

$$= m\,b\,\frac{d}{dt}(b\,\dot{\beta} - a\;\dot{\alpha}\;\cos\beta) - m[\,a^2\,\dot{\alpha}\,\vec{z} + b(b\,\dot{\beta} - a\,\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{x}_1 + b^2\,\dot{\alpha}\sin\beta\,\vec{y}_2 - a\,b\,\dot{\beta}\,\vec{z}_2\,].\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

d'où $\boxed{\vec{\delta}_0(3/R).\,\vec{x}_1 = m\,b\,(b\,\ddot{\beta} - a\;\ddot{\alpha}\;\cos\beta - b\;\dot{\alpha}^2\;\sin\beta\cos\beta)}$

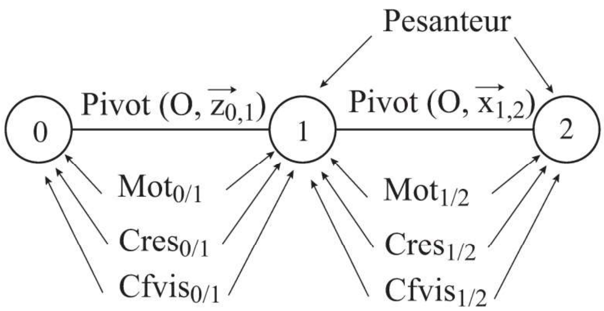
Exercice 6 : équations de Mouvement complexes de la station de mesures topo (extrait Centrale MP 2017)

Q1 : Les deux angles n'étant pas coplanaires, il faut dessiner deux figures de changement de bases.



$$\overrightarrow{OP} = D.\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ D.\cos\theta \\ D.\sin\theta \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -D.\cos\theta.\sin\varphi \\ D.\cos\theta.\cos\varphi \\ D.\sin\theta \end{pmatrix}_{B_0} \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -D.\cos\theta.\sin\varphi \\ D.\cos\theta.\cos\varphi \\ D.\sin\theta \end{pmatrix}_{B_0}$$

Q2 :



Q3 :

	Ensemble isolé	Equation scalaire	Justification
(E1)	1 & 2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$	On utilise le fait que le moment en (O sur ($\vec{z}_{0,1}$) est nul dans la liaison pivot entre (0) et (1) (*les actions mécaniques dans les pivots n'interviendront pas*), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.
(E2)	2	Théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{x}_{1,2}$	On utilise le fait que le moment en (O sur ($\vec{x}_{1,2}$) est nul dans la liaison pivot entre (1) et (2) (*les actions mécaniques dans la pivot n'interviendront pas*), les actions mécaniques de frottement sec, fluide et du moteur sont connues. Nous aurons donc l'équation différentielle souhaitée.

Q4 :

A) On isole (1 & 2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec{z}_{0,1}$:

$$\Sigma\overrightarrow{M^{O}_{ext\to 1\cup 2}}.\vec{z}_{0,1} = \left(\overrightarrow{\delta^{O}_{1/0}} + \overrightarrow{\delta^{O}_{2/0}}\right).\vec{z}_{0,1}$$

$$0 + 0 + \frac{k_1}{\rho_1}.\left(c_{m1} + c_{r1} - f_{Eq1}.\dot{\varphi}\right) = \frac{d\left(\overrightarrow{\sigma^{O}_{1/0}}.\vec{z}_{0,1}\right)}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{\sigma^{O}_{2/0}}.\vec{z}_{0,1}\right)}{dt}$$ (*car O est centre d'inertie des pièces 1 et 2*).

Remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur $\vec{z}_{0,1}$ de la pesanteur et de la liaison pivot entre 0 et 1.

Avec $\overrightarrow{\sigma^O_{2/0}} = I(O,2).\overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{bmatrix} J_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z2} \end{bmatrix}_{(O,B_2)} . \begin{bmatrix} \dot\theta \\ \dot\varphi.\sin\theta \\ \dot\varphi.\cos\theta \end{bmatrix}_{(B_2)} = \begin{bmatrix} J_{x2}.\dot\theta \\ J_{y2}.\dot\varphi.\sin\theta \\ J_{z2}.\dot\varphi.\cos\theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ (*car O est centre d'inertie de 2*) ;

de plus $\vec z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$ d'où $\dfrac{k_1}{\rho_1}.\left(c_{m1} + c_{r1} - f_{Eq1}.\dot\varphi\right) = J_{Z1}.\ddot\varphi + \dfrac{d\left(J_{z2}.\dot\varphi.\cos^2\theta + J_{y2}.\dot\varphi.\sin^2\theta\right)}{dt}$

Il vient : $\boxed{c_{m1} + c_{r1} = J_{Z1}.\dfrac{\rho_1}{k_1}.\ddot\varphi + f_{Eq1}.\dot\varphi + \dfrac{d\left(J_{z2}.\dfrac{\rho_1}{k_1}.\dot\varphi.\cos^2\theta + J_{y2}.\dfrac{\rho_1}{k_1}.\dot\varphi.\sin^2\theta\right)}{dt}}$

Nous obtenons la première équation avec : $\boxed{A_1 = J_{Z1}.\dfrac{\rho_1}{k_1}}$, $\boxed{B_1 = f_{Eq1}}$; $\boxed{C_{11} = J_{y2}.\dfrac{\rho_1}{k_1}}$; $\boxed{C_{12} = J_{z2}.\dfrac{\rho_1}{k_1}}$

B) On isole (2) et on applique le théorème du moment dynamique en (O) en projection sur $\vec x_{1,2}$:

$\Sigma\overrightarrow{M^O_{ext\to 2}}.\vec x_{1,2} = \overrightarrow{\delta^O_{2/0}}.x_{1,2} = \dfrac{d\left(\overrightarrow{\sigma^O_{2/0}}.\vec x_{1,2}\right)}{dt} - \overrightarrow{\sigma^O_{2/0}}.\left(\dfrac{d\vec x_{1,2}}{dt}\right)_0$ (*car O est centre d'inertie de la pièce 2*).

$0 + 0 + \dfrac{k_2}{\rho_2}.\left(c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2}.\dot\theta\right) = J_{x2}.\ddot\theta - \overrightarrow{\sigma^O_{2/0}}.\dot\varphi.\vec y_1$ (*remarque : les deux « 0 » représentent le moment en O sur* $\vec x_{1,2}$ *de la pesanteur et de la liaison pivot entre 1 et 2*). $\vec y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix}_{(B_2)}$

D'où $\dfrac{k_2}{\rho_2}.\left(c_{m2} + c_{r2} - f_{Eq2}.\dot\theta\right) = J_{x2}.\ddot\theta - \left(J_{y2} - J_{z2}\right).\dot\varphi^2.\sin\theta.\cos\theta$

Il vient : $\boxed{c_{m2} + c_{r2} = J_{x2}.\dfrac{\rho_2}{k_2}.\ddot\theta + f_{Eq2}.\dot\theta + \left(J_{z2} - J_{y2}\right).\dfrac{\rho_2}{2.k_2}.\dot\varphi^2.\sin(2.\theta)}$

Nous obtenons la deuxième équation avec : $\boxed{A_2 = J_{x2}.\dfrac{\rho_2}{k_2}}$, $\boxed{B_2 = f_{Eq2}}$; $\boxed{C_2 = \left(J_{z2} - J_{y2}\right).\dfrac{\rho_2}{2.k_2}}$

Q5 : Dans le cas particulier où $\theta = 0°$, nous obtenons : $c_{m1} + c_{r1} = A_1.\ddot\varphi + B_1.\dot\varphi + C_{12}.\ddot\varphi$ & $c_{m2} + c_{r2} = A_2.\ddot\theta + B_2.\dot\theta$

Ce qui donne :

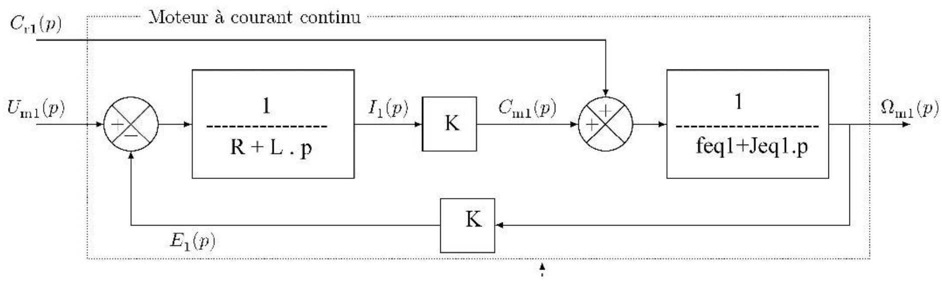
$$C_{m1} + C_{r1} - B_1\,\rho_1\,\omega_{m1} = (A_1 + C_{12})\rho_1\,\dot\omega_{m1} = J_{eq1}\,\dot\omega_{m1}$$

$$C_{m2} + C_{r2} - B_2\,\rho_2\,\omega_{m2} = A_2\rho_2\,\dot\omega_{m2} = J_{eq2}\,\dot\omega_{m2}$$

D'où : $J_{eq1} = (A_1 + C_{12})\rho_1 = \frac{\rho_1{}^2}{k_1}(J_{z1} + J_{z2})$ $\quad J_{eq2} = A_2\,\rho_2 = \frac{\rho_2{}^2}{k_2}J_{x2}$

Q6 :

Le bloc laissé vide dans le schéma-bloc est un intégrateur dont la fonction de transfert est $\boxed{\dfrac{1}{p}}$. En effet, l'entrée de ce bloc est $\Omega_{m1}(p)$ alors que la sortie est $\theta_{m1}(p)$.



Exercice 7 : roulement sans glissement et équation de mouvement (extrait Ccp MP 2015)

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{z}_1$ (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$\vec{\Gamma}(G \in bille/0) = \left[\frac{d\left((R-r)\dot{\theta}\vec{x}_1\right)}{dt}\right]_0 = (R-r)\ddot{\theta}\vec{x}_1 + (R-r)\dot{\theta}\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right]_0 = (R-r)\ddot{\theta}\vec{x}_1 - (R-r)\dot{\theta}^2\vec{z}_1$$

$$\text{TRD}/\vec{z}_1 : \quad -m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg\vec{z}_0.\vec{z}_1 + F(t)\vec{x}_0.\vec{z}_1 - N_1$$

$$\Rightarrow \quad -m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta + F(t)\sin\theta - N_1$$

$$\Rightarrow \quad N_1 = F(t)\sin\theta + mg\cos\theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème du moment dynamique au point G en projection sur $\vec{y}_0$ (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$rT_1 = \frac{2}{5}mr^2\left(\frac{r-R}{r}\ddot{\theta}\right) \quad \Rightarrow T_1 = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur $\vec{x}_1$ (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$\text{TRD}/\vec{x}_1 : \quad m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + T_1 + mg\vec{z}_0.\vec{x}_1 + F(t)\vec{x}_0\vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + T_1 - mg\sin\theta + F(t)\cos\theta \; avec T_1 = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} - mg\sin\theta + F(t)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad F(t)\cos\theta = m(R-r)\ddot{\theta} + f_v(R-r)\dot{\theta} - \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + mg\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad F(t)\cos\theta = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\sin\theta + m(R-r)\ddot{\theta} + \frac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad F(t)\cos\theta = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\sin\theta + \frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$$

Exercice 9: Inertie équivalente de l'axe en translation du robot chirurgical MC²E (extrait Mines mp 2016)

Q1 : Transmission par courroie inextensibles et sans glissement : $\omega_e = \frac{R_i}{R_e}.\omega_i = \frac{R_i}{R_e}.r.\omega_m$

Roulement sans glissement en I_i : $\vec{V}(I_i, 4/g_i) = \vec{0}$

d'où $\vec{V}(I_i, 4/0) = v(t)\vec{z}_0 = \vec{V}(I_i, g_i/0) = -R_g\vec{y}_0 \wedge \omega_e\vec{x}_0 = R_g.\omega_e\vec{z}_0$

$v(t) = R_g.\frac{R_i}{R_e}.r.\omega_m(t)$ $\qquad$ $z(t) = R_g.\frac{R_i}{R_e}.r.\theta_m(t)$ en supposant les CI nulles

Q2 : $$E_c(E/0) = \frac{1}{2}\left(I_m\omega_m^2 + I_r\omega_i^2 + I_i\omega_i^2 + I_e\omega_e^2 + 2I_p\omega_e^2 + 6I_g\omega_e^2 + m_4.v^2\right)$$

D'où : $$J = I_m + r^2(I_r + I_i) + (I_e + 2I_p + 6I_g)\frac{r^2R_i^2}{R_e^2} + m_4.\frac{r^2R_i^2.R_g^2}{R_e^2}$$

Exercice 10: inertie équivalente du bras robot maxpid

Q1 : On calcule l'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement :

$$T_{(ensemble/0)} = T_{(Stator/0)} + T_{(Vis/0)} + T_{(écrou/0)} + T_{(bras/0)} +$$

Stator et bras tournent autour d'un axe fixe : pas nécessaire de « sortir l'artillerie lourde » c'est-à-dire les torseurs. On utilise le résultat simplifié : T = ½.J.ω^2 .

Ce qui donne : $T_{(Stator/0)} = \frac{1}{2}.J_{stator}.\dot{\alpha}^2$ et $T_{(bras/0)} = \frac{1}{2}.J_{bras}.\dot{\theta}^2$

Les deux moments d'inertie J_{stator} et J_{bras} ne sont pas donnés (on donne celui du bras associé à l'écrou) parce qu'on va négliger les énergies cinétiques dans lesquelles intervient $\dot{\alpha}$. La courbe donnée (θ = f(α)) montre que sur une variation de 60° pour θ, α ne varie que de 16°. On va donc négliger les énergies cinétiques dues à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$. Celle du stator qui tourne autour de l'axe fixe $(O,\overrightarrow{Z_0})$ d'un angle α , celle de la vis qui tourne à la fois autour de son axe propre (angle β) et de l'axe $(O,\overrightarrow{Z_0})$ d'un angle α. Enfin celle de l'écrou qui sera donc considéré fixe par rapport au bras alors qu'il tourne d'un angle θ + α. On néglige ces énergies cinétiques également parce que les solides concernés sont de dimensions radiales et masses faibles.

Compte tenu de l'énoncé et des remarques précédentes pour l'ensemble bras+écrou+masses en considérant le cet ensemble ne fait que tourner autour de l'axe $(B,\overrightarrow{Z_0})$ d'un angle θ :

$$T_{(bras+écrou/0)} = \frac{1}{2}.(J_b + J_m).\dot{\theta}^2 \qquad \text{les masses sont accrochées au bras}$$

Pour la vis + rotor = E moteur qui tournent autour de leur axe propre et de l'axe $(O,\overrightarrow{Z_0})$ d'un angle α :

$$T_{(Vis+rotor/0)} = 1/2\begin{Bmatrix} m_E\overrightarrow{V_{(G\in E/0)}} \\ \overrightarrow{\sigma_{(O,E/0)}} \end{Bmatrix}_O \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{E/0}} \\ \overrightarrow{V_{(O\in E/0)}} \end{Bmatrix}_O = 1/2\begin{Bmatrix} m_E\overrightarrow{V_{(G\in E/0)}} \\ \overrightarrow{\sigma_{(O,E/0)}} \end{Bmatrix}_O \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{E/0}} = \dot{\beta}\overrightarrow{x_v} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$$

$\overrightarrow{\Omega_{E/0}} = \dot{\beta}\overrightarrow{x_v} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$ avec $\overrightarrow{x_v} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\|\overrightarrow{OC}\|}$ l'axe de la vis

$\overrightarrow{\sigma_{(O,E/0)}} = I(O,E).\overrightarrow{\Omega_{E/0}}$ car O est fixe dans le repère 0

$$= \begin{bmatrix} J_v + J_r & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \qquad \text{matrice et vecteur rotation exprimés dans la base } (\overrightarrow{x_v}, \overrightarrow{y_v}, \overrightarrow{z_0})$$

$$= (J_v + J_r)\dot{\beta}\overrightarrow{x_v} + *\,\dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$ * est le moment d'inertie de E/axe $(O,\overrightarrow{Z_0})$ non donné puisqu'on va le négliger

D'où $T_{(Vis+rotor/0)} = 1/2(J_v + J_r)\dot{\beta}^2 + *\,\dot{\alpha}^2 \approx 1/2(J_v + J_r)\dot{\beta}^2$ on néglige les NRJ Cinétiques dues à la rotation d'angle α.

D'où : $T_{(ensemble/0)} = \frac{1}{2}.\left[(J_b + J_m).\dot{\theta}^2 + (J_v + J_r)\dot{\beta}^2\right] = \frac{1}{2}.\left[(J_b + J_m).(\lambda.\dot{\beta})^2 + (J_v + J_r)\dot{\beta}^2\right] = \frac{1}{2}.J_{eq}\dot{\beta}^2$

D'où l'inertie équivalente : $J_{eq} = (J_b + J_m)\lambda^2 + J_v + J_r$

Q2 : pour la vis on utilise le résultat à connaître pour un cylindre : moment d'inertie autour de son axe = ½ m R^2

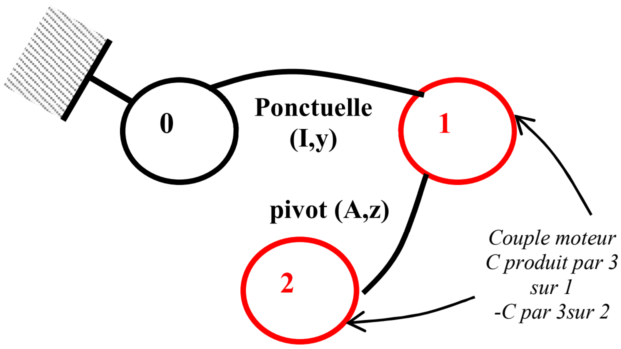
$J_v = \frac{1}{2}.(\rho.\pi.r_v^2.L_v).r_v^2 = \frac{1}{2}\rho.\pi.L_v.r_v^4 = 0.5 * 7600 * 3.14 * 0.195 * (0.005)^4$ en kg.m^2

Pour les masses supposées ponctuelles, c'est huygens qui nous dit : $J_m = m.L_m^2 = 1.3.(0.28)^2$ en kg.m^2

D'où : $J_{eq} = (0.022 + 0.10192).(\frac{1}{112})^2 + 1.45.10^{-6} + 7.10^{-6} = 18.3.10^{-6}$en kg.m^2

Exercice 11 : Puissances des actions mécaniques dans une roue de véhicule

Faisons un graphe des liaisons sur lequel on rajoute les actions mécaniques : action de pesanteur négligée devant les modules des actions aux liaisons.



Q1 : torseurs cinématiques

- $V_{2/0} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = v(t)\vec{x} \end{Bmatrix}_A$ car le châssis du véhicule se déplace en translation en ligne droite suivant $\vec{x}$

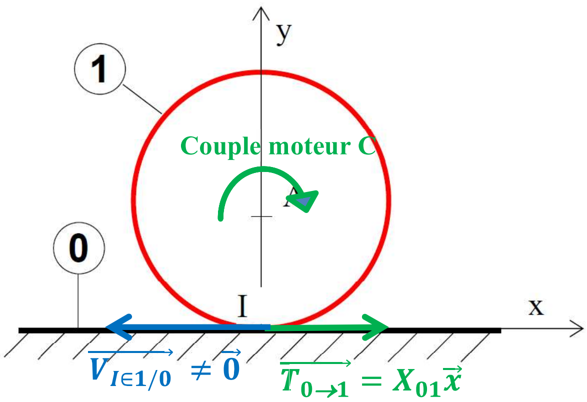
- $V_{1/2} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/2}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ car la liaison ½ est une pivot sans frottement d'axe $(A, \vec{z})$

  Remarque : si v(t) > 0 alors $\overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z}$ en considérant $\omega > 0$.

- $V_{1/0} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \overrightarrow{\Omega_{1/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ car RSG en I

Q2 : torseurs d'action mécanique ou inter-effort

- $T_{0\to 1} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to 1}} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{I,0\to 1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ car liaison ponctuelle de normale $(I, \vec{y})$ avec frottement puisqu'il y a RSG. Si glissement (la roue arrière 1 patine) l'action due au frottement ($\overrightarrow{T_{0\to 1}}$) est vers la droite



- $T_{1\to 2} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1\to 2}} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A,1\to 2}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_A$ car liaison pivot sans frottement avec hypothèse Pb plan (xAy)

- $T_{3\to 1} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3\to 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,3\to 1}} = -C\vec{z} \end{Bmatrix}_A$ car C (supposé > 0) engendre ω donc la rotation de 1/2 dans le sens horaire.

Q3 : Puissances

- $P_{0\to 1/0} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0\to 1}} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{I,0\to 1}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_I \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{I\in 1/0}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_I = \overrightarrow{R_{0\to 1}}.\overrightarrow{V_{I\in 1/0}} + \overrightarrow{M_{I,0\to 1}}.\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = 0$ Résultat à connaître : la puissance perdue est nulle dans le cas du roulement sans glissement. P ext.

- $P_{3\to 1/2} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3\to 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,3\to 1}} = -C\vec{z} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/2}} = \vec{0} \end{Bmatrix}_A = C.\omega$ c'est la puissance motrice fournie par le moteur.

  Pint en isolant 1+2+3.

- $P_{3\to 1/0} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3\to 1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{A,3\to 1}} = -C\vec{z} \end{Bmatrix}_A \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = v(t)\vec{x} \end{Bmatrix}_A = C.\omega$ Pext en isolant uniquement 1

- $P_{1\to 2/1} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\to 2}} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A,1\to 2}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_A = 0$ Résultat à connaître : la puissance perdue dans une liaison parfaite est nulle (pas de frottement). Pint en isolant 1+2
- $P_{0\to 1/2} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{0\to 1}} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A,0\to 1}} = \vec{0} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{R_{0\to 1}} = a.X_{01}\vec{z} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/2}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_A = a.X_{01}.\omega$ ni Pext, ni Pint.
- $P_{2\to 1/0} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{2\to 1}} = -X_{12}\vec{x} - Y_{12}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A,2\to 1}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = a.\omega\vec{x} \end{matrix}\right\}_A = -a.X_{12}.\omega$ Pext en isolant uniquement 1
- $P_{1\to 2/0} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{1\to 2}} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A,1\to 2}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = v(t)\vec{x} \end{matrix}\right\}_A = X_{12}.v(t)$ Pext en isolant uniquement 2

Q4 : $P_{0\to 1/0} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{0\to 1}} = X_{01}\vec{x} + Y_{01}\vec{y} \\ \overrightarrow{M_{A,0\to 1}} = (\lambda.Y_{01} + a.X_{01})\vec{z} \end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -\omega\vec{z} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = v(t)\vec{x} \end{matrix}\right\}_A = X_{01}.v(t) - \omega(\lambda.Y_{01} + a.X_{01})$

Or $\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 1/2}} + \overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = v(t)\vec{x} = \overrightarrow{V_{I\in 1/0}} + \overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = a.\omega\,\vec{x}$

D'où $P_{0\to 1/0} = X_{01}.v(t) - \omega(\lambda.Y_{01} + a.X_{01}) = -\lambda.Y_{01}.\omega$ C'est la puissance perdue

On perd d'autant plus d'NRJ que le véhicule est lourd (Y_{01} grand), le pneu est sous gonflé (λ augmente), la vitesse augmente.

Exercice 12: Applications du T.E.C.

<u>Exercice 5 (Q2) avec le TEC :</u> on isole tous les solides qui bougent donc 1+2

BAME : $T_{0\to 1}, T_{0\to 2}, T_{rotor\ moteur\to 1}, T_{ressort\to 2}, T_{fluide\to 2}$. La pesanteur est négligée

BAMI : $T_{2\to 1}$ ou $T_{1\to 2}$

Le TEC sur 1+2 s'écrit : $\frac{d}{dt}Ec_{(1+2/0)} = P_{ext\to 1+2} + P_{int}$

$$Ec_{(1+2/0)} = Ec_{(1/0)} + Ec_{(2/0)} = \frac{1}{2}.I.\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}.m.v^2$$

Car 1 tourne autour de l'axe fixe $(O, \overrightarrow{x_0})$ d'un angle θ et son moment d'inertie autour de cet axe est noté I.

Car 2 translate rectilignement avec une vitesse $v(t) = e.\dot{\theta}.cos\theta$ (calcul exo4) et sa masse est notée m)

$$P_{ext\to 1+2} = P_{0\to 1/0} + P_{0\to 2/0} + P_{rotor\ moteur\to 1/0} + P_{fluide\to 2/0} + P_{ressort\to 2/0}$$

- $P_{0\to 1/0}$ et $P_{0\to 2/0}$ sont nulles : liaisons parfaites
- $P_{rotor\ moteur\to 1/0} = C.\dot{\theta}$ c'est la puissance motrice (>0)
- $P_{fluide\to 2/0} = \vec{F}_{fluide}.v(t)\overrightarrow{z_0} = -F(t).e.\dot{\theta}.cos\theta$ puissance tantôt < 0 (si F(t) >0 et que 2 monte), tantôt > 0 (si F(t) >0 et que 2 descend)
- $P_{ressort\to 2/0} = \vec{F}_{ressort}.v(t)\overrightarrow{z_0} = -(F_0 + k.e.sin\theta).e.\dot{\theta}.cos\theta$ même remarque que pour la puissance précédente.
- Remarque : inutile ici de faire des comoments de torseur. Les mouvements sont une rotation autour d'un axe fixe générée par un couple pour 1, et une translation alternative rectiligne générée ou empêchée par des forces (centrales) pour 2. On utilise « P = Cω » quand ça tourne et « P = F.V » quand ça translate. Attention toutefois, ceux sont des produits scalaires…

$P_{int} = P_{2\to 1/2}$ ou $P_{1\to 2/1}$ attention de ne pas la compter 2 fois

$$= T_{2\to 1} \otimes V_{1/2} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{2\to 1}} = -Z_{21}\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{M_{B,2\to 1}} = \vec{0} \end{matrix}\right\}_B \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{1/2}} \\ \overrightarrow{V_{B\in 1/2}} = v_g\overrightarrow{y_0} \end{matrix}\right\}_B = 0$$

Le détail du calcul n'est pas nécessaire puisque la liaison est une ponctuelle parfaite. ($\overrightarrow{V_{B\in 1/2}} = v_g\overrightarrow{y_0}$ est la vitesse de glissement en B et est donc dans le plan tangent commun au contact, donc sur l'horizontale passant par B)

D'où : $I.\dot{\theta}.\ddot{\theta} + m.e^2.\dot{\theta}.\ddot{\theta}.cos^2\theta - m.e^2.\dot{\theta}^3.sin\theta = C.\dot{\theta} - F(t).e.\dot{\theta}.cos\theta - (F_0 + k.e.sin\theta).e.\dot{\theta}.cos\theta$

Soit l'équation de mouvement :

$$I.\ddot{\theta} + m.e^2.\ddot{\theta}.cos^2\theta - m.e^2.\dot{\theta}^2.sin\theta = C - F(t).e.cos\theta - (F_0 + k.e.sin\theta).e.cos\theta$$

Exercice 7 avec le TEC :

On l'applique à la bille donc pas de puissance intérieure : $\frac{d}{dt}Ec_{(\text{bille}/0)} = P_{ext\to\text{bille}/0}$

- $Ec_{(\text{bille}/0)} = 1/2\begin{Bmatrix} m\overrightarrow{V_{(G\in bille/0)}} \\ \overrightarrow{\sigma_{(G,bille/0)}} \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{bille/0}} \\ \overrightarrow{V_{(G\in bille/0)}} \end{Bmatrix}_G = 1/2\begin{Bmatrix} mv\,\overrightarrow{x_1} \\ J\,\omega_b\overrightarrow{y_0} \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \omega_b\overrightarrow{y_0} \\ v\,\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_G = \frac{1}{2}(mv^2 + J{\omega_b}^2)$
- $P_{ext\to\text{bille}/0} = P_{pes\to\text{bille}/0} + P_{fluide\to\text{bille}/0} + P_{bob\to\text{bille}/0} + P_{rail\to\text{bille}/0}$

$P_{pes\to\text{bille}/0} = \begin{Bmatrix} m.g\,\overrightarrow{z_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \omega_b\overrightarrow{y_0} \\ v\,\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_G = -m.g.v\,sin\theta$

$P_{fluide\to\text{bille}/0} = \begin{Bmatrix} -f_v v\,\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \omega_b\overrightarrow{y_0} \\ v\,\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_G = -f_v.v^2$

$P_{bob\to\text{bille}/0} = \begin{Bmatrix} F(t)\overrightarrow{x_0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \otimes \begin{Bmatrix} \omega_b\overrightarrow{y_0} \\ v\,\overrightarrow{x_1} \end{Bmatrix}_G = F(t).v\,cos\theta$

$P_{rail\to\text{bille}/0} = O$ RSG en I

D'où : $mv\,\dot{v} + J\omega_b\,\dot{\omega_b} = -m.g.v\,sin\theta - f_v.v^2 + F(t).v\,cos\theta$

Après utilisation des résultats de l'énoncé, on retrouve bien l'équation de mouvement :

$$\frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta} + f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\,sin\theta = F(t)cos\theta$$