

# DS N°2

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Durée 4 heures

Le devoir comporte 2 problèmes extraits de sujet de concours

**Problème N°1** : extrait CCinp MP 2020

**Problème N°2** : court extrait E3a PSI 2014

## Problème N°1 : Gyropode à usage professionnel Hublex

### Présentation générale

Le système étudié dans ce sujet, appelé Hublex, est un gyropode professionnel destiné à faciliter le déplacement des collaborateurs au sein d'entreprises, administrations, hôpitaux... Lorsque ces lieux sont de grande taille. La **figure 1** montre un exemple d'utilisation dans l'entrepôt d'une entreprise de logistique.

Il est en effet prouvé que les déplacements piétons sur les lieux de travail peuvent générer, s'ils sont répétitifs, des fatigues extrêmes ainsi que des troubles musculo-squelettiques. Il n'est pas rare, par exemple, qu'au cours d'une journée, des employés marchent plusieurs kilomètres sur leur lieu de travail, parfois sous la forme de micro-déplacements. C'est dans ce contexte qu'a été conçu, en France, le Hublex.

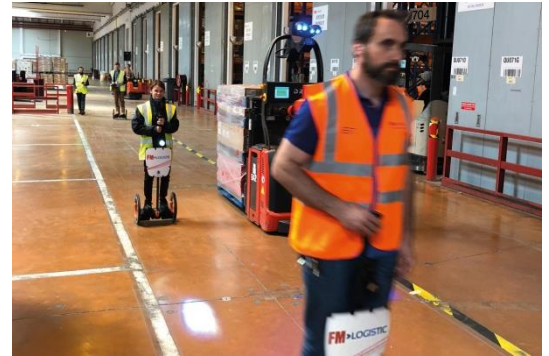
Ce gyropode doit permettre de réduire la fatigue des collaborateurs afin d'augmenter leur bien-être. Sa particularité est d'avoir été spécifiquement créé pour s'intégrer dans un environnement de travail grâce à des caractéristiques techniques qui le différencient des gyropodes classiques : Prise en main en moins de 5 minutes.

- Maniabilité optimisée.
- Faible largeur, inférieure à 40 cm.
- Léger, moins de 12 kg.
- Utilisable 24 h/24 grâce à sa batterie interchangeable.

On peut voir, **figure 2**, une vue générale du produit. Les principales exigences du système sont présentées dans le diagramme d'exigences (voir **document réponse**).

### Description du produit

Le Hublex se caractérise par une conception originale alliant une structure et une motorisation à la fois épurées mais aussi très modernes (voir **figure 3**). Le châssis est constitué de pièces évidées et les roues sont sans moyeu ("hubless" en anglais). La liaison pivot entre chaque roue et le châssis est astucieusement réalisée par l'intermédiaire de liaisons quasi ponctuelles, ce qui permet de limiter le coût et la quantité de matière nécessaire à sa réalisation.

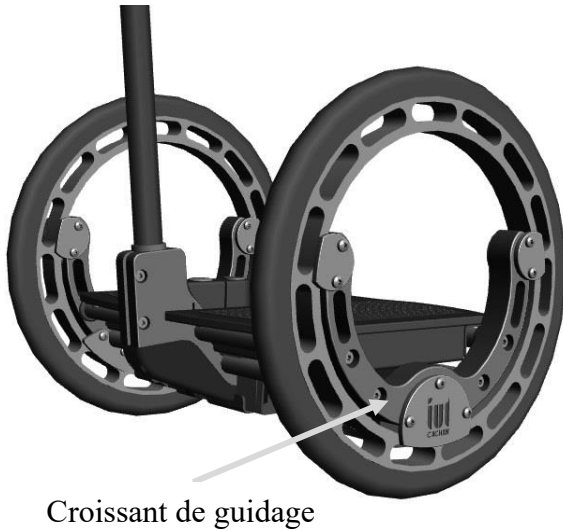


**Figure 1** - Hublex en utilisation dans une entreprise de logistique



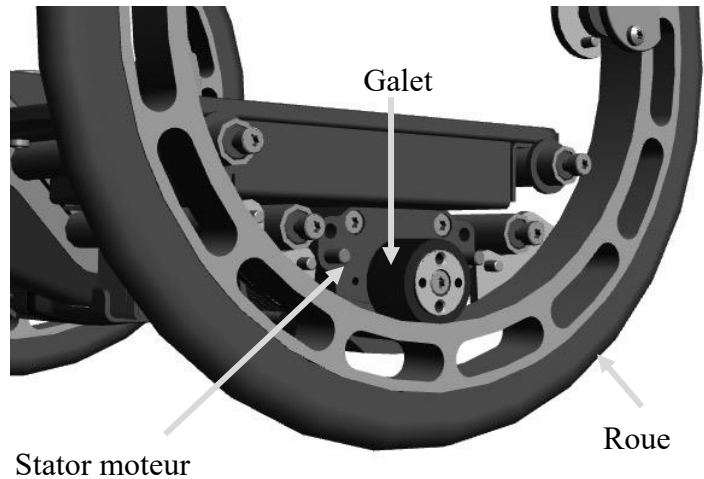
**Figure 2** - Vue générale du Hublex

Chaque roue possède sa propre motorisation constituée d'une machine synchrone avec autopilotage permettant de s'affranchir de l'utilisation d'un réducteur. La transmission se résume à un galet directement lié à l'arbre moteur entraînant la roue (voir **figure 4**).



Croissant de guidage

**Figure 3** - Vue extérieure de la structure



Stator moteur

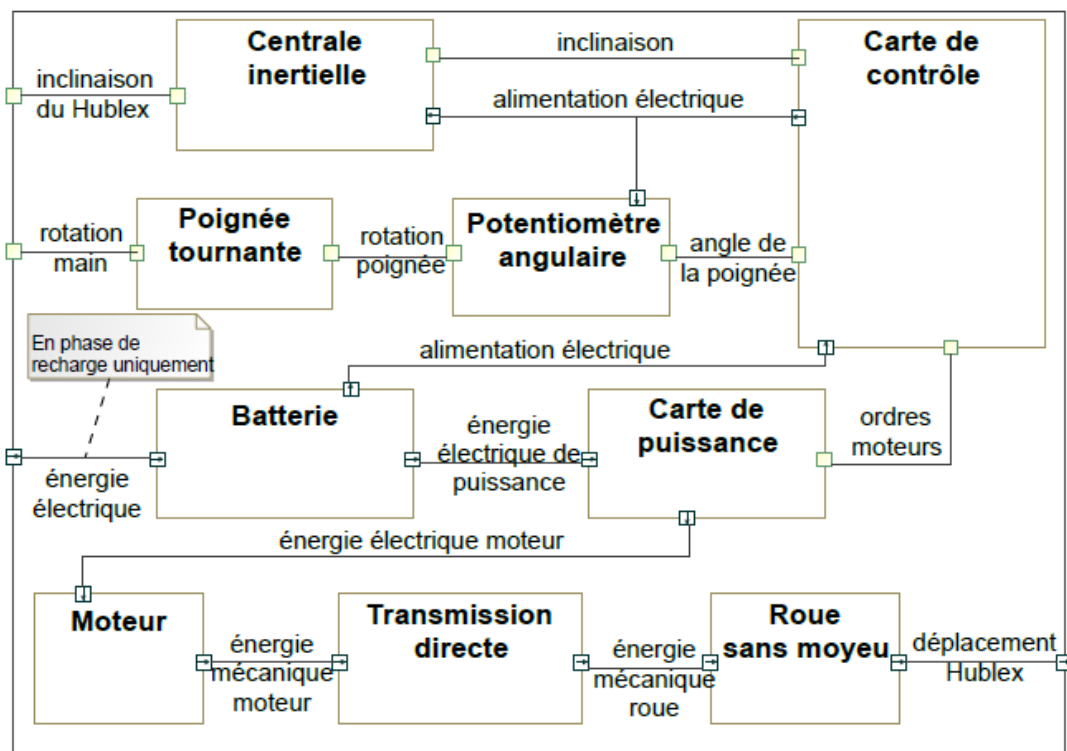
**Figure 4** - Détail de la transmission par galet (sans croissant de guidage)

### Principe de fonctionnement général

Les principaux composants constituant un Hublex sont rassemblés dans le diagramme de bloc interne (**figure 5**).

Le pilote commande la direction et la vitesse. Pour avancer ou reculer, il influe sur l'inclinaison du châssis du Hublex en se penchant en avant ou en arrière. Cette inclinaison, mesurée grâce à une centrale inertielle, correspond à une consigne d'accélération imposée par le pilote. Lorsqu'il se penche, l'équilibre de l'ensemble {Hublex + pilote} est assuré par le Hublex lui-même grâce à un asservissement visant à le redresser.

La trajectoire du Hublex est, quant à elle, imposée par le pilote à l'aide d'une poignée située au bout du manche qu'il tourne en fonction de la direction souhaitée. Ainsi, la vitesse de chaque moteur est construite à partir de ces deux commandes. C'est la carte de contrôle qui génère la consigne d'intensité électrique imposée au moteur par l'intermédiaire d'un onduleur situé dans la carte de puissance.



**Figure 5** - Diagramme de bloc interne

**Question 1.** Compléter le schéma fonctionnel du **DR1**, en précisant le nom des composants associés aux fonctions, ainsi que le type de chaque flux (*I* pour information, *E* pour énergie, *M* pour matière). On y reportera uniquement les composants présents dans le diagramme de bloc interne (**figure 5**).

## Partie I - Génération de la consigne des vitesses moteurs

**Objectif :** analyser le comportement cinématique du Hublex en virage et sur sol plat, afin d'obtenir la consigne de vitesse à imposer aux moteurs permettant de répondre notamment aux exigences «1.1.1» et «1.4.3».

### I.1-Paramétrage du Hublex en trajectoire circulaire

Le Hublex dispose de deux moteurs permettant d'entraîner chaque roue indépendamment l'une de l'autre. Le mode de transmission utilisé est un mode direct par friction, de rapport  $k = 0,092$ , entre un galet solidaire de l'arbre moteur gauche 4 et la jante de la roue gauche 2. La transmission côté droit est identique. Les arbres moteurs gauche 4 et droit 5 ne sont pas représentés.

On note  $\vec{V}(M, S_i/R_j)$  la vitesse du point  $M$  dans le mouvement du solide  $S_i$  par rapport au repère  $R_j$ .

Le paramétrage est donné sur les **figures 6, 7 et 8**. On définit :

Le repère  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié au sol 0.

Le repère  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au châssis 1 du Hublex, avec  $O_1$  le point situé au centre du châssis 1 et sur l'axe de rotation des roues tel que  $\vec{V}(O_1, S_1/R_0) = V \cdot \vec{y}_1$ .

Le repère  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  lié à la roue gauche 2, avec  $A$  le centre de la roue gauche.

Le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  lié à la roue droite 3, avec  $B$  le centre de la roue droite. On note le vecteur constant  $\vec{AB} = L \cdot \vec{x}_1$  et  $R$  le rayon d'une roue.

On s'intéresse à une trajectoire du Hublex (châssis 1) par rapport au sol de type circulaire, de centre  $O_0$  et de rayon de courbure  $r_c$ , telle que définie **figure 8**. Les roues sont en contact avec le sol au point  $I$  (pour la roue gauche 2) et au point  $J$  (pour la roue droite 3). On fera l'hypothèse de roulement sans glissement des roues sur le sol en ces points. Le graphe des liaisons associé est donné **figure 9**.

On définit :

- La position angulaire du châssis 1 par rapport au sol 0 par l'angle  $\theta_{10}$ , autour de  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$  tel que  $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- La position angulaire de la roue gauche 2 par rapport au châssis 1 par l'angle  $\theta_{21}$ , autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$  tel que  $\theta_{21} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$ .
- La position angulaire de la roue droite 3 par rapport au châssis 1 par l'angle  $\theta_{31}$ , autour de  $\vec{x}_1 = \vec{x}_3$  tel que  $\theta_{31} = (\vec{y}_1, \vec{y}_3) = (\vec{z}_1, \vec{z}_3)$ .

On note :

- Les vitesses angulaires associées :  $\omega_{10} = \frac{d\theta_{10}}{dt}$ ,  $\omega_{21} = \frac{d\theta_{21}}{dt}$  et  $\omega_{31} = \frac{d\theta_{31}}{dt}$ .
- La vitesse de rotation de l'arbre moteur gauche 4 (respectivement arbre moteur droit 5), non représenté sur les figures, par rapport au châssis 1 par  $\omega_{41}$  (respectivement  $\omega_{51}$ ).

### I.2-Étude de la cinématique pour une trajectoire circulaire

**Question 2.** Donner sans démonstration la relation entre  $V$ ,  $r_c$  et la vitesse de rotation  $\omega_{10}$ .

**Question 3.** En utilisant l'hypothèse de roulement sans glissement, établir la relation entre  $V$ ,  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{21}$  et les constantes  $L$  et  $R$ .

**Question 4.** En déduire l'expression de la vitesse de rotation du moteur gauche  $\omega_{41}$  en fonction de  $V$ ,  $\omega_{10}$ , du rapport de transmission  $k$  et d'autres paramètres géométriques.

**Question 5.** En déduire la relation entre  $V$ ,  $\omega_{10}$  et la vitesse de rotation du moteur droit  $\omega_{51}$ .

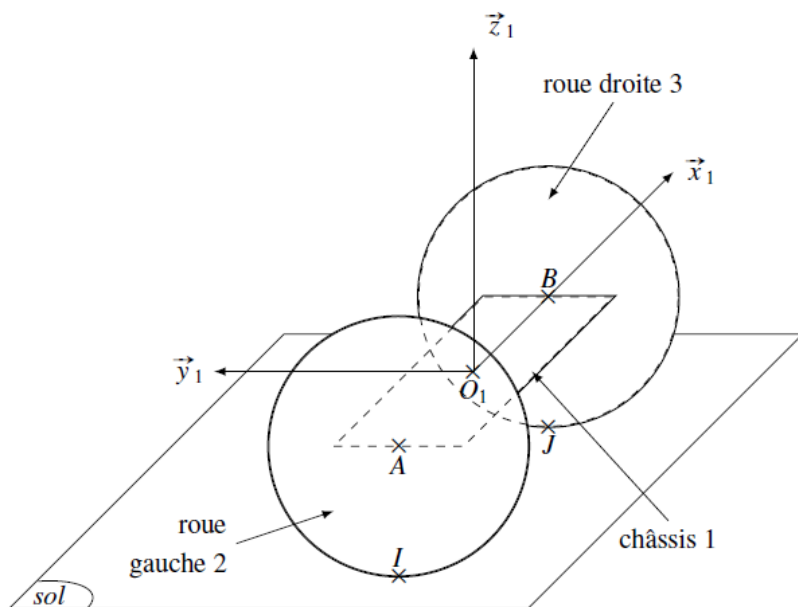


Figure 6 - Paramétrage du Hublex en perspective

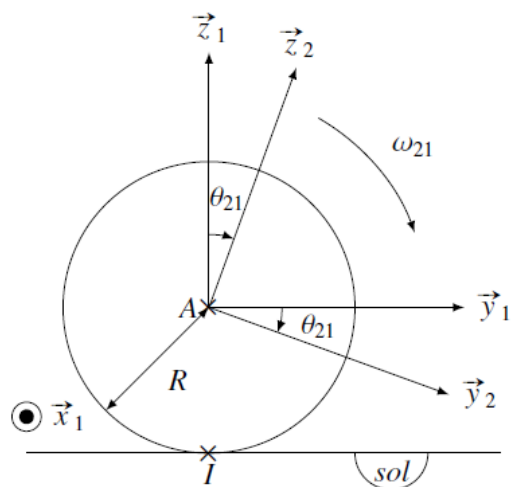


Figure 7 - Paramétrage de la roue gauche 2

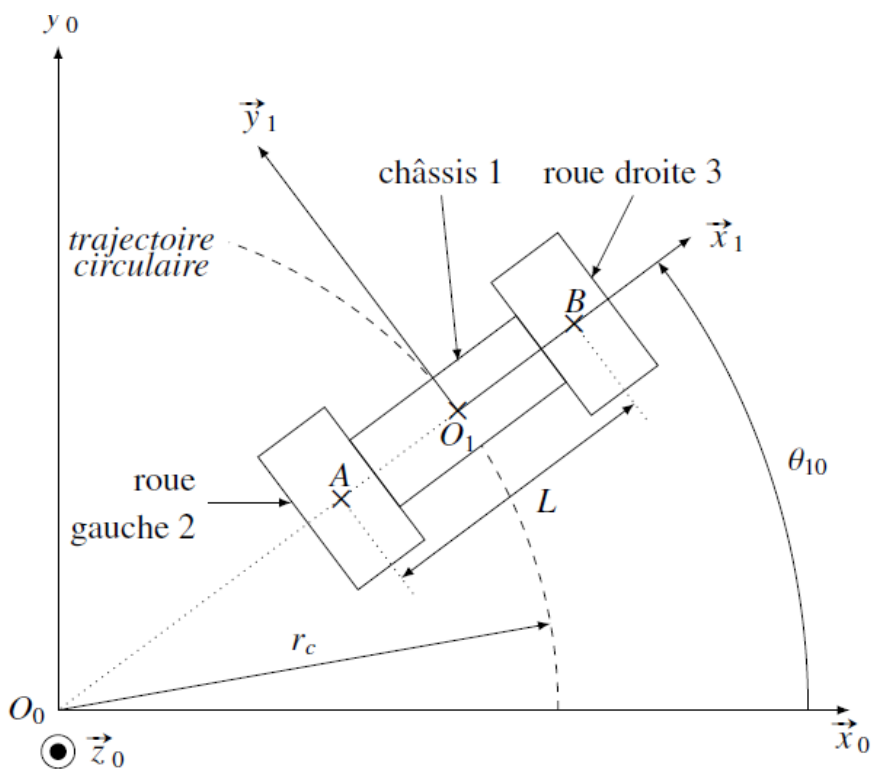


Figure 8 - Hublex dans une trajectoire circulaire

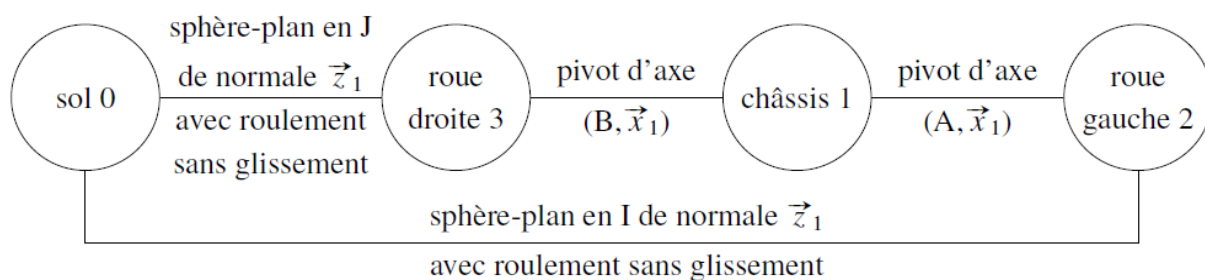


Figure 9 - Graphe des liaisons

### I.3-Génération de la consigne de taux de rotation

La vitesse angulaire à imposer aux moteurs dépend donc de deux consignes fournies par le pilote : une consigne de vitesse  $V_c$  générée à partir de l'inclinaison du gyropode et une consigne de taux de rotation  $\omega_{10c}$  obtenue en tournant la poignée d'un angle  $\delta$  au niveau du manche et mesurée par un potentiomètre angulaire numérique.

Pour recueillir la consigne de virage imposée par le pilote, on utilise un potentiomètre numérique ayant  $360^\circ$  d'amplitude et fournissant une image de la position angulaire de la poignée sous forme d'un mot binaire de 10 *bits*. La rotation de la poignée est mécaniquement bloquée entre les angles  $-45^\circ$  et  $+45^\circ$ . L'absence de rotation de la poignée (i.e.  $\delta = 0^\circ$ ) correspond au mot binaire valant 0 qui représente une consigne de trajectoire rectiligne.

**Question 6.** Donner la résolution de ce capteur, c'est-à-dire sa précision angulaire.

**Question 7.** Donner le nombre de positions effectivement mesurables avec la poignée du Hublex, ainsi que la plage des valeurs centrée autour de 0.

Pour des raisons de sécurité et de confort, l'exigence «1.4.3» impose que l'accélération centrifuge dans un virage soit limitée à  $a_{fmax} = 0,5 \cdot g$ , avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  l'accélération de la pesanteur. Cette accélération centrifuge est définie par le rapport  $a_f = \frac{V^2}{r_c}$ .

**Question 8.** Établir la relation entre  $a_f$ ,  $V$  et  $\omega_{10}$ . En déduire la valeur maximale  $\omega_{10max}$  du taux de rotation admissible satisfaisant l'exigence «1.4» et ses sous-exigences.

On considère que la valeur  $\omega_{10max}$  est associée à un rayon de courbure minimal atteint lorsque  $\delta = 45^\circ$  (poignée tournée au maximum) et que le rayon de courbure maximal est obtenu pour  $\delta = 0^\circ$  (poignée au centre). En choisissant un modèle de proportionnalité inverse, on obtient les deux relations suivantes reliant les consignes de vitesse des deux moteurs à la consigne fournie par le pilote en se penchant (liée à  $V$ ) et à la consigne issue de la poignée (liée à  $\delta$ ) :

$$V - L \cdot \frac{g \cdot \delta}{V \cdot \pi} = -R \cdot k \cdot \omega_{41} \quad (1)$$

$$V + L \cdot \frac{g \cdot \delta}{V \cdot \pi} = -R \cdot k \cdot \omega_{51} \quad (2)$$

**Question 9.** Compléter le schéma bloc du **DR2**, représentant la génération des commandes des deux moteurs à partir des consignes données par le pilote permettant de respecter l'exigence «1.1.1» notamment.

## Partie II-Stabilité du Hublex sur sol incliné

**Objectif :** vérifier que la sécurité du pilote est toujours assurée dans le cadre d'une évolution du Hublex sur sol incliné (exigence «1.5» et sous-exigences).

Comparé à des produits similaires, la faible largeur du Hublex peut entraîner un risque accru de basculement en virage et, notamment, lorsque le virage est effectué sur un sol non horizontal. On donne **figure 10**, une schématisation de la configuration envisagée avec une partie du paramétrage.

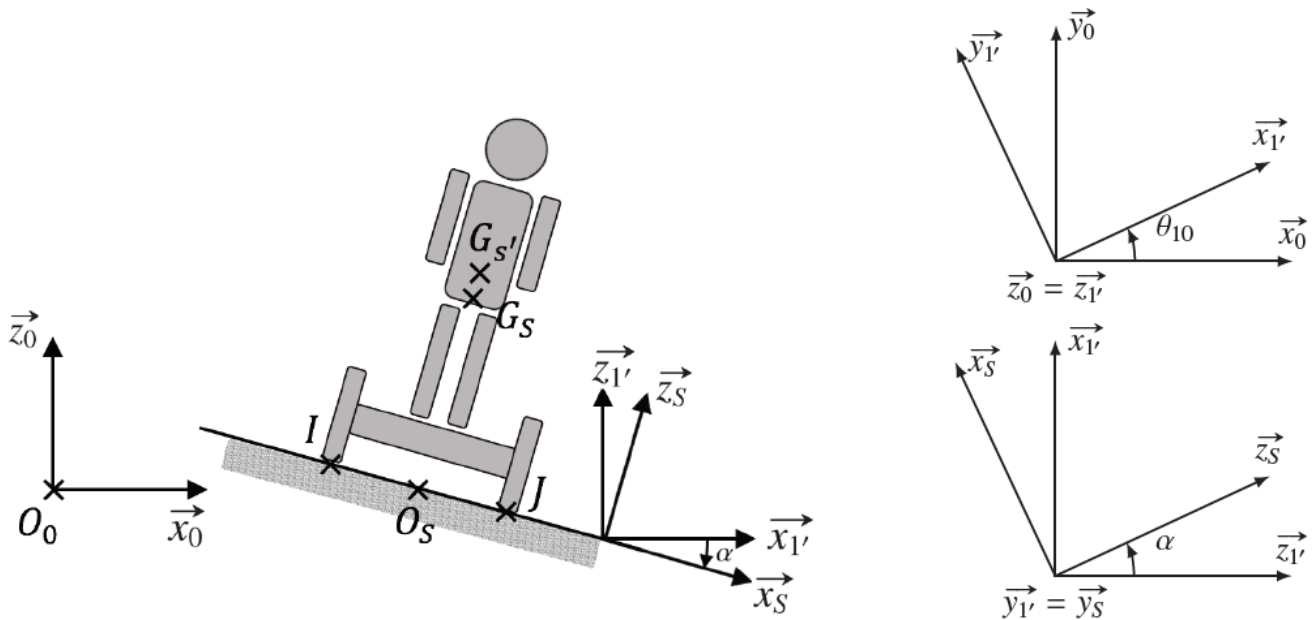


Figure 10 - Schématisation de la configuration étudiée avec paramétrage partiel

### Hypothèses et Paramétrage

- On note  $S$  l'ensemble des pièces en mouvement :  $S = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote} + \text{Roues}\}$ , de masse  $m_S$  et de centre d'inertie  $G_S$  avec  $\overrightarrow{O_S G_S} = h_S \cdot \vec{z}_S$ .
- On note  $S'$  l'ensemble des pièces en mouvement sans les roues :  $S' = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote}\}$  et de centre d'inertie  $G_{S'}$  avec  $\overrightarrow{O_S G_{S'}} = h_{S'} \cdot \vec{z}_S$ . On remarquera que  $S = \{S' + \text{Roues}\}$ .
- Dans cette **partie uniquement**, la masse et les composantes de la matrice d'inertie des roues sont négligées.
- On note respectivement  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ ,  $R_{S'}(G_{S'}, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$  et  $R_{1'}(O_S, \vec{x}_{1'}, \vec{y}_{1'}, \vec{z}_{1'})$ , le référentiel supposé galiléen lié au sol, le référentiel lié à  $S'$  et le référentiel incliné lié à  $S'$ .
- On suppose que l'inclinaison du pilote en avant ou en arrière est négligeable.
- L'angle d'inclinaison du sol  $\alpha$  sur lequel évolue le Hublex est supposé constant :  $\alpha = (\vec{x}_{1'}, \vec{x}_S) = (\vec{z}_{1'}, \vec{z}_S)$ .
- La rotation de  $S'$  autour de l'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  est définie par l'angle :  $\theta_{10} = (\vec{x}_0, \vec{x}_{1'}) = (\vec{y}_0, \vec{y}_{1'})$ .
- On suppose que la vitesse de rotation  $\omega_{10} = \frac{d\theta_{10}}{dt}$  est constante.
- On note les vecteurs (de norme constante)  $\overrightarrow{O_0 O_S} = r_c \cdot \vec{x}_{1'}$  et  $\vec{IJ} = L \cdot \vec{x}_S$ .
- L'accélération de la pesanteur est définie par le vecteur  $-g \cdot \vec{z}_0$  avec  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .
- Dans le plan d'étude, les actions mécaniques en  $I$  et  $J$  du sol sur le Hublex seront modélisées par des liaisons ponctuelles avec frottement. Ces actions sont définies par les torseurs suivants :

$$\{\tau_{0 \rightarrow S}^J\} = {}_I \left\{ \begin{array}{c} T_I \cdot \vec{x}_S + N_I \cdot \vec{z}_S \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ et } \{\tau_{0 \rightarrow S}^J\} = {}_J \left\{ \begin{array}{c} T_J \cdot \vec{x}_S + N_J \cdot \vec{z}_S \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Il n'y a pas de glissement entre les roues et le sol au niveau des points  $I$  et  $J$ .
- La matrice d'inertie de l'ensemble  $S'$  au point  $G_{S'}$  sera notée :

$$[I(G_{S'}, S')] = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & B_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{bmatrix}_{(\vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)}$$

## II.1-Caractéristiques cinétiques du Hublex

**Question 10.** Justifier la forme de la matrice d'inertie  $[I(G_{S'}, S')]$ .

## II.2-Vérification de l'exigence de stabilité

Le principe fondamental de la dynamique est exploité afin de calculer la vitesse limite à partir de laquelle il y a un risque de basculement. On se placera dans le cas où  $\omega_{10}$  est constant. On notera  $\vec{\delta}(M, S/R_0)$  le moment dynamique de  $S$  au point  $M$  par rapport à  $R_0$ .

**Calcul de la composante du moment dynamique  $\vec{\delta}(J, S/R_0) \cdot \vec{y}_1'$**

**Question 11.** Déterminer l'expression littérale du moment cinétique au point  $G_{S'}$  de  $S'$  par rapport à  $R_0$  noté  $\vec{\sigma}(G_{S'}, S'/R_0)$ .

**Question 12.** En déduire les expressions littérales de  $\vec{\delta}(G_{S'}, S'/R_0)$  puis de  $\vec{\delta}(G_S, S/R_0)$ .

**Question 13.** En utilisant la dérivation vectorielle, déterminer l'expression littérale de  $\vec{V}(G_S, S/R_0)$ , la vitesse du centre d'inertie de  $S$  par rapport à  $R_0$ .

On peut en déduire l'accélération du centre d'inertie  $G_S$  de  $S$  par rapport à  $R_0$ , notée  $\vec{\Gamma}(G_S, S/R_0)$ . Il est donc possible de déterminer la composante du moment dynamique souhaité à partir des calculs précédents (la démonstration n'est pas demandée) :

$$\vec{\delta}(J, S/R_0) \cdot \vec{y}_1' = \omega_{10}^2 \cdot \left[ \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot (C_S - A_S) - m_S \cdot (r_c + h_S \cdot \sin\alpha) \left( \frac{L}{2} \cdot \sin\alpha + h_{S'} \cdot \cos\alpha \right) \right]$$

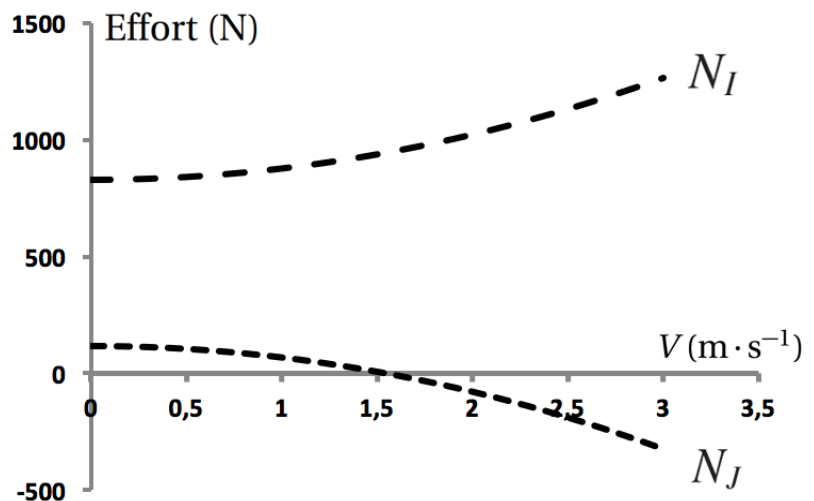
## Estimation du basculement

**Question 14.** Calculer, au point  $J$ , la somme des moments des actions mécaniques extérieures appliquées à  $S$  selon  $\vec{y}_1'$  :  $\vec{M}(J, \bar{S} \rightarrow S) \cdot \vec{y}_1'$ .

**Question 15.** Déduire de ce qui précède la relation liant  $N_I$ ,  $\omega_{10}$ , les grandeurs géométriques, cinématiques (et leurs dérivées) et inertielles. On précisera le principe ou théorème utilisé.

**Question 16.** Dans le cadre de ce modèle, quelle est la condition permettant de définir l'apparition du basculement ? En déduire l'expression de la vitesse limite  $\omega_{10\lim}$  conduisant au basculement.

L'étude précédente permet de représenter l'évolution des réactions du sol, en  $I$  et  $J$ , en fonction de la vitesse d'avance du Hublex, pour un angle  $\alpha = -7^\circ$ , pour un rayon de courbure (ou braquage) de 5 m (**figure11**).



**Figure 11**-Évolution des actions normales  $N_I$  et  $N_J$  en fonction de la vitesse d'avance  $V$  du Hublex.



**Question 17.** En exploitant cette courbe, donner la vitesse limite  $v_{lim}$  que peut avoir le Hublex dans ces conditions sans basculer. Conclure vis-à-vis des exigences.

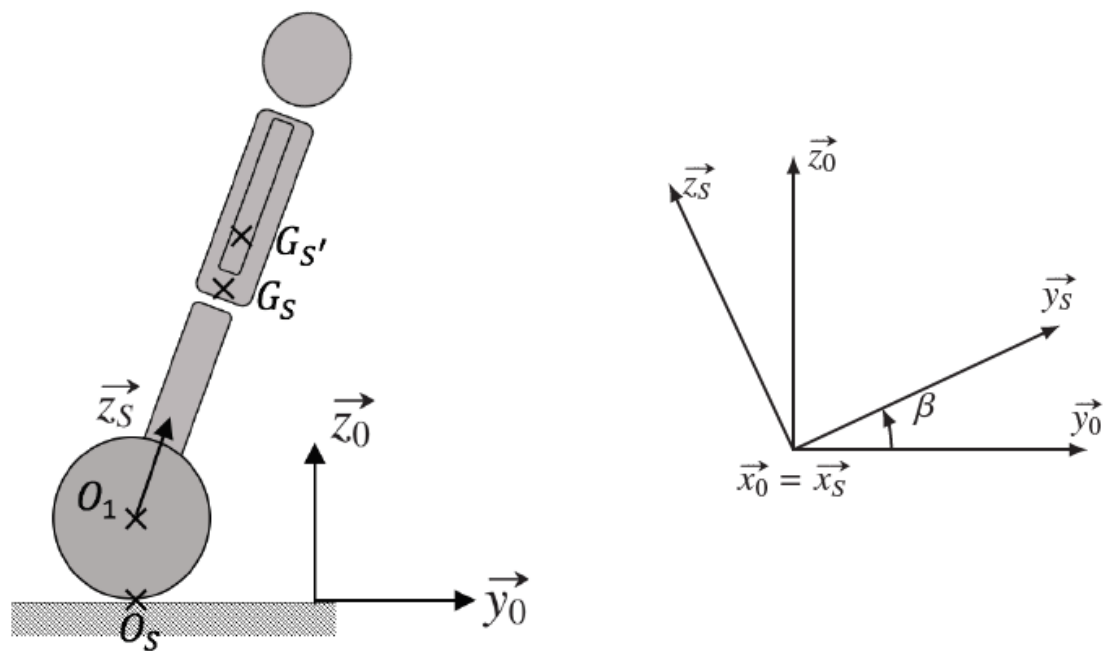
**Question 18.** Commenter, en justifiant, la validité des courbes de la **figure 11** au-delà de  $v_{lim}$ . En une phrase, préciser comment modifier la modélisation pour étudier le comportement de  $S$  au-delà de  $v_{lim}$ .

### Partie III - Pilotage en accélération

**Objectif :** analyser le comportement du Hublex dans son mouvement d'inclinaison vers l'avant (ou arrière) afin de vérifier le respect de l'exigence « 1.1.4.1 ».

Grâce à un asservissement, les moteurs utilisés dans le Hublex permettent de garder l'ensemble  $\{\text{Chassis 1} + \text{Pilote}\}$  en équilibre afin que le pilote ne tombe pas en avant (ou en arrière). Ceci génère le mouvement qui permet au pilote d'avancer (ou de reculer). Pour cela, une centrale inertielle mesure l'inclinaison du Hublex et la fournit à la carte de commande qui génère une consigne de couple moteur. Cette **partie** permettra de déterminer le lien entre l'angle d'inclinaison du pilote (noté  $\beta$ ) et la vitesse d'avance du système.

On se place dans le cas d'une avancée en ligne droite, sur sol plat, avec un angle  $\beta$  entre le Hublex et le sol constant. Une schématisation paramétrée de la configuration étudiée est proposée **figure 12**.



**Figure 12** - Schématisation de la configuration étudiée et paramétrage

#### Hypothèses et Paramétrage

- On note  $S$  l'ensemble des pièces en mouvement :  $S = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote} + \text{Roues}\}$ , de masse  $m_S$  et de centre d'inertie  $G_S$  tel que  $\overrightarrow{O_1 G_S} = z_{G_S} \cdot \vec{z}_S$ .
- On note  $S'$  l'ensemble en mouvement sans les roues :  $S' = \{\text{Chassis 1} + \text{Pilote}\}$ , de masse  $m_{S'}$ , et de centre d'inertie  $G_{S'}$  tel que  $\overrightarrow{O_1 G_{S'}} = z_{G_{S'}} \cdot \vec{z}_S$ . On remarquera que  $S = \{S' + \text{Roues}\}$ .
- On note  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le référentiel supposé galiléen lié au sol et  $R_S(G_S, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$  le référentiel lié à  $S$ .



- L'action mécanique du moteur sur chaque roue, réalisée par l'intermédiaire du galet, peut se modéliser par le torseur des actions mécaniques  $\{\tau_{1 \rightarrow Roue}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \frac{C_m}{k} \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_1}$  où  $C_m$  désigne le couple fourni par le moteur et  $k$  le rapport de transmission du contact galet/jante.
- Les différents frottements (internes et externes) sont ramenés sur l'axe de rotation des roues et modélisés par un couple résistant,  $C_f$ , appliqué à chaque roue tel que :
 
$$\{\tau_{frottements \rightarrow Roue}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C_f \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_1}$$
- Le mouvement de l'ensemble  $S'$  par rapport au sol 0 est représenté par le torseur cinématique :  $\{\mathcal{V}_{S'/0}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ V \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_{O_1}$
- Le mouvement d'une roue par rapport au châssis 1 du Hublex est caractérisé par la vitesse de rotation  $\omega_{R1}$  de sorte que  $\{\mathcal{V}_{Roue/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_{R1} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_1}$ .
- On rappelle que le rayon de la roue est noté  $R$  (soit  $O_1 O_S = R$ ).
- On notera  $J_{S'}$  et  $J_R$  les moments d'inertie selon l'axe  $(O_1, \vec{x}_1)$  respectivement de  $S'$  et d'une roue (les deux roues sont identiques).
- On négligera l'inertie du galet d'entraînement et du rotor du moteur.
- On remarquera que  $V = -R \cdot \omega_{R1}$ , on notera  $\dot{V}$  la dérivée temporelle de  $V$ .

Il est possible de montrer que le couple que doit fournir le moteur pour conserver un angle  $\beta$  constant est donné par l'expression :

$$C_m = k \cdot z_{G_{S'}} \cdot m_{S'} \cdot (\dot{V} \cdot \cos \beta + g \cdot \sin \beta) \quad (3)$$

**Question 19.** Indiquer la démarche permettant de déterminer l'équation (3). On ne demande pas de faire les calculs.

On souhaite maintenant relier la consigne du pilote (sous forme de l'angle  $\beta$ ) à l'accélération  $\dot{V}$  du Hublex.

**Question 20.** Déterminer l'expression littérale de  $(P_{ext} + P_{int})$ , somme des puissances galiléennes des actions mécaniques extérieures appliquées à l'ensemble  $S$ , notée  $P_{ext}$ , et de la puissance intérieure à ce même système, notée  $P_{int}$ .

**Question 21.** Déterminer l'expression littérale de l'énergie cinétique  $E_C(S/R_0)$  de l'ensemble  $S$  par rapport au référentiel galiléen  $R_0$ , en fonction de  $\omega_{R1}$  et des grandeurs inertielles et géométriques.

**Question 22.** En précisant le théorème ou principe utilisé, déterminer la relation liant  $C_m$ ,  $\omega_{R1}$  et les grandeurs inertielles et géométriques (et leurs dérivées).

On supposera maintenant que le couple résistant  $C_f$  est négligeable.

**Question 23.** En déduire, à l'aide de l'équation (3), l'expression de  $\dot{V}$  en fonction de  $\beta$ .

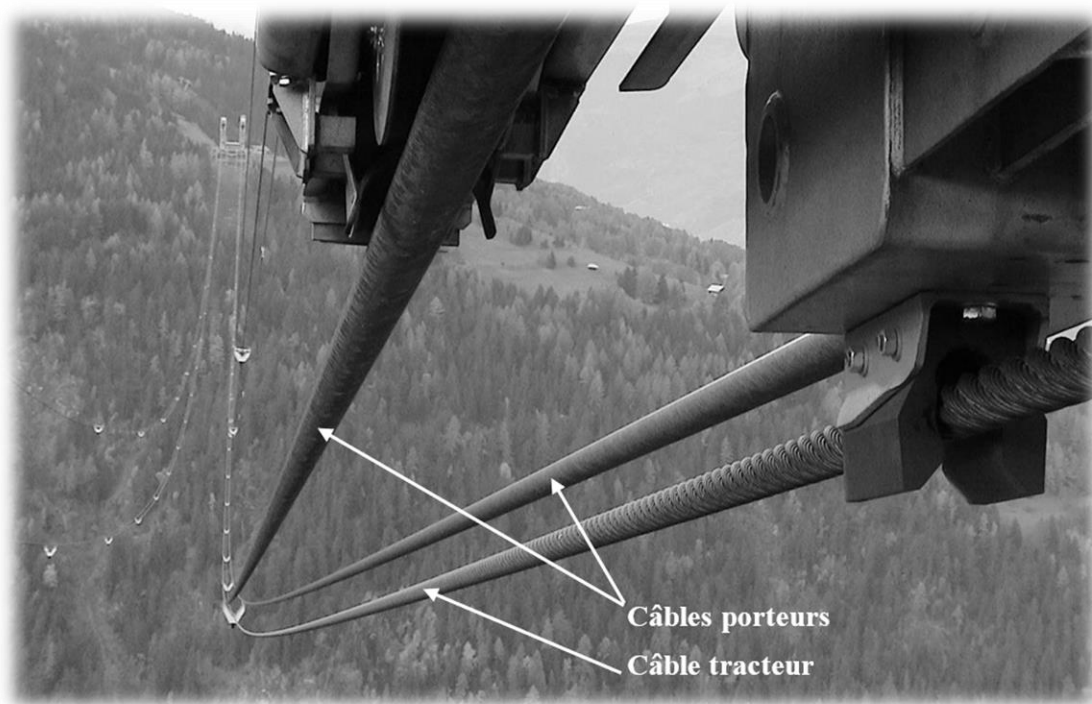
**Question 24.** Justifier alors que la consigne  $\beta$  imposée par le pilote correspond à une consigne d'accélération et conclure sur le respect de l'exigence «1.1.4.1». Préciser la valeur de l'angle  $\beta$  pour que l'ensemble  $S$  avance à une vitesse constante.

## Problème N°2 : Téléphérique de la Vanoise

Le téléphérique Vanoise Express relie les domaines skiables de La Plagne et Les Arcs. C'est un téléphérique sans pylônes, d'une seule portée de gare à gare, ce qui permet de diminuer l'impact sur l'environnement et de préserver la beauté du paysage.

La solution retenue est constituée de deux lignes parallèles portant chacune une seule cabine. Contrairement à la plupart des téléphériques, les deux lignes sont entièrement indépendantes, ce qui signifie qu'une cabine n'est pas le contrepoids de l'autre. Ainsi, en cas de problème sur une cabine, la liaison entre les deux stations n'est pas interrompue.

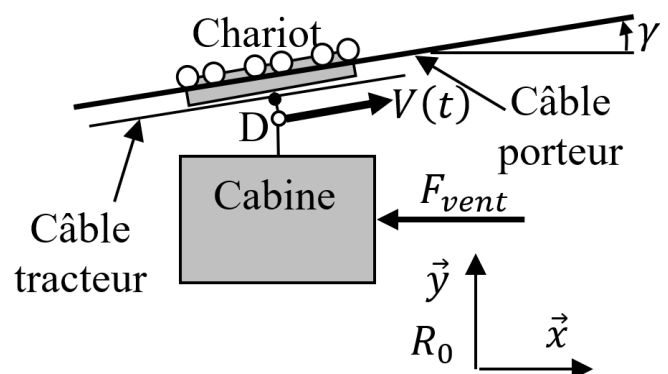
Le schéma de principe d'une ligne est donné en annexe. La capacité de chaque cabine est de 200 personnes. La puissance installée de  $1060\text{ kW}$  par cabine autorise un débit maximum de 1000 personnes à l'heure dans chaque sens et par cabine. Chaque ligne est composée principalement de deux câbles porteurs (rails) et d'un câble tracteur (voir photo suivante).



La particularité de ce téléphérique est que les deux gares reliées sont sensiblement à la même altitude ( $1630\text{ m}$  pour Les Arcs et  $1560\text{ m}$  pour La Plagne). Dans toute l'étude qui suit, on négligera cette différence d'altitude.

### Hypothèses et données :

- soit  $R_0$ , un repère galiléen lié à la terre ;
- on donne  $g = 9,81\text{ m/s}^2$ , accélération de la pesanteur ;
- soit (E), le système matériel constitué de tous les solides en mouvement et du câble tracteur ;
- on suppose que la cabine de masse  $M = 29\text{ tonnes}$  se déplace en translation à la vitesse  $V(t)$ , sur le câble incliné de  $\gamma$  par rapport à l'horizontale (voir figure ci-contre) ;
- la poulie motrice a pour moment d'inertie par rapport à son axe  $J_{pm} = 17000\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Son diamètre est  $D = 4\text{ m}$ . Sa vitesse de rotation est notée  $\omega(t)$  ;
- chacune des 5 poulies de déviation a pour moment d'inertie  $J_d = 10500\text{ kg} \cdot \text{m}^2$  et pour diamètre  $d = 3,8\text{ m}$  ;
- la masse totale du câble tracteur est  $m = 29\text{ tonnes}$ . On suppose qu'il se déplace en translation à la vitesse  $V(t)$ . On néglige la puissance de la pesanteur sur le câble tracteur dans son mouvement par rapport à  $R_0$  ;



- on néglige la masse du chariot et de ses poulies de guidage ;
- la câble tracteur est guidé par 50 petites poulies de guidage dont les caractéristiques sont : moment d'inertie  $J_g = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , diamètre  $d_g = 0,5 \text{ m}$ . Trente deux de ces poulies sont montées sur des cavaliers accrochés aux câbles porteurs (voir annexe), les autres guident le câble en gare ;
- chaque moteur délivre la même puissance et a pour puissance maximum  $P_{m,maxi} = 530 \text{ kW}$ . Chaque moteur a pour moment d'inertie  $J_m = 11,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . On note  $\omega_m(t)$  la vitesse de rotation d'un moteur ;
- on néglige les inerties des réducteurs de rapport  $k = 1/20$  et de tous les solides non cités dans les hypothèses. La définition du rapport  $k$  est donnée annexe ;
- on suppose que toutes les liaisons pivot des solides du système matériel E avec le milieu extérieur sont sans frottement. Le frottement sera pris en compte globalement (voir hypothèses ci-dessous).

### A. Vérification du critère « Vitesse maximum de la cabine »

Objectif : modéliser le comportement dynamique de la cabine afin de respecter le critère de vitesse maximum de la cabine dans une pente de  $15^\circ$  avec un vent défavorable :  $V_{max} \geq V_0 = 12 \text{ m/s}$ .

Lorsque la cabine approche de la gare de La Plagne, elle doit gravir une pente de  $\gamma = 15^\circ$ . Nous allons calculer la puissance  $P_m$  par moteur qui permet d'atteindre et donc de respecter le niveau du critère.

#### Hypothèses complémentaires pour le respect du critère ci-dessus :

- Chacun des deux moteurs délivre la puissance  $P_m$  ;
- La **vitesse de la cabine est constante** et égale à  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  ;
- La cabine gravit une pente de  $\gamma = 15^\circ$  ;
- L'action du vent est modélisée par une force horizontale, s'opposant au déplacement, d'intensité constante  $F_{vent} = 5000 \text{ N}$ . Cette force est un maximum obtenu uniquement par vent défavorable ;
- $f = 6 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}$  coefficient de frottement visqueux équivalent de toutes les forces internes de frottement ramené sur l'axe du moteur. Ce coefficient de frottement donne un couple résistant « vu par le moteur » proportionnel à sa vitesse de rotation. Il est obtenu par mesure de la puissance électrique absorbée lors d'un essai à vide de l'installation.

**Q 1** – Justifier que la variation temporelle de l'énergie cinétique de l'ensemble E dans son mouvement par rapport à  $R_0$  est nulle :

**Q 2** – Donner l'expression de  $P(\text{ext} \rightarrow E/R_0)$ , la somme des puissances extérieures au système matériel E dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_0$ .

**Q 3** – Donner l'expression de  $P_{\text{int}}$ , la somme des puissances intérieures au système matériel E.

**Q 4** – En appliquant le théorème de l'énergie-puissance à E, donner l'expression de la puissance  $P_m$  délivrée par chaque moteur en fonction de  $k$ ,  $V_0$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $g$ ,  $f$ ,  $\gamma$  et  $F_{vent}$ .

**Q 5** – Faire l'application numérique de  $P_m$ . Les moteurs choisis ont une puissance maximum  $P_{m,maxi} = 530 \text{ kW}$ . Permettent-ils de respecter le niveau du critère « **Vitesse maximum de la cabine** dans une pente à  $15^\circ$  avec un vent défavorable » ?

**B. Vérification du critère « Durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine »**

Objectif : modéliser le comportement dynamique de la cabine afin de respecter le critère de durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine lancée à  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  dans une descente à  $10^\circ$  sans vent :  $t_a = 10 \text{ s}$ .

Dans une descente, ce sont les moteurs à courant continu qui retiennent la cabine. Mais en cas de coupure d'électricité, les moteurs ne seraient plus contrôlés, et les cabines pourraient atteindre une vitesse trop élevée.

**Q 6** – Calculer en fonction de  $\omega_m(t)$  l'expression littérale de l'énergie cinétique de chaque élément du système matériel  $E$  dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_0$ . En déduire l'expression littérale du moment d'inertie équivalent  $J$  de tout le système matériel ( $E$ ) ramené sur l'axe des moteurs.

Hypothèses et données complémentaires pour cette question :

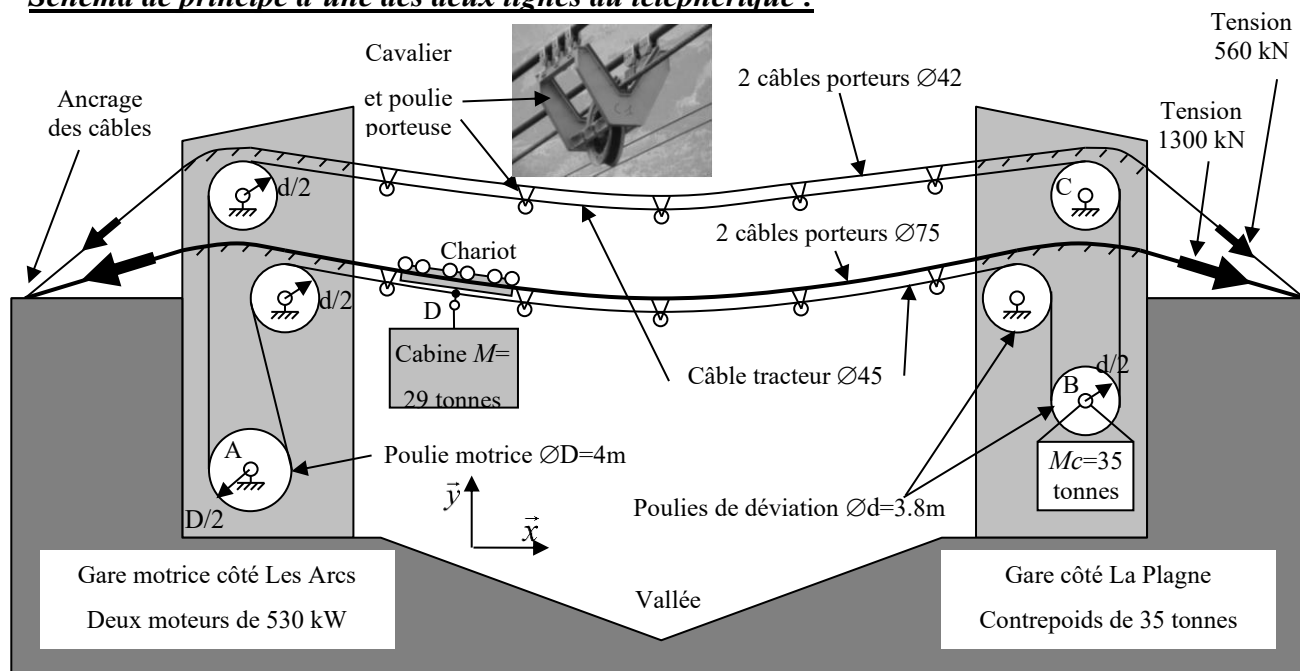
- on donne  $J = 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , le moment d'inertie de tout le système matériel ( $E$ ), ramené sur l'axe des moteurs ;
- on ne tient pas compte de l'action du vent  $F_{vent}$  ;
- par souci de simplifications, on néglige le frottement visqueux équivalent de toutes les forces internes de frottement ramené sur l'axe du moteur (coefficient  $f$ ) ;
- la cabine sort de la gare des Arcs, et descend une pente  $\gamma' = -10^\circ$  à la vitesse  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  ;
- on donne  $C_f = 300000 \text{ N} \cdot \text{m}$ , le couple de freinage du frein de service ;
- le freinage électrique (frein moteur) n'est pas utilisé. Les moteurs ne sont donc pas alimentés.

**Q 7** – Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système matériel ( $E$ ) dans son mouvement par rapport au référentiel  $R_0$ . Déterminez l'expression de  $\dot{\omega}_m(t)$ , la dérivée temporelle de  $\omega_m(t)$ . Donnez l'expression de la décélération notée  $a$  de la cabine en fonction de  $k$ ,  $D$  et  $\dot{\omega}_m(t)$ . Donnez en fonction de  $a$  et de  $V_0$  l'expression de la durée  $\tau$  du freinage.

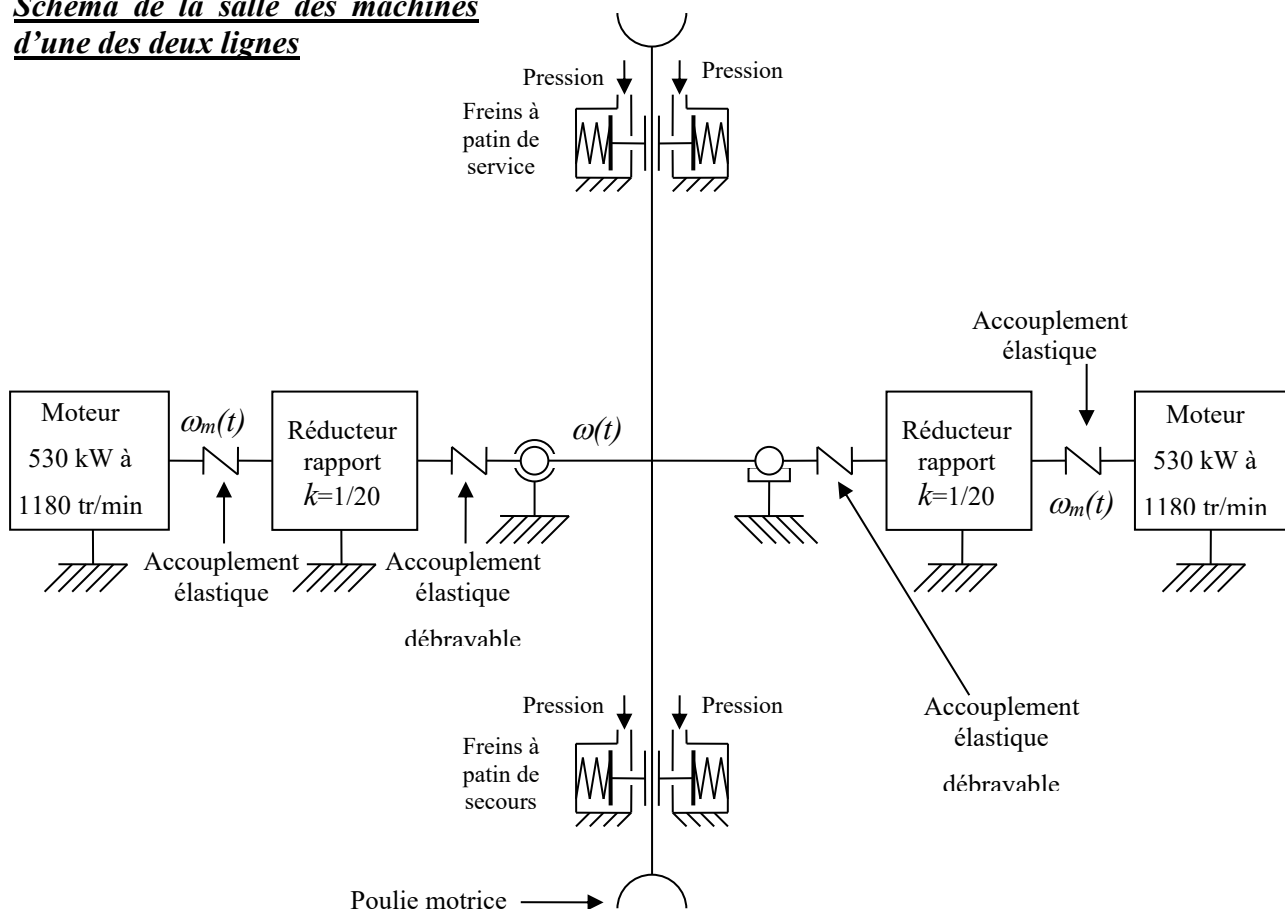
**Q 8** – Faire l'application numérique de  $\tau$ . Vérifiez le critère « Durée d'arrêt par freinage mécanique de la cabine lancée à  $V_0 = 12 \text{ m/s}$  dans une descente à  $10^\circ$  sans vent ».

## Annexe

### Schéma de principe d'une des deux lignes du téléphérique :



### Schéma de la salle des machines d'une des deux lignes



**Définition de  $k$  :**  $k = \frac{\omega(t)}{\omega_m(t)} = \frac{1}{20}$