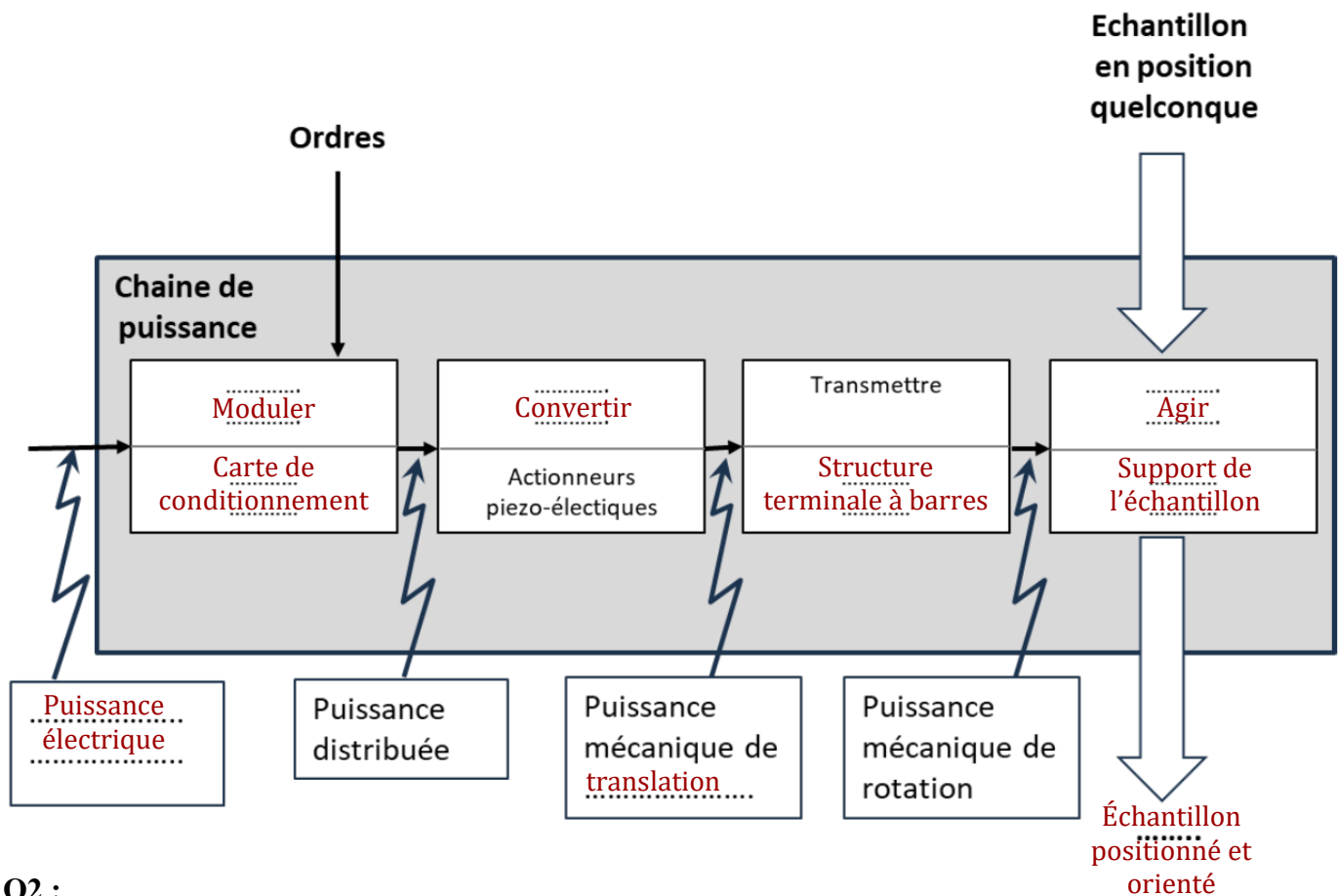


Problème N°1 : Goniomètre piézoélectrique (Mines MP 2025)

Q1 :



Q2 :

Mouvement 1			Mouvement 2		
$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} > 0$	$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = 0$	$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} < 0$	$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} > 0$	$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} = 0$	$\frac{d\lambda_2(t)}{dt} < 0$
$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} > 0$	$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} = 0$	$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} < 0$	$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} > 0$	$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} = 0$	$\frac{d\lambda_4(t)}{dt} < 0$

Remarque : pour le mouvement 2, étant donné que le point E est sur l'axe $(C, \vec{x})$ le déplacement doit se faire avec $\frac{d\lambda_4(t)}{dt} = 0$ à l'instant initial du mouvement, puis $\lambda_4(t)$ augmentera ensuite pour compenser le déplacement du point E vers la gauche dû à la rotation de la pièce 5 dans le sens trigonométrique.

Q3 : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_2(t)\vec{x} + e\vec{y} + l_3\vec{x}_3 - b\vec{x}_5 - c\vec{y}_5 - \lambda_4(t)\vec{x} = \vec{0}$

On projette cette équation sur $\vec{x}$ et $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \lambda_2(t) - \lambda_4(t) + l_3 \cos \alpha - b \cos \theta + c \sin \theta = 0 \\ e + l_3 \sin \alpha - b \sin \theta - c \cos \theta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} l_3 \cos \alpha = \Delta\lambda + b \cos \theta - c \sin \theta & (1) \\ l_3 \sin \alpha = -e + b \sin \theta + c \cos \theta & (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow l_3^2 = (\Delta\lambda + b \cos \theta - c \sin \theta)^2 + (-e + b \sin \theta + c \cos \theta)^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda^2 + \Delta\lambda \cdot 2(b \cos \theta - c \sin \theta) - 2bc \cos \theta \sin \theta + b^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta + e^2 + b^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta + 2(-eb \sin \theta - ec \cos \theta + bc \cos \theta \sin \theta) - l_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda^2 + \Delta\lambda \cdot 2(b \cos \theta - c \sin \theta) + b^2 + c^2 + e^2 - 2e(b \sin \theta + c \cos \theta) - l_3^2 = 0$$

$$A_1(\theta) = 2 \cdot (b \cos \theta - c \sin \theta)$$

$$B_1(\theta) = b^2 + c^2 + e^2 - l_3^2 - 2e \cdot (b \sin \theta + c \cos \theta)$$

Q4 : La variation de x_E a une amplitude de 90 mm, ce qui correspond à une course du vérin de 90 mm.

La variation angulaire de θ de 90° implique une variation de $\Delta\lambda$ de 38 mm (88 mm – 50 mm sur la figure 5). Cela implique que l'un des vérins doit avoir une course supplémentaire de 38 mm en position extrême.

La course totale de chaque vérin doit donc être de 128 mm.

Seule la référence CLS 92 convient pour ce critère.

Q5 : La pièce 3 est soumise à deux forces uniquement : $\vec{R}_{5 \rightarrow 3}$ et $\vec{R}_{2 \rightarrow 3}$. Ces forces sont de même support, la droite (AB) qui définit l'orientation du vecteur $\vec{x}_3$.

Autre rédaction possible : Par application du TMS en A : $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_{5 \rightarrow 3} = \vec{0}$ puisque Le glisseur $\vec{R}_{2 \rightarrow 3}$ est de moment nul en A.

Q6 :

On réalise un bilan des actions mécaniques extérieures qui s'appliquent sur 5 :

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \{T_{3 \rightarrow 5}\} &= \left\{ \begin{array}{c} -X_{53} \vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} -X_{53} \vec{x}_3 \\ \overrightarrow{CB} \wedge (-X_{53}) \cdot \vec{x}_3 \end{array} \right\}_C \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \{T_{4 \rightarrow 5}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{45} & 0 \\ Y_{45} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{C, (\vec{x}, \vec{z})}$$

$$\blacksquare \quad \{T_{ext \rightarrow 5}\} = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_5} = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{y} \\ \overrightarrow{CG_5} \wedge (-P) \cdot \vec{y} \end{array} \right\}_C$$

On applique le théorème du moment statique sur 5 en C :

$$(b \vec{x}_5 + c \vec{y}_5) \wedge (-X_{53}) \vec{x}_3 + \left(d \vec{x}_5 + \frac{c}{2} \vec{y}_5 \right) \wedge (-P) \vec{y} = \vec{0}$$

On projette cette équation sur $\vec{z}$:

$$\Rightarrow +bX_{53} \sin(\theta - \alpha) + cX_{53} \cos(\theta - \alpha) - Pd \cos \theta + \frac{Pc}{2} \sin \theta = 0$$

$$X_{53} = \frac{P \left(d \cos \theta - \frac{c}{2} \sin \theta \right)}{b \sin(\theta - \alpha) + c \cos(\theta - \alpha)}$$

Q7 :

On réalise un bilan des actions mécaniques extérieures qui s'appliquent sur $\{2+3\}$:

- $\{T_{act \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} F\vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$
- $\{T_{5 \rightarrow 3}\} = \left\{ \begin{matrix} X_{53}\vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$
- $\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix} \right\}_{A,(\vec{x}_{1,2})}$

$$A_2 = -d$$

On applique le théorème de la résultante statique à $\{2+3\}$ en projection sur $\vec{x}$:

$$F + X_{53} \cos \alpha = 0$$

$$F = -X_{53} \cos \alpha = \frac{P \left(-d \cos \theta + \frac{c}{2} \sin \theta \right)}{b \sin(\theta - \alpha) + c \cos(\theta - \alpha)} \cdot \cos \alpha$$

$$B_2 = +\frac{c}{2}$$

Q8 : D'après la figure 6, le vérin doit développer un effort d'au moins 6,4 N.

Sur ce critère uniquement, les références CLS 32, CLS 52 et CLS 92 conviennent.

En tenant compte de la course (question 4), il faut choisir CLS 92.

Q9 : On part de l'équation $F(t) = k_i \cdot e(t)$

D'après la loi des mailles appliquée à la maille contenant $e(t)$ et le condensateur C :

$$e(t) = u_C(t)$$

D'après la loi des mailles dans l'autre maille :

$$u_m(t) = u_C(t) + u_R(t) = e(t) + Ri_R(t)$$

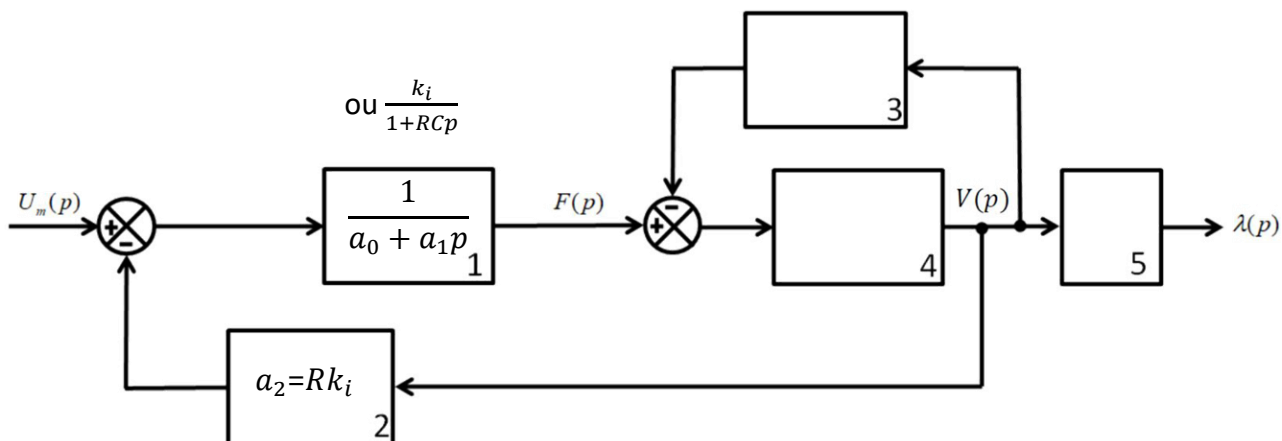
La loi des nœuds donne :

$$i_R(t) = i_M(t) + i_C(t) = k_i \cdot \frac{d\lambda}{dt}(t) + C \cdot \frac{de}{dt}(t)$$

Donc on obtient :

$$F(t) = \frac{1}{k_i} \cdot F(t) + \frac{RC}{k_i} \cdot \frac{dF}{dt}(t) + Rk_i \cdot \frac{d\lambda}{dt}(t)$$

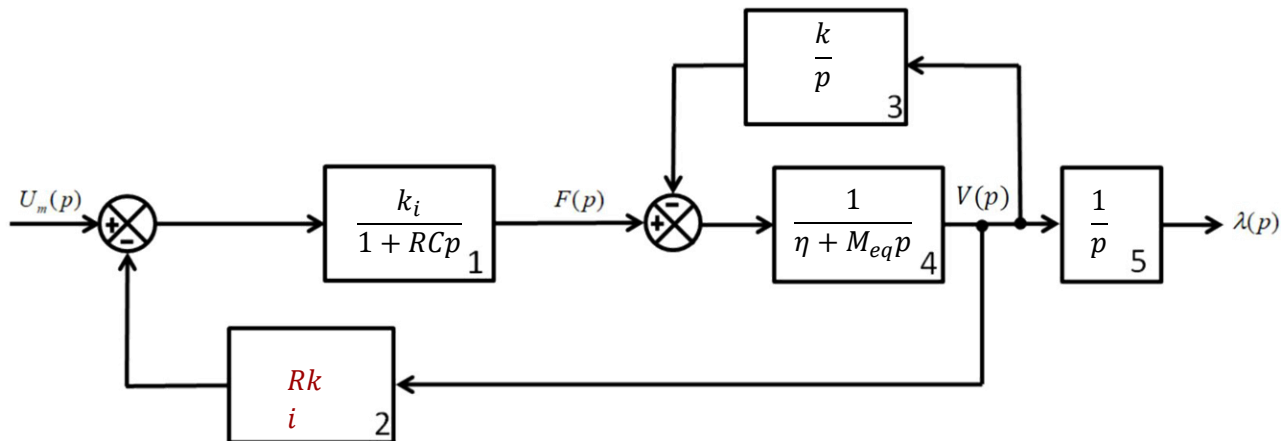
$a_0 = \frac{1}{k_i}$	$a_1 = \frac{RC}{k_i}$	$a_2 = Rk_i$
-----------------------	------------------------	--------------

Q10 :

Q11 : On isole la masse équivalente M_{eq} et on applique le théorème de la résultante dynamique en projection sur l'axe de translation.

$$-k \cdot \lambda(t) - \eta \cdot \frac{d\lambda}{dt}(t) + F(t) = M_{eq} \cdot \frac{d^2\lambda}{dt^2}(t)$$

Q12 : Il y a plusieurs combinaisons possibles pour remplir les blocs 3 et 4. On peut aussi mettre : 0 pour le bloc 3 et $\frac{p}{k+\eta p+M_{eq}p^2}$ pour le bloc 4 par exemple.



Q13 : On détermine la fonction de transfert de la petite boucle :

$$\frac{V(p)}{F(p)} = \frac{\frac{1}{\eta + M_{eq}p}}{1 + \frac{k}{p(\eta + M_{eq}p)}} = \frac{p}{k + \eta p + M_{eq}p^2}$$

On calcule à présent la fonction de transfert globale :

$$\frac{\lambda(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{k_i}{1 + RCp} \cdot \frac{p}{k + \eta p + M_{eq}p^2}}{1 + \frac{k_i}{1 + RCp} \cdot \frac{p}{k + \eta p + M_{eq}p^2} \cdot Rk_i} = \frac{k_i}{(1 + RCp)(k + \eta p + M_{eq}p^2) + Rk_i^2 p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda(p)}{U_m(p)} = \frac{k_i}{k + (Rk_i^2 + RCk + \eta)p + (RC\eta + M_{eq})p^2 + RCM_{eq}p^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda(p)}{U_m(p)} = \frac{\frac{k_i}{k}}{1 + \frac{Rk_i^2 + RCk + \eta}{k}p + \frac{RC\eta + M_{eq}}{k}p^2 + \frac{RCM_{eq}}{k}p^3}$$

$$H(p) = \frac{\frac{k_i}{k}}{1 + \frac{Rk_i^2 + RCk + \eta}{k}p + \frac{RC\eta + M_{eq}}{k}p^2 + \frac{RCM_{eq}}{k}p^3}$$

$$H(p) = \frac{\frac{1}{a_0 k}}{1 + \frac{a_2 + a_1 k + a_0 \eta}{a_0 k}p + \frac{a_1 \eta + a_0 M_{eq}}{a_0 k}p^2 + \frac{a_1 M_{eq}}{a_0 k}p^3}$$

Q14 :

$$p_1 = -3430$$

$$p_2 = -1480 + j1940$$

$$p_3 = -1480 - j1940$$

Les 3 pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont à partie réelle strictement négative, le système est donc stable en boucle fermée. L'exigence 1.2.4 est donc validée.

Q15 : p_1 est un pôle réel, il correspond donc à un système du premier ordre avec $\tau = -\frac{1}{p_1}$

p_2 et p_3 sont des pôles complexes conjugués ce qui correspond à un système du 2nd ordre avec $\xi < 1$:

$$\frac{1}{(p - p_2)(p - p_3)} = \frac{1}{p^2 - (p_2 + p_3)p + p_2 p_3} = \frac{\frac{1}{p_2 p_3}}{1 - \frac{p_2 + p_3}{p_2 p_3}p + \frac{1}{p_2 p_3}p^2} = \frac{\alpha}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

Par identification : $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{1}{p_2 p_3}$ donne $\omega_0 = \sqrt{p_2 p_3}$ et $-\frac{p_2 + p_3}{p_2 p_3} = \frac{2\xi}{\omega_0}$ donne $\xi = -\frac{1}{2} \frac{p_2 + p_3}{\sqrt{p_2 p_3}}$

$$\tau = -\frac{1}{p_1}$$

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{p_2 + p_3}{\sqrt{p_2 p_3}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{p_2 p_3}$$

Q16 : Les pôles dominants sont p_2 et p_3 car ils sont plus proches de l'axe des imaginaires. Mais dans le cas présent on a $\frac{|p_1|}{|p_2|} \approx 2$, il faudrait un rapport d'au moins 7 pour pouvoir négliger l'effet du pôle p_1 .

Il n'est donc pas cohérent de réduire l'ordre du système.

Q17 : La fonction de transfert $H(p)$ est de classe nulle, ainsi le gain statique est constant égal à $H_0 = \frac{k_i}{k}$. Ainsi pour une entrée échelon d'amplitude U_0 , la valeur en régime permanent est : $H_0 \cdot U_0$

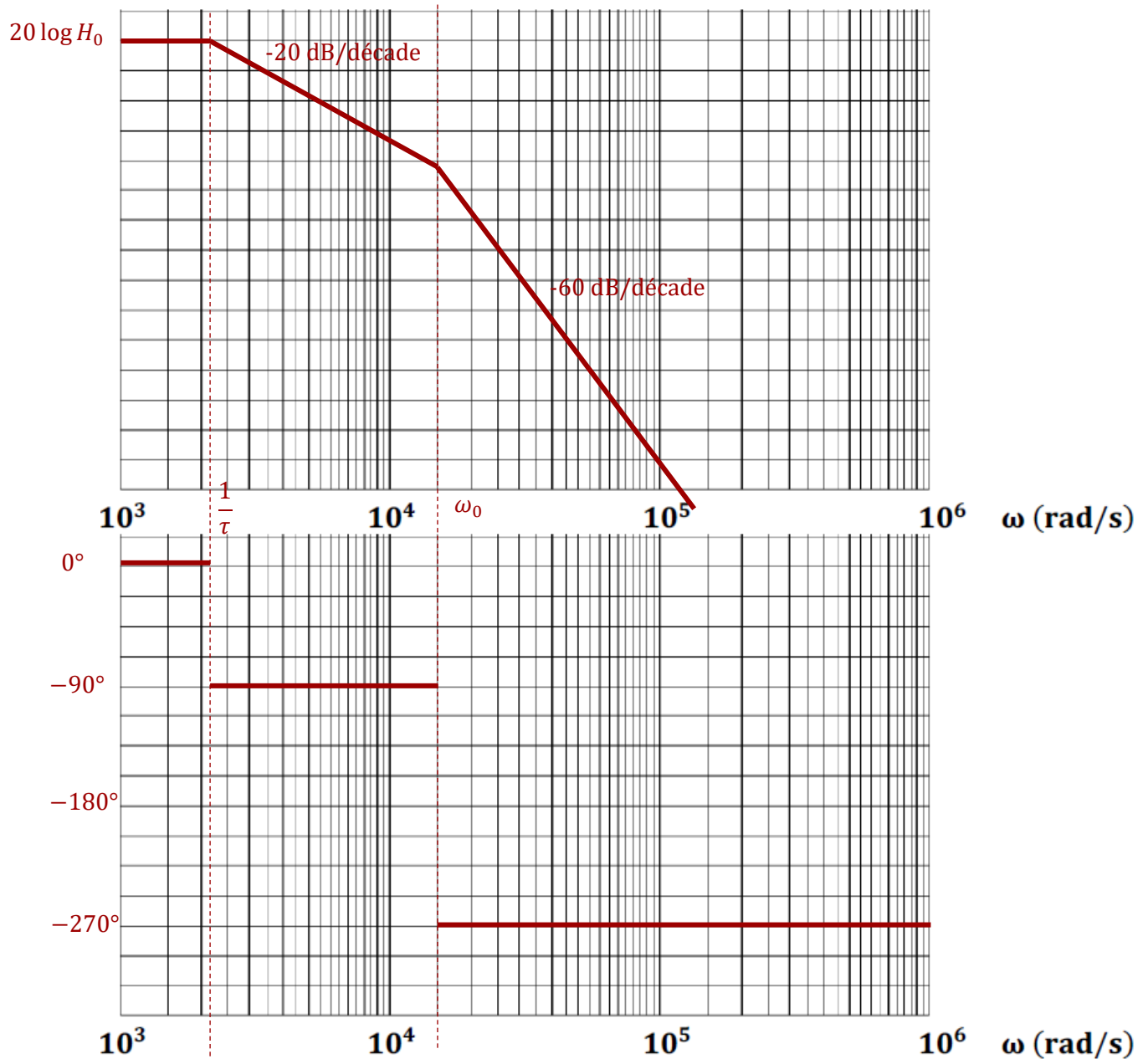
$$\lambda_{fin} = H_0 \cdot U_0 = \frac{k_i}{k} U_0$$

Q18 :

$$\lambda_{fin} = \frac{k_i}{k} U_0 = \frac{4}{16} \times 10 = 2,5 \mu m < 3 \mu m \text{ (pour 10 V)}$$

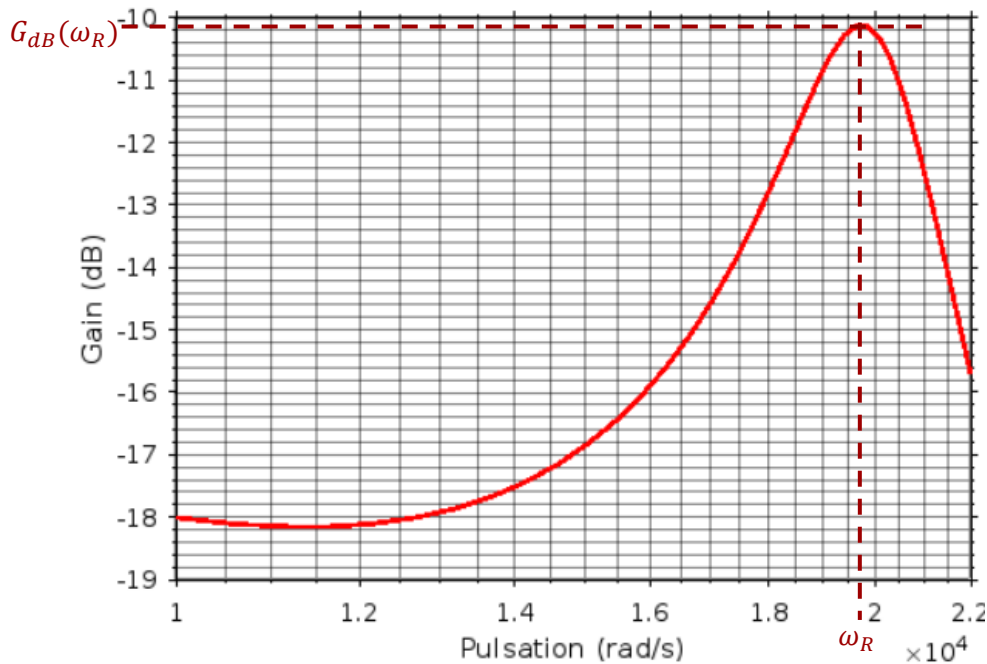
L'exigence 1.2.1 a est donc respectée.

Q19 :



$H(j\omega)$ est le produit d'un système du premier ordre de pulsation de cassure $\omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,3 \cdot 10^{-3}} \approx 3333 \text{ rad.s}^{-1}$ et d'un système du second ordre avec $\omega_0 = 20000 \text{ rad.s}^{-1}$.

En basse fréquence le gain en dB est : $20 \log H_0 = 20 \log 0,3$ (pour une entrée en V et une sortie en μm)

Q20 :

La pulsation de résonance correspond au maximum local :

$$\boxed{\omega_R = 1,975 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 1975 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

En ω_R le gain en décibel est : $G_{dB} = -10,2 \text{ dB} \approx -10 \text{ dB}$

Or $G_{dB} = 20 \log G$ donc $G \approx 10^{-\frac{10}{20}} \approx 1/\sqrt{10} \approx \frac{1}{3}$

L'amplitude maximale de l'entrée est de 10V, donc l'amplitude maximale en sortie est :

$$\boxed{U_0 \times G = \frac{10}{3} \approx 3,3 \mu\text{m}}$$

Q21 : En $\omega_2 = 10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ le gain en dB est $G_{dB2} = -18 \text{ dB}$ soit $G_2 = 10^{-\frac{18}{20}}$

$$\text{facteur} = \frac{G}{G_2} = \frac{10^{-\frac{10}{20}}}{10^{-\frac{18}{20}}} = 10^{\frac{8}{20}} = 10^{(2 \times \frac{1}{5})} = 100^{\frac{1}{5}} \approx 2,5$$

L'amplitude de sortie est multipliée par 2,5 en ω_R par rapport à $10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\boxed{\text{facteur d'amélioration} = 2,5}$$

Q22 : Pour 10V en ω_R on obtient une amplitude de $3,3 \mu\text{m}$.

Pour 10V en $10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ on obtient une amplitude de $\frac{3,3}{2,5} = 1,3 \mu\text{m} < 3 \mu\text{m}$

D'après l'exigence 1.2.2 d, on veut une sensibilité supérieure à $0,3 \mu\text{m}/\text{V}$ soit $3 \mu\text{m}$ pour 10V pour des pulsations $\omega > 10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'exigence 1.2.2 d n'est pas respectée pour toutes les pulsations $\omega > 10000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, mais seulement au voisinage de ω_R .

Q23 : On isole le coulisseau 2 en mouvement de translation horizontale par rapport au support 0 (galiléen).

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Force de 1 sur 2 en A : $X_A \vec{x} + Y_A \vec{y}$
- Force de 1 sur 2 en B : $X_B \vec{x} + Y_B \vec{y}$
- Poids en G_2 : $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{y}$

Résultante dynamique de 2 par rapport à 0 : $\vec{R}_d(2/0) = m_2 \cdot \ddot{x}(t) \vec{x}$

D'après le théorème de la résultante dynamique : $X_A \vec{x} + Y_A \vec{y} + X_B \vec{x} + Y_B \vec{y} - m_2 g \vec{y} = m_2 \cdot \ddot{x}(t) \vec{x}$

En projection sur $\vec{x}$ et sur $\vec{y}$: $\boxed{X_A + X_B = m_2 \ddot{x}(t)}$ et $\boxed{Y_A + Y_B - m_2 g = 0}$

Q24 : On se place à la limite du glissement en A et en B. D'après la loi de Coulombs :

$|X_A| = \mu_a |Y_A|$ on en déduit que $X_A = \mu_a Y_A$ et $X_B = \mu_a Y_B$

$(X_A + X_B) = \mu_a (Y_A + Y_B) = \mu_a (m_2 g)$ donc $\frac{d^2 x}{dt^2}_{MAX} = \frac{X_A + X_B}{m_2} = \frac{\mu_a (m_2 g)}{m_2} = \mu_a g$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2}_{MAX} = \mu_a g}$$

Q25 : D'après l'exigence 1.2.2 b, on veut qu'il y ait adhérence pour des accélérations inférieures ou égale à 10 m.s^{-2} .

$$\mu_a = \frac{\frac{d^2 x}{dt^2}_{MAX}}{g} = \frac{10}{10} = 1 \quad \boxed{\mu_a = 1}$$

Remarque : l'énoncé de l'exigence 1.2.2 b n'est pas clair (accélération maximale à la place de minimale ?).

Q26 : On isole 1 en mouvement de translation horizontale par rapport au support 0 (galiléen).

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de 2 sur 1 en A et en B
- Action de 0 sur 1 (glissière de direction $\vec{x}$)
- Poids sur 1 : $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{y}$
- La force du piézoélectrique : $F_m \vec{x}$

Le théorème de la résultante dynamique projeté sur $\vec{x}$ donne :

$$\boxed{-X_A - X_B + 0 + 0 + F_m = m_1 \frac{d^2 \lambda}{dt^2}(t)}$$

Q27 : A la limite du glissement en A et en B :

$$F_{min} = X_A + X_B + m_1 \ddot{\lambda}$$

Or à la limite du glissement entre 1 et 2 on a $\dot{\lambda} = \dot{x}$ donc $\ddot{\lambda} = \ddot{x} = \mu_a g$ et $(X_A + X_B) = \mu_a (Y_A + Y_B) = \mu_a (m_2 g)$

$$F_{min} = \mu_a (m_2 g) + m_1 \mu_a g$$

$$\boxed{F_{min} = \mu_a g (m_1 + m_2)}$$

Application numérique : $F_{min} = 1 \times 10 \times 0,4 = 4N < 6N$

L'exigence 1.2.2 c est respectée.

Q28 : Phase « stick » : il y a adhérence entre 1 et 2, donc θ évolue ($\frac{d\theta}{dt} \neq 0$).

Phase « slip » : il y a glissement entre 1 et 2, donc θ n'évolue pas ($\frac{d\theta}{dt} = 0$)

Q29 : D'après l'exigence 1.2.2 a, la vitesse de rotation moyenne doit être de $20^\circ/s$.

Si on tient compte de toute l'acquisition entre 0 et 3ms, avec l'augmentation progressive des pics de vitesse, la vitesse de rotation moyenne est :

$$\omega_{moy} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \approx \frac{0,05^\circ}{3 \text{ ms}} \approx \frac{50}{3}^\circ/s < 20^\circ/s$$

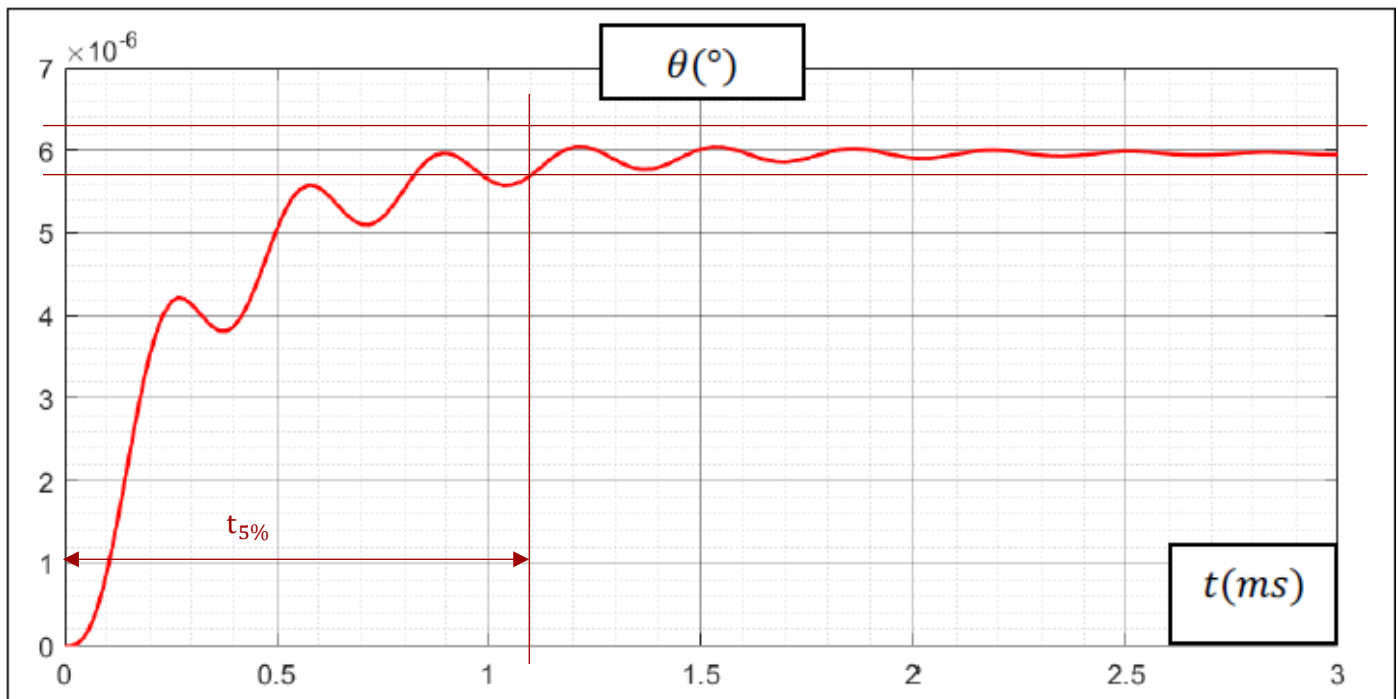
Le cahier des charges n'est pas respecté.

Mais si on ne tient compte que du régime permanent entre 2 et 3 ms, on a :

$$\omega_{moy} \approx \frac{0,05 - 0,03}{(3 - 2)10^{-3}} = 20^\circ/s$$

L'exigence 1.2.2 a est donc respectée uniquement en régime permanent.

Q30 et Q31:



Valeur finale : $\theta_\infty = 6 \mu deg < 10 \mu deg$ donc l'exigence 1.2.1 b est respectée.

Temps de réponse à 5 % : $t_{5\%} = 1,1 \text{ ms} < 1,2 \text{ ms}$ donc l'exigence 1.2.1 c est respectée.

Problème N°2 : Bras collaboratif ZE Solution (Extrait Centrale MP 2016)

Q1 : Le réducteur impose : $\omega_T(t) = \frac{1}{\rho} \cdot \omega_m(t)$

Enroulement du câble sur le tambour : $v(t) = R \cdot \omega_T(t)$

Il est donc déduit : $v(t) = \frac{R}{\rho} \cdot \omega_m(t)$ donc $K_{rigide} = \frac{R}{\rho}$ A.N. : $K_{rigide} = 3 \cdot 10^{-3} m$

Q2 : L'équation de mouvement du système est établie à l'aide du théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble des éléments en mouvement $\Sigma = \{\text{capteur, rotor du moteur, réducteur, tambour, poulie, câble, charge}\}$.

Puissances intérieures :

Dans l'hypothèse où les liaisons sont supposées parfaites, les puissances des actions mutuelles sont nulles.

Puissances extérieures :

- Puissance de l'action de la pesanteur (seule est non nulle la puissance de l'action de pesanteur sur la charge, pour les autres éléments le centre d'inertie reste à altitude constante et/ou l'action de pesanteur est négligée),
- Puissance de l'action du stator sur le rotor du moteur,
- Les puissances des actions de liaison de la pièce fixe sur les pièces mobiles sont nulles dans l'hypothèse où les liaisons sont parfaites :

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dT(\Sigma/R_g)}{dt} = P(\text{pesanteur} \rightarrow \text{charge}/R_g) + P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor}/R_g)$$

Calcul de l'énergie cinétique (seules les inerties de la charge et du motoréducteur sont prises en compte) :

$$\begin{aligned} T(\Sigma/R_g) &= T(\text{motoréducteur}/R_g) + T(\text{charge}/R_g) \\ &= \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \omega_m(t)^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2} (J_0 + M \cdot K_{rigide}^2) \cdot \omega_m(t)^2 \end{aligned}$$

Calcul des puissances :

$$P(\text{pesanteur} \rightarrow \text{charge}/R_g) = -M \cdot g \cdot v(t) = -M \cdot g \cdot K_{rigide} \cdot \omega_m(t)$$

$$P(\text{stator} \rightarrow \text{rotor}/R_g) = C_m(t) \cdot \omega_m(t)$$

Donc le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$(J_0 + M \cdot K_{rigide}^2) \cdot \omega_m(t) \cdot \dot{\omega}_m(t) = C_m(t) \cdot \omega_m(t) - M \cdot g \cdot K_{rigide} \cdot \omega_m(t)$$

Avec $\omega_m(t)$ non nul :

$$(J_0 + M \cdot K_{rigide}^2) \cdot \dot{\omega}_m(t) = C_m(t) - M \cdot g \cdot K_{rigide}$$

De la forme :

$$A \cdot \dot{\omega}_m(t) = C_m(t) - B$$

Avec :

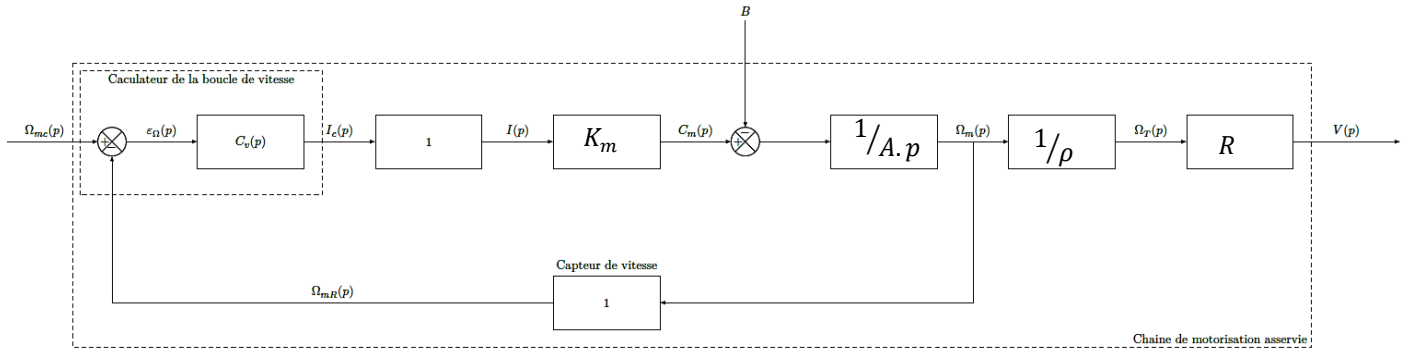
$$A = J_0 + M \cdot K_{rigide}^2 \quad \text{moment d'inertie équivalent rapporté au mouvement du moteur}$$

$$B = M \cdot g \cdot K_{rigide}$$

Q3 :

Equations du système et leurs transformées de Laplace (conditions initiales nulles) :

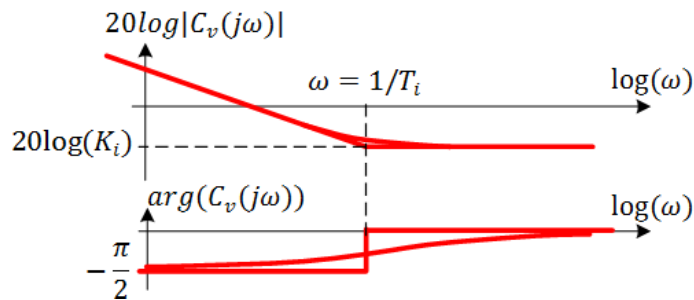
- $C_m(t) = K_m \cdot i(t) \quad \rightarrow \quad C_m(p) = K_m \cdot I(p)$
- $A \cdot \dot{\omega}_m(t) = C_m(t) - B(t) \quad \rightarrow \quad \Omega_m(p) = \frac{C_m(p) - B(p)}{A \cdot p} \quad (B(t) = B \cdot u(t) \text{ et } B(p) = \frac{B}{p})$
- $\omega_T(t) = \frac{1}{\rho} \cdot \omega_m(t) \quad \rightarrow \quad \Omega_T(p) = \frac{1}{\rho} \cdot \Omega_m(p)$
- $v(t) = R \cdot \omega_T(t) \quad \rightarrow \quad V(p) = R \cdot \Omega_T(p)$



Q4 : $M_\varphi = \arg(FTBO_{nc}(j\omega_{0dB})) + 180^\circ = \arg\left(\frac{K_{BO}}{j\omega_{0dB}}\right) + 180^\circ = 90^\circ > 80^\circ$. Le critère de stabilité n'est pas satisfait.

Q5 : La FTBO corrigée est de classe 1. Le critère de précision vis-à-vis de l'entrée en échelon est donc satisfait. Mais l'intégration est en aval de la perturbation. Le critère de précision vis-à-vis de la perturbation constante n'est donc pas satisfait, d'où l'utilité du correcteur PI.

Diagramme de Bode asymptotique du correcteur PI : $C_v(j\omega) = \frac{K_i(1+T_i \cdot j\omega)}{T_i \cdot j\omega}$



Q6 : La FTBO corrigée est notée : $FTBO_c(p) = C_v(p) \cdot FTBO_{nc}(p) = \frac{K_i \cdot K_{BO}(1+T_i \cdot p)}{T_i \cdot p^2}$

Le critère de rapidité impose la pulsation de coupure à 0dB : $\omega_{0dB} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$

La marge de phase est alors :

$$M_\varphi = \arg(FTBO_c(j\omega_{0dB})) + 180^\circ = \arg\left(-\frac{K_i \cdot K_{BO}(1+T_i \cdot j\omega_{0dB})}{T_i \cdot \omega_{0dB}^2}\right) + 180^\circ$$

$$= -180^\circ + \arctan(T_i \cdot \omega_{0dB}) + 180^\circ = \arctan(T_i \cdot \omega_{0dB})$$

Valeur de T_i pour obtenir une marge de phase de 80° :

$$T_i = \frac{\tan(80^\circ)}{\omega_{0dB}} \quad \text{A.N. : } T_i = 0,15s$$

Q7 : Valeur de K_i pour avoir effectivement une pulsation de coupure : $\omega_{0dB} = 40 \text{ rad.s}^{-1}$

Par le calcul : $|FTBO_c(j\omega_{0dB})| = 1$ implique $\frac{K_i \cdot K_{BO} \sqrt{1+T_i^2 \cdot \omega_{0dB}^2}}{T_i \cdot \omega_{0dB}^2} = 1$

Donc $K_i = \frac{T_i \cdot \omega_{0dB}^2}{K_{BO} \sqrt{1+T_i^2 \cdot \omega_{0dB}^2}}$ A.N. : $K_i = 0,18$

Graphiquement : On mesure le gain correspondant à une phase de $-180 + 80(M\varphi) = -100^\circ$: 15 dB

Il faut donc traduire la courbe de gain de -15db ($= 20\log K$) pour que la pulsation de coupure à 0dB soit de 40 rad/s ce qui donnera une Marge de phase de précisément 80° .

D'où $20 \log K_i = -15 \Rightarrow K_i = 10^{\frac{-15}{20}} = 0,18$

Tous les critères de performances sont ainsi satisfaits.