

Exercice 1 : moments d'inertie et matrices d'inertie élémentaires

Q1 : moment d'inertie d'un cylindre autour de son axe.

On considère un cylindre Cyl de rayon R, hauteur h, d'axe de révolution z.

$$I(\text{Cyl}, (O, \vec{z})) = \int_{P \in \text{Cyl}} \overline{PH}^2 dm = \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz$$

Avec H le projeté orthogonal de P sur l'axe $(O, \vec{z})$ et ρ la masse volumique supposée constante.

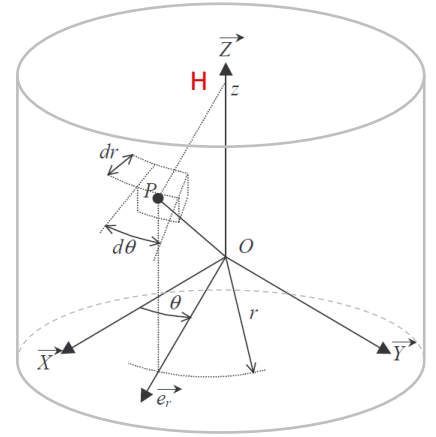
On passe en coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned} I(\text{Cyl}, (O, \vec{z})) &= \rho \iiint r^2 r dr d\theta dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \\ &= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi h \end{aligned}$$

La masse du cylindre s'écrit : $m = \rho V = \rho \iiint dm = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho \frac{R^2}{2} 2\pi h$

D'où : $\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$ ce qui donne $I(\text{Cyl}, (O, \vec{z})) = \frac{m}{\pi R^2 h} \frac{R^4}{4} 2\pi h = m \frac{R^2}{2}$

résultat à connaître



Q2 : moment d'inertie d'une sphère autour de son centre.

$$I(\text{Sphère}, O) = \int_{P \in \text{Sphère}} \overline{OP}^2 dm = \rho \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

On passe en coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned} I(\text{Sphère}, O) &= \rho \iiint r^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ I(\text{Sphère}, O) &= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho 2\pi \frac{R^5}{5} [-\cos\theta]_0^\pi \\ &= \rho \frac{4}{5} \pi R^5 \end{aligned}$$

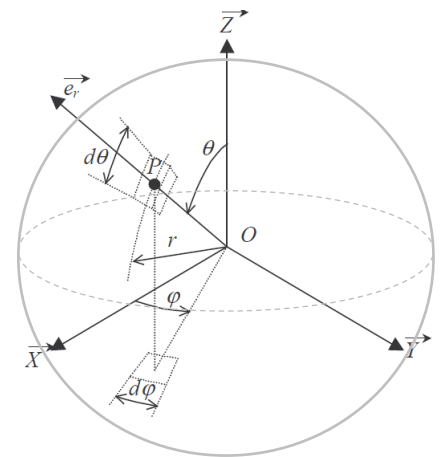
La masse s'écrit : $m = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$

D'où : $I(\text{Sphère}, O) = \frac{3}{5} m R^2$

Pour avoir le moment d'inertie d'une sphère autour d'un de ses axes, on somme les trois moments d'inertie autour de trois axes perpendiculaires.

$$\begin{aligned} I(\text{Sphère}, (O, \vec{x})) + I(\text{Sphère}, (O, \vec{y})) + I(\text{Sphère}, (O, \vec{z})) &= 3 * I(\text{Sphère}, (O, \vec{z})) \\ &= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz + \rho \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz + \rho \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz \\ &= 2 * \rho \iiint (x^2 + y^2 + z^2) ds dy dz = 2 * I(\text{Sphère}, O) \end{aligned}$$

D'où $I(\text{Sphère}, (O, \vec{z})) = \frac{2}{5} m R^2$



Q3 : on vient de déterminer un élément de la matrice du cylindre.

Les produits d'inertie sont nuls pour raison de symétrie. Vérifions sur l'un. On se place au centre de gravité G.

$$P(G, xy) = \rho \iiint xy \, dx \, dy \, dz = \rho \iiint r \cos \theta \, r \sin \theta \, r \, dr \, d\theta \, dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = 0$$

$$\text{Car } \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \left[\frac{(\sin \theta)^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

On essaie avec un autre.

$$P(G, xz) = \rho \iiint xz \, dx \, dy \, dz = \rho \iiint r \cos \theta \, z \, r \, dr \, d\theta \, dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0$$

$$\text{Car } \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz = 0$$

La matrice s'écrit donc : $I(G, \text{Cyl}) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$ puisqu'il y a symétrie de révolution (x et y jouent le même rôle).

On calcule A : $I(\text{Cyl}, (G, \vec{x})) = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx \, dy \, dz = \rho \iiint y^2 dx \, dy \, dz + \rho \iiint z^2 dx \, dy \, dz$

$$\rho \iiint y^2 dx \, dy \, dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} (\sin \theta)^2 d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \rho \frac{R^4}{4} h \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) d\theta = \rho \frac{R^4}{4} h \pi = m \frac{R^2}{4}$$

$$\rho \iiint z^2 dx \, dy \, dz = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \rho \frac{R^2}{2} 2\pi \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right) = m \frac{h^2}{12}$$

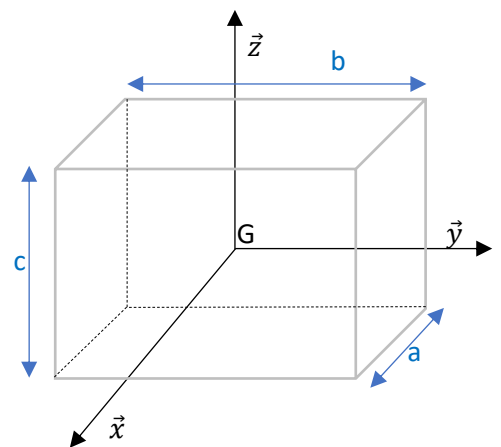
$$\text{D'où } A = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

Remarque : 3 plans de symétrie lorsqu'on est en G. Si on se place en un autre point, les symétries ne sont plus les mêmes.

Q4 : Par symétrie, les produits d'inertie sont nuls.

Les moments d'inertie nécessitent le même calcul. On en fait un seul.

$$\begin{aligned} I(\text{Para}, (G, \vec{x})) &= \rho \iiint (y^2 + z^2) dx \, dy \, dz \\ &= \rho \iiint y^2 dx \, dy \, dz + \rho \iiint z^2 dx \, dy \, dz \\ &= \rho \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz = \rho ac \frac{1}{3} \left(\frac{b^3}{8} + \frac{b^3}{8} \right) \\ &= \rho ac \frac{b^3}{12} = \frac{m}{abc} ac \frac{b^3}{12} = m \frac{b^2}{12} \end{aligned}$$



D'où la matrice en G : $I(G, Para) = \begin{bmatrix} m\left(\frac{b^2}{12} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\left(\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{12}\right) \end{bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$

Exercice 2 : matrice d'inertie d'un vilebrequin

Q1 : par Huygens sous forme uniaxiale.

$$I(G_1, \vec{z}) = m_1 \frac{R_1^2}{2} + m_2 \frac{R_2^2}{2} + m_2 a_2^2 + m_3 \frac{R_3^2}{2} + m_3 a_3^2$$

Q2 : $I(G_1) = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & I(G_1, \vec{z}) \end{bmatrix}_{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$ pour raison de symétrie plane de plan $(G_1, \vec{x}, \vec{z})$.

Par Huygens sous forme matricielle.

$$A = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 c_2^2 + m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} \right) + m_3 c_3^2$$

$$B = m_1 \left(\frac{R_1^2}{4} + \frac{h_1^2}{12} \right) + m_2 \left(\frac{R_2^2}{4} + \frac{h_2^2}{12} \right) + m_2 (c_2^2 + a_2^2) + m_3 \left(\frac{R_3^2}{4} + \frac{h_3^2}{12} \right) + m_3 (c_3^2 + a_3^2)$$

$$E = m_2 a_2 c_2 + m_3 a_3 c_3$$