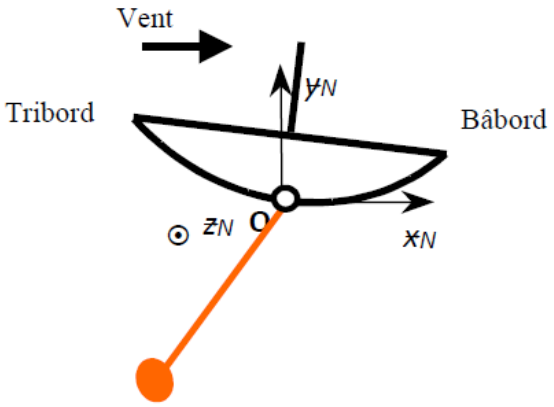
Problème N°1 : Quille Pendulaire (extrait de Mines ponts MP 2014)

Q1. a - R_D est toujours positif (poussée d'Archimède) donc G_x suffit à caractériser le signe de $R_D G_x$.
b - B3, C1, D6, E5 et F2. Ou encore : 1C, 2F, 3B, 5E et 6D.

Q2. a- Pour $\alpha > 0$, la quille pendulaire permet d'augmenter l'énergie nécessaire pour faire basculer le navire (rapport $\frac{S_{01}}{S_{02}}$ plus grand) et de repousser la limite de chavirage à 130°. G_x est plus grand pour $0 < \alpha < 130°$, donc le bateau s'inclinera moins pour une même action extérieure (vent, houle...).

b- Pour $\alpha < 0$, le basculement devient impossible car G_x ne change pas de signe. Par contre $|G_x|$ est plus petit pour -50° $< \alpha < 0$, donc le bateau s'inclinera plus pour une même action extérieure.



c- Si le vent vient de tribord alors $\overrightarrow{M}_{H,vent\to nav}.\vec{z} < 0$, il faut donc $G_x > 0$ et grand pour limiter l'inclinaison du bateau. On choisit la quille inclinée au maximum sur tribord.

Q3. D'après le texte, on a en D : $\{\mathcal{T}_{pes\to lest}\} = \left\{\begin{array}{c} -M_D g\vec{y}_N \\ \vec{0} \end{array}\right\}_D$.

Par changement de point, on obtient alors en O : $\boxed{\{\mathcal{T}_{pes\to lest}\} = \left\{\begin{array}{c} -M_D g\vec{y}_N \\ -l_q \sin\theta_1 M_D g\vec{z}_N \end{array}\right\}_O}$.

Q4. La résultante élémentaire s'exerçant sur un élément dy centré sur M est :
$d\vec{R}_{pes\to voile}(M) = -\rho_l g dy \vec{y}_N$. On en déduit : $\boxed{d\vec{M}_{O,pes\to voile}(M) = y\vec{y}_1 \wedge -\rho_l g dy\vec{y}_N = \rho_l g y dy \sin\theta_1 \vec{z}_N}$.

Q5. Le torseur d'action mécanique se déduit de l'action mécanique élémentaire décrite par la résultante et le moment en O question précédente. Ainsi : $\overrightarrow{R}_{pes\to voile} = \int_{y=-l_q}^{y=0} d\vec{R}_{pes\to M} = -\rho_l g l_q \vec{y}_N$ et
$\overrightarrow{M}_{O,pes\to voile} = \int_{y=-l_q}^{y=0} d\vec{M}_{O,pes\to voile} = -\rho_l g \frac{l_q^2}{2} \sin\theta_1 \vec{z}_N$. D'où : $\boxed{\{\mathcal{T}_{pes\to voile}\} = \left\{\begin{array}{c} -\rho_l g l_q \vec{y}_N \\ -\rho_l g \frac{l_q^2}{2} \sin\theta_1 \vec{z}_N \end{array}\right\}_O}$.

Q6. En O, la pesanteur exerce son action sur la quille et sur le lest. Ainsi :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{pes\to quille}\} = \{\mathcal{T}_{pes\to voile}\} + \{\mathcal{T}_{pes\to lest}\} = \left\{\begin{array}{c} -(\rho_l g l_q + M_D g)\vec{y}_N \\ -\sin\theta_1(\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_D g)\vec{z}_N \end{array}\right\}_O}$$

Q7. Le torseur $\{\mathcal{T}_{pes\to quille}\}$ peut se mettre sous la forme d'un glisseur au centre de poussée P si $\vec{M}_{P,pes\to quille} = \vec{0}$. Or :

$$\vec{M}_{P,pes\to quille} = \vec{M}_{O,pes\to quille} + \vec{PO} \wedge \vec{R}_{pes\to quille} = -\sin\theta_1(\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_D g)\vec{z}_N - y_p\vec{y}_1 \wedge -(\rho_l g l_q + M_D g)\vec{y}_N$$
$$= -\sin\theta_1(\rho_l g \frac{l_q^2}{2} + l_q M_D g)\vec{z}_N - y_p \sin\theta_1(\rho_l g l_q + M_D g)\vec{z}_N$$

Ainsi, P est centre de poussée si : $\rho_l g\dfrac{l_q^2}{2}+l_q M_D g=-y_p(\rho_l g l_q+M_D g) \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y_p=-\dfrac{\rho_l\frac{l_q^2}{2}+l_q M_D}{\rho_l l_q+M_D}}$

Q8. Pour les sphériques (ou rotules), on se place au centre. Pour les pivots et pivots glissants, sur les axes :

$$\{\mathcal{T}_{N\to4}\}=\begin{Bmatrix}X_{N4} & 0\\ Y_{N4} & 0\\ Z_{N4} & 0\end{Bmatrix}_{C,\mathcal{B}_2} \quad \{\mathcal{T}_{4\to2}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ Y_{42} & M_{42}\\ Z_{42} & N_{42}\end{Bmatrix}_{C,\mathcal{B}_2} \quad \{\mathcal{T}_{2\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_{21} & 0\\ Y_{21} & 0\\ Z_{21} & 0\end{Bmatrix}_{A_2,\mathcal{B}_2}$$

$$\{\mathcal{T}_{N\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_{N1} & L_{N1}\\ Y_{N1} & M_{N1}\\ Z_{N1} & 0\end{Bmatrix}_{O,\mathcal{B}_N}$$

$$\{\mathcal{T}_{N\to5}\}=\begin{Bmatrix}X_{N5} & 0\\ Y_{N5} & 0\\ Z_{N5} & 0\end{Bmatrix}_{B,\mathcal{B}_3} \quad \{\mathcal{T}_{5\to3}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ Y_{53} & M_{53}\\ Z_{53} & N_{53}\end{Bmatrix}_{B,\mathcal{B}_3} \quad \{\mathcal{T}_{3\to1}\}=\begin{Bmatrix}X_{31} & 0\\ Y_{31} & 0\\ Z_{31} & 0\end{Bmatrix}_{A_3,\mathcal{B}_3}$$

Q9. {2+4} et {3+5} sont chacun soumis à deux actions mécaniques modélisables par des glisseurs (les actions des fluides deviennent intérieures !).
On isole le vérin 4-2, en équilibre sous les actions de N sur 4 et à de 1 sur 2 dans le référentiel lié à N, supposé galiléen. Le PFS s'applique et on écrit en A_2 :

$$\begin{cases}X_{N4}+X_{12}=0\\ Y_{N4}+Y_{12}=0\\ Z_{N4}+Z_{12}=0\\ 0=0\\ x_{24}Z_{N4}=0\\ -x_{24}Y_{N4}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X_{N4}=-X_{12}\\ Y_{N4}=Y_{12}=0\\ Z_{N4}=Z_{12}=0\end{cases}$$

Ainsi, l'action de 1 sur 2 peut être représentée par un glisseur en A_2 de résultante $X_{12}\vec{x}_2$: $\{\mathcal{T}_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}X_{12}\vec{x}_2\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{A_2}$. Par le principe des actions réciproques, on a alors : $\{\mathcal{T}_{2\to1}\}=-\{\mathcal{T}_{1\to2}\}$.
On pose $F_{21}=-X_{12}$ et alors : $\{\mathcal{T}_{2\to1}\}=\begin{Bmatrix}F_{21}\vec{x}_2\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{A_2}$.

Q10. En isolant 2 et en appliquant le TRS sur le direction $\vec{x}_2$, on obtient directement $F_{21}=F_h$. Alors, $\{\mathcal{T}_{2\to1}\}=\begin{Bmatrix}F_h\vec{x}_2\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{A_2}$.

Q11. Par un raisonnement similaire, on trouve directement $\{\mathcal{T}_{3\to1}\}=\begin{Bmatrix}-F_h\vec{x}_3\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_{A_3}$.

Q12. On isole l'ensemble de la quille 1 et on applique le TMS en O selon $\vec{z}_N$. Il vient :

$$0+\left[\vec{OA_2}\wedge F_h\vec{x}_2+\vec{OA_3}\wedge(-F_h\vec{x}_3)+\vec{OP}\wedge(-Mqg\vec{y}_N)\right].\vec{z}_N=0$$

$$\Rightarrow \quad -F_h\left[r\cos(\theta_2-\theta_1)\right]+F_h\left[r\cos(\theta_3-\theta_1)\right]+y_pM_qg\sin\theta_1=0$$

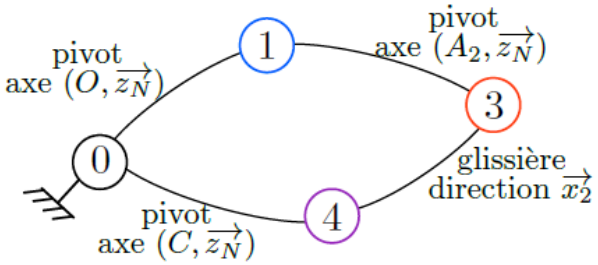
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_h=\frac{y_p}{r\left[\cos(\theta_2-\theta_1)-\cos(\theta_3-\theta_1)\right]}\sin\theta_1 M_q g}$$

Q13. $S = \pi\dfrac{D^2}{4}$ et $F_h = p_h S$ d'où : $\boxed{p_h = \dfrac{4}{\pi D^2}\dfrac{y_p M_q g \sin\theta_1}{r\left[\cos(\theta_2-\theta_1)-\cos(\theta_3-\theta_1)\right]}}$.

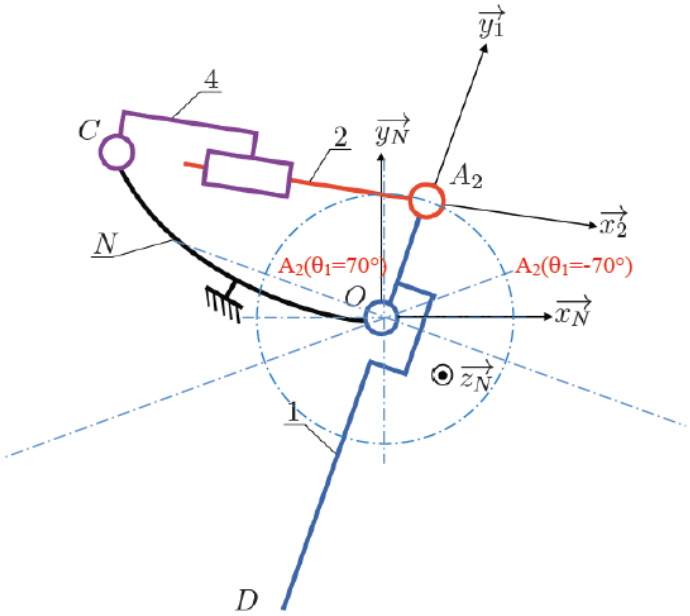
Q14. A.N. : $\boxed{p_h \simeq 4,7\cdot 10^6 \text{ Pa} \simeq 4,7 \text{ MPa} < p_{h\ max}}$. Le diamètre du vérin est validé ; la pression hydraulique est suffisante pour l'application.

Q15. Les liaisons sphériques ont été remplacées par des liaisons pivots et les pivots glissants par des liaisons glissières ce qui correspond à l'hypothèse de modélisation plane. Elle est justifiée dans le sens où tous les mouvements utiles du mécanisme ont lieu dans des plans parallèles au plan $(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$.

Q16. On obtient une chaîne simple fermée.



Q17. [**Approche graphique**] On trace le cercle de centre O et de rayon OA ainsi que les deux droites passant par O orientées à $\pm$ 70 ° de $(O, \vec{y}_N)$.



On mesure la course nécessaire c_n en faisant la différence entre les deux positions extrêmes du point A_2 par rapport à C : $c_n = CA_2(\theta_1 = \text{-}70\ °)$ - $CA_2(\theta_1 = 70\ °)$ soit $\boxed{c_n = 1{,}9 \text{ m}}$ (compte tenu de l'échelle). C'est inférieur à 2 m : le vérin retenu peut atteindre les positions extrêmes de la quille.

[**Approche analytique**] On réalise une fermeture géométrique sur la chaine de solides considérée : $\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2C} + \overrightarrow{CO} = \vec{0}$. Soit $r\vec{y}_1 - x_{24}\vec{x}_2 + a\vec{x}_N - b\vec{y}_N = \vec{0}$. En projection dans la base $\mathcal{B}_N$, on obtient :

$$\begin{cases} -r\sin(\theta_1) - x_{24}\cos(\theta_2) + a = 0 \\ r\cos(\theta_1) - x_{24}\sin(\theta_2) - b = 0 \end{cases}$$

On élimine θ_2 pour obtenir : $x_{24} = \sqrt{(a - r\sin(\theta_1))^2 + (r\cos(\theta_1) - b)^2}$. La course du vérin s'écrit ainsi : $c_n = \sqrt{(a - r\sin(-70°))^2 + (r\cos(-70°) - b)^2} - \sqrt{(a - r\sin(70°))^2 + (r\cos(70°) - b)^2}$. A.N. :

$\boxed{c_n \simeq 1{,}86\text{ m}}$. C'est inférieur à 2 m : le vérin retenu peut atteindre les positions extrêmes de la quille.

Q18. On limite la vitesse de rotation de la quille pour ne pas avoir à fournir un effort trop important pour la manœuvre. Cela est nécessaire compte tenu de la puissance embarquée limitée. Si la quille tourne à vitesse importante, les effets dynamiques des masses en rotation ne sont pas négligeables, ni les actions hydrodynamiques : l'eau fournit une résistance qui augmente avec la vitesse.

Q19. [**Méthode 1**] On remarque que la vitesse de rotation maximale de la quille est obtenue lorsque l'angle $\widehat{CA_2O}$ est droit. La vitesse de translation du vérin vaut alors : $\boxed{\max(\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2) = r\dot{\theta}_{1\ max}}$.
A.N. : $\max(\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2) \simeq 0,15\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

[**Méthode 2**] On utilise la composition du mouvement et le changement de point :

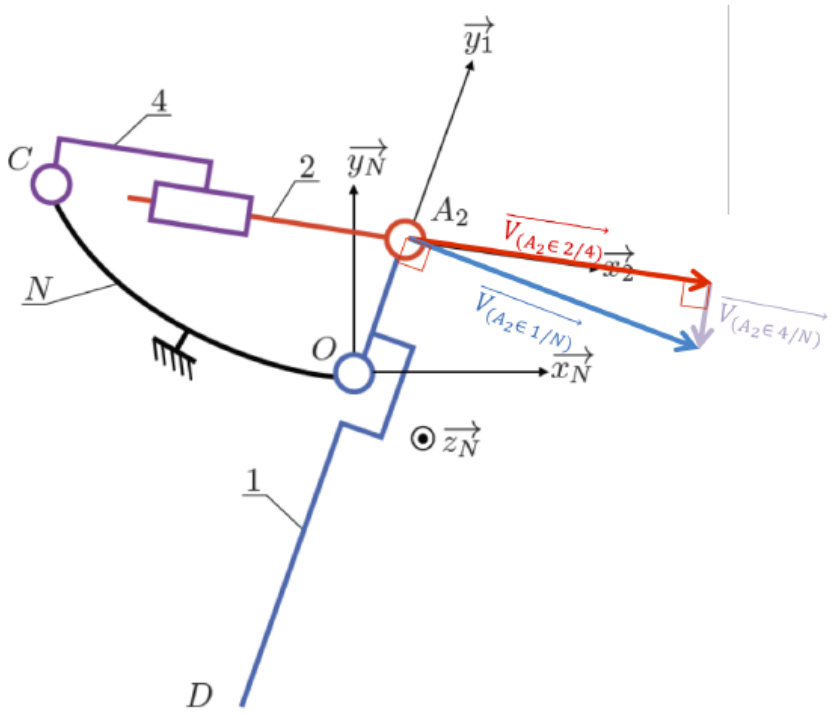
$$\begin{aligned}\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2 &= \left(\vec{V}_{A_2\in 2/1}+\vec{V}_{A_2\in 1/N}+\vec{V}_{A_2\in N/4}\right)\cdot\vec{x}_2\\ &= \left(\vec{0}+\vec{V}_{O\in 1/N}+\overrightarrow{A_2O}\wedge\vec{\Omega}_{1/N}+\vec{V}_{C\in N/4}+\overrightarrow{A_2C}\wedge\vec{\Omega}_{N/4}\right)\cdot\vec{x}_2\\ &= \left(-r\vec{y}_1\wedge\dot{\theta}_1\vec{z}_1 - x_{24}\vec{x}_2\wedge(-\dot{\theta}_2\vec{z}_1)\right)\cdot\vec{x}_2\\ &= -r\dot{\theta}_1\vec{x}_1\cdot\vec{x}_2 = -r\dot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1)\end{aligned}$$

Cette vitesse est maximale lorsque $\theta_2-\theta_1=\pi$ et $\dot{\theta}_1=\dot{\theta}_{1\ max}$. Elle s'écrit alors :
$\boxed{\max(\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2) = r\dot{\theta}_{1\ max}}$. A.N. : $\max(\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2) \simeq 0,15\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

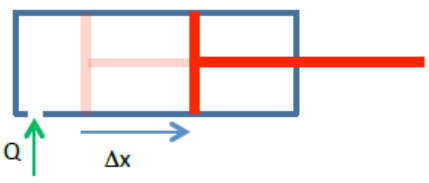
[**Méthode 3**] On interprète graphiquement la composition de vitesses (voir figure suivante) :

$$\vec{V}_{A_2\in 2/4} = \underbrace{\vec{V}_{A_2\in 2/1}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{V}_{A_2\in 1/N}}_{\perp\overrightarrow{OA_2}} + \underbrace{\vec{V}_{A_2\in N/4}}_{\perp\overrightarrow{CA_2}}$$

Alors, $\vec{V}_{A_2\in 2/4}$ est maximale si $\vec{V}_{A_2\in N/4}=\vec{0}$ càd si $\widehat{CA_2O}=\dfrac{\pi}{2}$. Alors $\|\vec{V}_{A_2\in 2/4}\| = \|\vec{V}_{A_2\in 1/N}\| = r|\dot{\theta}_1|$ et donc $\boxed{\max(\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2) = r\dot{\theta}_{1\ max}}$. A.N. : $\max(\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2) \simeq 0,15\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.



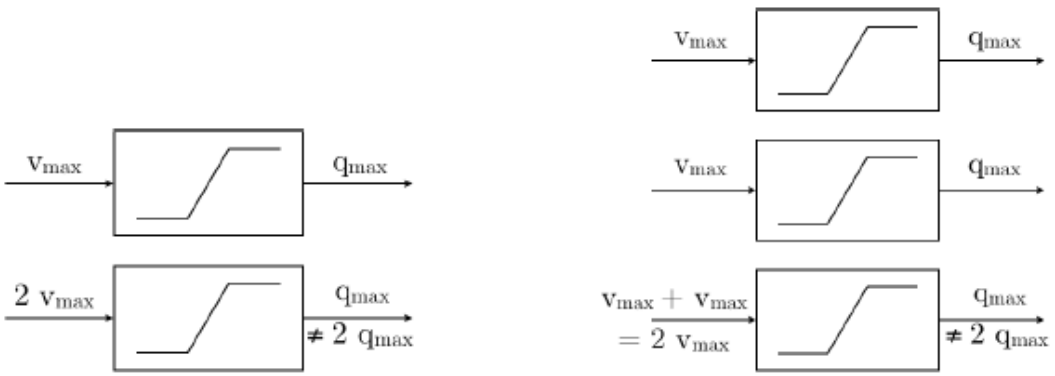
Q20. Pendant un laps de temps Δt, le piston du vérin s'est déplacé d'une distance Δx grâce à la quantité d'huile (supposée incompressible) injectée. Le volume d'huile injecté vaut $S\Delta x$ avec S la surface du piston. D'où : $Q\Delta t = S\Delta x$. En considérant des variations infinitésimales, on obtient : $Q(t) = S\cdot\dfrac{dx}{dt} = S\cdot V$ avec, ici, $V = |\vec{V}_{A_2\in 2/4}\cdot\vec{x}_2|$. Le débit maximal vaut alors :
$\boxed{q_{max} \simeq 4\cdot 10^{-3}\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} \simeq 240\text{ L}\cdot\text{min}^{-1}}$.



Q21. D'après la figure, le comportement du bloc saturation doit être traduit par la fonction suivante.

```
def saturation(v):
"""Renvoie la valeur du débit q en sortie de servovalve saturée à partir d'une
valeur de tension de commande v """
   if v <= - v_max :
      q = - q_max
   elif v >= v_max :
      q = q_max
   else :
      q = q_max / v_max * v
   return(q)
```

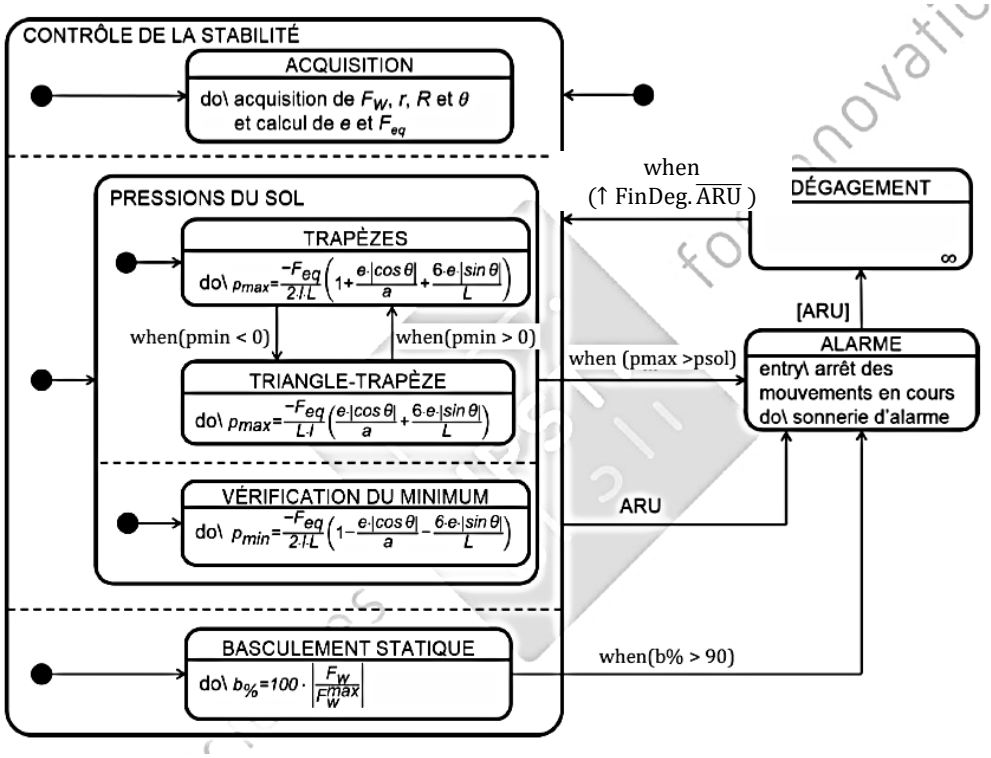
Q22. Ce système est non linéaire car il ne respecte pas le principe de proportionnalité (ni celui de superposition).



(a) Proportionnalité (b) Superposition

Problème N°2: Contrôle d'une machine de forage (extrait CCinp MP 2023)

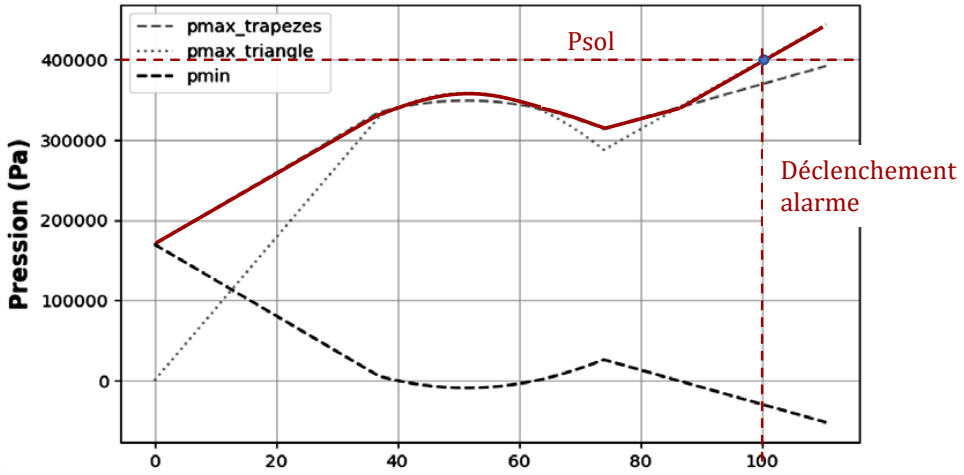
Q1 :



Une solution sans le mot when est acceptable

Les variables doivent être calculées continument. On pourrait indiquer une transition réflexive.

Q2 : La pression maximale admissible pour le gravier compact est de 400 kPa.
L'indicateur b_% reste en dessous la valeur de déclenchement de l'alarme.
L'alarme se déclenche lorsque la pression calculée atteint 400 000 Pa, soit à l'instant 100 s.



Q3 : $\overrightarrow{V(I,4/0)} = \overrightarrow{V(I,4/3)} + \overrightarrow{V(I,3/cable)} + \overrightarrow{V(I,cable/0)}$
Avec

- mouvement de rotation de 4 par rapport à 3 d'axe$(C,\vec{y})$,
  $\overrightarrow{V(I,4/3)} = \overrightarrow{V(C,4/3)} + \overrightarrow{IC} \wedge \omega_{4/3}\vec{y} = \vec{0} - R_3\vec{x} \wedge (-\omega_3\vec{y}) = R_3\omega_3\,\vec{z}$
- non glissement du câble sur la poulie, $\overrightarrow{V(I,3/cable)} = \vec{0}$
- câble attaché en O, donc fixe par rapport à 0, $\overrightarrow{V(I,cable/0)} = \vec{0}$

D'où : $\overrightarrow{V(I,4/0)} \cdot \vec{z} = R_3\,\omega_3$.
De plus, le mouvement de 4 par rapport à 0 est une translation : $\overrightarrow{V(I,4/0)} \cdot \vec{z} = \overrightarrow{V(D,4/0)} \cdot \vec{z} = V$.
Q4 : on a $V = -R_3\,\omega_3 + R_1\omega_1$ et $V = R_3\omega_3$. En remplaçant, on obtient : $V = \frac{R_1}{2}\omega_1$, soit : $R_{eq} = \frac{R_1}{2}$

Q5 : Les ressorts étant en parallèle, les allongements sont tous identiques. L'actions du ressort équivalent est la somme des actions de chacun des ressorts : $\overrightarrow{F_{nr}} = \sum_{i=1}^{n} k(\Delta z_0 - \Delta z)\vec{z} = n\,k(\Delta z_0 - \Delta z)\vec{z}$.
Par identification on trouve $k_T = n\,k$. De même, pour les amortisseurs : $\lambda_T = n\,\lambda$.

Q6 : Isolons (5), soumis aux actions mécaniques extérieures du poids $M_K g$, des ressorts et amortisseurs et de la liaison glissière 4-5.
A l'équilibre, le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}$ donne :
$-M_K g - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) + \lambda_T\Delta\dot{z} + F_{sol} = 0$, avec $\Delta\dot{z} = 0$ à l'équilibre et $F_{sol} = 0$ car le système est suspendu.
D'où : $-M_K g - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = 0$
Isolons (4+5), soumis aux actions mécaniques extérieures des poids sur (4) et (5), des câbles et de la liaison glissière 4-0.
A l'équilibre, le théorème de la résultante statique en projection sur $\vec{z}$ donne : $2F_{we} - (M_T + M_K)g = 0$

Q7 : Les actions mécaniques extérieures à 4 proviennent des câbles, de son poids, des ressorts et amortisseurs et des liaisons glissières avec 0 et 5.
Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur $\vec{z}$ donne :

$$M_T\,\ddot{z}_4 = 2F_w - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z) - \lambda_T\Delta\dot{z}$$

Q8 : Avec le changement de variable proposé : $\Delta z = z_4 - z_5 = \hat{z}_4 - \hat{z}_5 + \Delta z_e$.
L'équation de la question précédente devient :

$$M_T\,\ddot{\hat{z}}_4 = 2F_{we} + \delta F_w - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \hat{z}_4 + \hat{z}_5 - \Delta z_e) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$$

$$\Leftrightarrow M_T\,\ddot{\hat{z}}_4 = 2F_{we} - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) + \delta F_w + k_T(-\hat{z}_4 + \hat{z}_5) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$$

Avec, à l'équilibre : $2F_{we} - M_T g = M_K g$, soit $2F_{we} - M_T g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = M_K g + k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) = 0$.

D'où, par rapport à la position d'équilibre : $M_T\,\ddot{\hat{z}}_4 = \delta F_w + k_T(-\hat{z}_4 + \hat{z}_5) - \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$.
En regroupant les termes, on obtient la première équation recherchée : $M_T\,\ddot{\hat{z}}_4 + \lambda_T\dot{\hat{z}}_4 + k_T\hat{z}_4 = \lambda_T\dot{\hat{z}}_5 + k_T\hat{z}_5 + \delta F_w$.

Q9 : L'équation donnée dans le sujet, s'écrit, après changement de variables :

$$M_K\,\ddot{\hat{z}}_5 = F_{sol} - k_T(\Delta z_0 - \hat{z}_4 + \hat{z}_5 - \Delta z_e) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5) - M_K g$$
$$\Leftrightarrow M_K\,\ddot{\hat{z}}_5 = F_{sol} - k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) - M_K g - k_T(\hat{z}_5 - \hat{z}_4) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$$

A l'équilibre, $-k_T(\Delta z_0 - \Delta z_e) - M_K g = 0$, d'où $M_K\,\ddot{\hat{z}}_5 = F_{sol} - k_T(\hat{z}_5 - \hat{z}_4) + \lambda_T(\dot{\hat{z}}_4 - \dot{\hat{z}}_5)$.
En regroupant les termes, on obtient la deuxième équation recherchée.
La première équation donne : $Z_4(p)(M_T p^2 + \lambda_T p + k_T) = (k_T + \lambda_T p)Z_5(p) + \Delta F_w(p)$.
De plus, $v(t) = \frac{dz_4(t)}{dt}$, soit $Z_4(p) = \frac{V(p)}{p}$.
On obtient $\Delta F_w(p) = \frac{k_T+\lambda_T p+M_T p^2}{p}V(p) - (k_T + \lambda_T p)Z_5(p)$ (i)
On en déduit $H_8(p) = \frac{k_T+\lambda_T p+M_T p^2}{p}$
La deuxième équation donne : $Z_5(p) = \frac{1}{k_T+\lambda_T p+M_K p^2}\left[(k_T + \lambda_T p)\frac{V(p)}{p} + F_{sol}(p)\right]$.
On en déduit $H_6(p) = \frac{k_T+\lambda_T p}{p}$ Et, en replaçant $Z_5(p)$ dans (i) : $H_7(p) = \frac{k_T+\lambda_T p}{k_T+\lambda_T p+M_K p^2}$

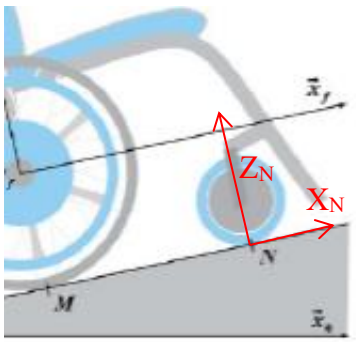
Q10 : On obtient :

$$\begin{aligned} Q_p(p) &= K_s\,U_s(p) \\ \tfrac{V_0}{B}p\Delta P(p) &= Q_p(p) - Q_m(p) \\ Q_m(p) &= C_Y\,\Omega_m(p) \\ C_m(p) &= C_Y\,\Delta P(p) \\ (a + J_{eq}p)\,\Omega_m(p) &= C_m(p) - C_r(p) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} H_1(p) &= K_s \\ H_2(p) &= \tfrac{B}{V_0 p} \\ H_3(p) &= C_Y \\ H_4(p) &= C_Y \\ H_5(p) &= \tfrac{1}{a+J_{eq}p} \end{aligned}$$

Q11 : K_{ihm} permet de s'assurer qu'en régime permanent, l'image de l'erreur ϵ_V est nulle lorsque l'erreur est nulle, qu'elle que soit la consigne.
Condition vérifiée si $\boxed{K_{ihm} = K_{gen}\frac{2}{R_2}}$.

Problème N°3 : Roue autonome ezwheel (extrait CCinp MP 2013)

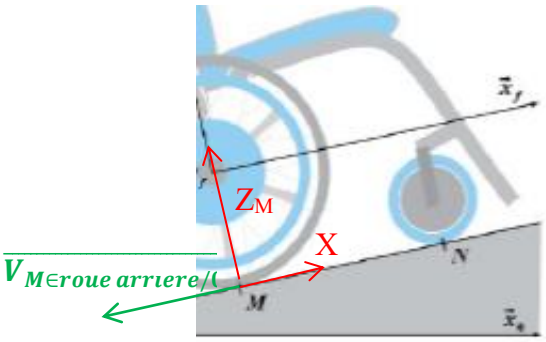
Q1a $\boxed{\left\{T_{Sol\to roues\,avant}\right\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_N & 0 \end{Bmatrix}_{N,Rf}}$



Ponctuelle de normale $(N, \overrightarrow{z_f})$ pour laquelle l'effort tangentiel est négligé.

Justification : TMD en A sur la roue avant en projection sur $\overrightarrow{y_f}$:
$\overrightarrow{M_{A,pes\to roue\,avant}}\cdot\overrightarrow{y_f} + \overrightarrow{M_{A,pivot\,fauteuil\to roue\,avant}}\cdot\overrightarrow{y_f} + \overrightarrow{M_{A,sol\to roue\,avant}}\cdot\overrightarrow{y_f} = \overrightarrow{\delta_{A,roue\,avant/0}}\cdot\overrightarrow{y_f} = 0$
Pesanteur négligée + pivot fauteuil/roue axe avant (A, $\overrightarrow{y_f}$) sans frottement + inertie négligée ⇒
$R_{ayon\,roue\,avant}\cdot X_N = 0 \Rightarrow X_N = 0$
Remarque : ce n'est pas le cas pour la roue arrière qui est motorisée. Il y a le couple moteur qui intervient dans le TMD (voir Q4).

Q1b $\left\{T_{Sol\rightarrow roues\ arrière}\right\}=\begin{Bmatrix} X_M & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_M & 0 \end{Bmatrix}_{M,Rf}$



Ponctuelle de normale $(M,\overrightarrow{z_f})$ avec forttement donc une composante tangentielle (du sol sur la roue) opposée à la vitesse de glissement (de la roue par rapport au sol quand ça glisse) :
$\overrightarrow{V_{M\in roue\ arrIEre/0}} = -R_{ayon\ roue\ arrIEre}.\omega_{roue\ arriere/fauteuil}\overrightarrow{x_f}$

Q1c $\left\{T_{Poids\rightarrow fauteuil}\right\}=\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -M_S g & 0 \end{Bmatrix}_{G,R}$ Glisseur en G de porté par $-\overrightarrow{z_0}$

Q2 : Pour une roue avant par exemple sachant que A n'est pas un point fixe du repère galiléen (0) lié au sol, on reprend les formules les plus générales :
$\overrightarrow{\delta_{A,roue/0}} = \frac{d}{dt/0}\overrightarrow{\sigma_{A,roue\ avant/0}} + m_r\overrightarrow{V_{A/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{roue\ avant}/0}}$

- $G_{roue\ avant} = A \Rightarrow m_r\overrightarrow{V_{A/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_{roue\ avant}/0}} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{\sigma_{A,roue\ avant\ /0}} = I_{A,roue\ avant}.\overrightarrow{\Omega_{roue\ avant/0}} + m_r\overrightarrow{AG_{roue\ avant}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in roue\ avant/0}}$
- $G_{roue\ avant} = A \Rightarrow m_r\overrightarrow{AG_{roue\ avant}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in roue\ avant/0}} = \vec{0}$
- $I_{A,roue\ avant} = 0$ inertie négligée

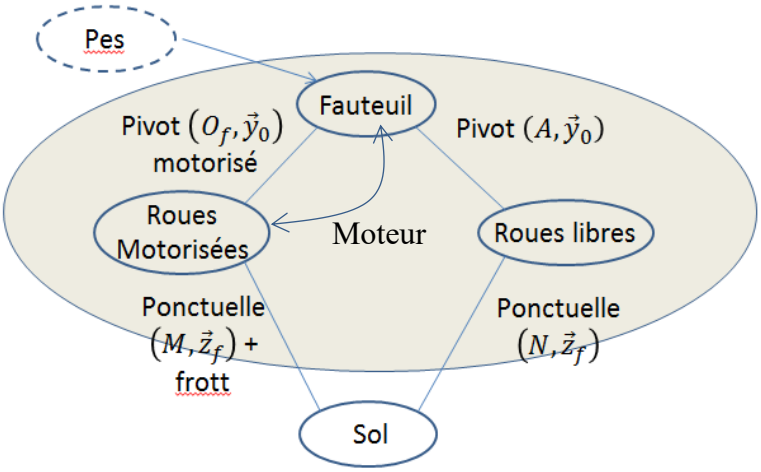
Donc $\overrightarrow{\delta_{A,roues\ avant/0}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\delta_{A,roues\ arrieres/0}} = \vec{0}$
On finit avec Babar : $\overrightarrow{\delta_{G,roues\ avant/0}} = \overrightarrow{\delta_{A,roues\ avant/0}} + \overrightarrow{GA} \wedge m_r\overrightarrow{\Gamma_{A/0}} = \vec{0}$ car masse négligée devant celle du fauteuil.
Du coup, tout est nul…
Il faut comprendre ce calcul mais ne pas le refaire…
L'utilisateur et le fauteuil se déplacent en ligne droite : il n'y a pas de mouvement de rotation .
$\vec{\delta}_{G,utiisateur+fauteuil/0} = \vec{0}$ .Résultat du cours à connaître **par cœur**. Il faut être au centre de gravité et dans un mouvement de translation (rectiligne ou circulaire) pour écrire que le moment dynamique est nul.

Donc : $\vec{\delta}_{G,S/0} = \vec{\delta}_{G,utilisateur+fauteuil/0} + \vec{\delta}_{G,roues\ avant/0} + \vec{\delta}_{G,roues\ arriere/0} = \vec{0}$

Remarque : la justification doit être précise. Fauteuil+utilisateur translatent mais roues translatent et tournent !!!

Q3 : Le problème étant considéré comme plan, deux équations scalaires proviennent de l'application du théorême de la résultante dynanique au système S en projection sur les axes $\vec{x}_f$ et $\vec{z}_f$. La troisième équation scalaire provient de l'application du théorême du moment dynamique au système S en projection sur l'axe $\left(G,\vec{y}_f\right)$.
Les masses et inerties des roues motorisées sont négligeables, donc la résultante dynamique du système S est égale à la résultante dynamique du fauteuil et de l'utilisateur qui ont un mouvement de translation dirigé selon $\vec{x}_f$:

$$M_S\,\vec{a}\,(G,S/R_0) = M_S\ddot{x}(t)\,\vec{x}_f$$



Les actions des forces électromagnétiques (moteurs) sur les roues et sur le fauteuil s'annulent. Rappel : $\alpha \leq 0$, on obtient donc :

$$(1) \quad X_M + M_S g \sin\alpha = M_S \ddot{x}(t)$$

interprétation : $\alpha < 0$ ($\overrightarrow{y_f}$ part dans le fond…). Pour atteindre l'équilibre il faut produire grâce au couple moteur un effort tangentiel permettant au moins de compenser les effets de pesanteur (suivant l'axe du sol) : $X_M = -M_S g \sin\alpha$.
Pour accélérer, il faut que cet effort tangentiel soit supérieur à $-M_S g \sin\alpha$ (qui est positif). Cela nécessite donc un couple supérieur fournit par le moteur…

$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos\alpha = 0$$

interprétation : combinée avec le TMD cette équation traduit la répartition des efforts normaux. Plus la pente de la rampe va être grande plus les roues arrières sont chargées (Z_M grand)

Les 2 composantes Z_M et Z_N sont positives.

$$\overrightarrow{M}_{G,Sol\to rouesavant} \cdot \vec{y}\,f = \left(\overrightarrow{GN} \wedge Z_N\,\vec{z}\,f\right) \cdot \vec{y}\,f = \left[\left(-h\,\vec{z}\,f + e\,\vec{x}\,f\right) \wedge Z_N\,\vec{z}\,f\right] \cdot \vec{y}\,f = -eZ_N$$

$$\overrightarrow{M}_{G,Sol\to rouesarriere} \cdot \vec{y}\,f = \left(\overrightarrow{GM} \wedge \left[X_M\,\vec{x}\,f + Z_M\,\vec{z}\,f\right]\right) \cdot \vec{y}\,f$$
$$= \left[\left(-h\,\vec{z}\,f - l\,\vec{x}\,f\right) \wedge \left[X_M\,\vec{x}\,f + Z_M\,\vec{z}\,f\right]\right] \cdot \vec{y}\,f = -hX_M + lZ_M$$

$$(3) \quad -eZ_N - hX_M + lZ_M = 0$$

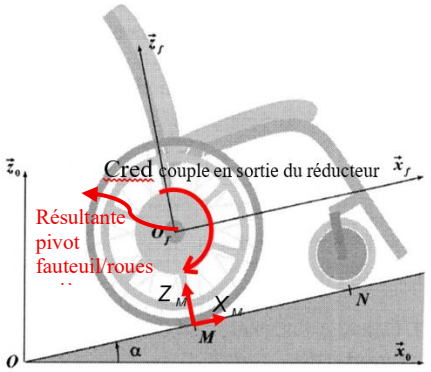
- On applique le TMD forcément en G à cause de Q2. On notera que la composante tangentielle X_M produit un moment < 0. Z_N produit un moment < 0 et ZM un moment > 0.
- A chaque fois, on peut calculer ces moments par force*bras de levier. Le produit vectoriel de Babar n'est pas indispensable…
- N'oubliez pas que le PFD se traduit par le TRD et le TMD !!!!! dans un pb plan comme ici cela donne 3 équations scalaires.
- Pas de gros calculs de dynamique ici : le moment dynamique est nul et la réultante dynamique c'est masse*accélération suivant $\overrightarrow{x_f}$ …
- Attention : Cred est le couple à la sortie du réducteur qui fait tourner les roues arrières motrices. Il provient du couple moteur du stator fixé au fauteuil sur le rotor fixé aux roues. Il est donc interne au système isolé. Il ne fait pas partie du BAME !!! Il est dans le BAME quand on isole les roues arrières (Q4)

Q4 : A la limite du glissement, on a d'après la loi de Coulomb : $(4) \quad X_M = fZ_M$

Rappel : $\alpha \leq 0$ ($\overrightarrow{y_f}$ part dans le fond…)

Remarque :
Le fauteuil monte donc l'action tangentielle du sol sur les roues motorisées est dirigée selon $+\overrightarrow{x_f}$:

- les roues motorisées arrière sont en équilibre puisque leur masse et leur inertie sont négligées. Le TMD au centre des roues arrière vaut 0.
- en appliquant le théorème du moment statique en projection sur l'axe $(O_f, \overrightarrow{y_f})$ aux roues motorisées, on trouve que X_M est dirigé selon $+\overrightarrow{x_f}$



$Cred - RX_M = 0 \Rightarrow X_M > 0$ permet de retrouver le sens de l'action tangentielle

On a donc le système d'équations suivant :

$$(1) \quad fZ_M + M_S g \sin\alpha = M_S \ddot{x}(t)$$
$$(2) \quad Z_N + Z_M - M_S g \cos\alpha = 0$$
$$(3) \quad -eZ_N - hfZ_M + lZ_M = 0$$

Résolution : $e \times (2) + (3) \Leftrightarrow (e + l - hf)Z_M = eM_S g \cos\alpha$

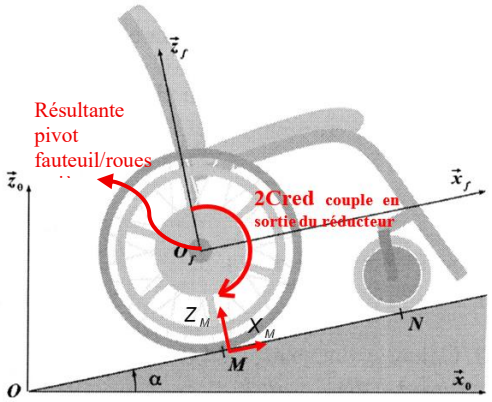
D'où : $\ddot{x}(t) = g\left[\sin\alpha + \frac{fe\cos\alpha}{(e+l-hf)}\right]$

Application numérique : on a alors $tan|\alpha| = \frac{12}{100}$ pour une pente de 12%, d'où $\alpha = -6{,}8° \Rightarrow \ddot{x} = 4{,}15 m.s^{-2}$

Q5 : On tient compte du fait qu'il y a deux motoréducteurs et qu'on considère le problème comme plan.

Le système isolé est à présent constitué des deux roues motorisées. La masse et l'inertie de ces roues étant négligées, on applique le théorème du moment dynamique équivalent au théorème du moment statique ici en projection sur l'axe $(O_f, \overrightarrow{y_f})$:

$\overrightarrow{M}_{O_f,Sol\to roues\ arrière} \cdot \overrightarrow{y}_f + \overrightarrow{M}_{O_f,motoréducteurs\to roues\ arrière} \cdot \overrightarrow{y}_f = 0$



le moment en O_f projeté sur $\overrightarrow{y_f}$ du torseur de la liaison pivot fauteuil/roues arrière vaut 0 (liaion sans frottement).

$\overrightarrow{M}_{O_f,Sol\to roues\ arrière} \cdot \overrightarrow{y}\, f = \left(\overrightarrow{O_f M} \wedge \left[X_M\, \overrightarrow{x}\, f + Z_M\, \overrightarrow{z}\, f\right]\right) \cdot \overrightarrow{y}\, f = \left[-R\, \overrightarrow{z}\, f \wedge X_M\, \overrightarrow{x}\, f\right] \cdot \overrightarrow{y}\, f = -RX_M$

avec $X_M = fZ_M$ (limite du glissement)

On a donc : $(5) \quad 2C_{red} - RfZ_M = 0$

On avait précédemment trouvé : (1) $fZ_M + M_S g \sin\alpha = M_S \ddot{x}(t) \Leftrightarrow 2\frac{C_{red}}{R} = M_S(\ddot{x}(t) - g\sin\alpha)$

$$C_{red} = \frac{R}{2} M_S(\ddot{x}(t) - g\sin\alpha)$$

Application numérique dans le cas du glissement : $\ddot{x} = 4{,}15 m.s^{-2}$ donc $C_{red} \approx 160\ Nm$

Q6 :« Chaque motoréducteur fournit 70 Nm au maximum » et on trouve qu'il faut un couple de 160 Nm pour que le fauteuil patine sur une pente de béton mouillé de 12%.

Les moteurs ne fournissant pas ce couple élevé, <u>le fauteuil ne patinera pas.</u>

(2) $Z_N + Z_M - M_S g\cos\alpha = 0$ et (5) $2C_{red} - RfZ_M = 0$

d'où : $Z_N = M_S g\cos\alpha - Z_M = M_S g\cos\alpha - \frac{2C_{red}}{Rf} = 1461 - 1778 \quad [N]$

$$Z_N = -317\ N$$

Ce qui est impossible : Z_N ne peut être que positif s'il y a contact entre la roue avant et le sol ou nul s'il n'y a pas contact avec le sol.

Donc, le fauteuil n'est pas en équilibre quand le couple moteur est de 160 Nm et quand il est à la limite du glissement sur une pente à 12% de béton mouillé : <u>le fauteuil bascule</u>.

D'où la nécessité de limiter le couple moteur pour empêcher le basculement.

Q7 : Avec la valeur de couple moteur fournie. On a le système d'équations suivant avec C_{red} =70 Nm

(1) $X_M + M_S g\sin\alpha = M_S\ddot{x}(t)$

(2) $Z_N + Z_M - M_S g\cos\alpha = 0$

(5) $2C_{red} - RX_M = 0$ ce qui donne $X_M = 350N$

D'où $\ddot{x}(t) = \frac{2C_{red}}{RM_S} + g\sin\alpha$ Application numérique : $\ddot{x}(t) = 1{,}17\ m.s^{-2}$

Le fauteuil ne glissera pas sur une pente de béton mouillé de 12% puisque Cm <160 Nm.

On cherche à présent Z_N pour vérifier qu'il y a contact entre la roue avant et le sol.

On a le système d'équations :

(2) $Z_N + Z_M = M_S g\cos\alpha$

(3) $-eZ_N + lZ_M = hX_M$

Résolution : $l \times (2) - (3) \Leftrightarrow (e+l)Z_N = eM_S g\cos\alpha - hX_M$ avec (5) $X_M = \frac{2C_{red}}{R}$

On a donc :$Z_N = \frac{lM_S g\cos\alpha - h\frac{2C_{red}}{R}}{e+l}$ Application numérique : $Z_N = 137N$

<u>Le fauteuil ne bascule pas</u> puisque $Z_N > 0$, les roues avant sont en contact avec le sol.

On peut vérifier qu'on n'a pas glissement en M : $e \times (2) + (3) \Leftrightarrow (e+l)Z_M = eM_S g\cos\alpha + hX_M$

Ce qui donne $Z_M = \frac{eM_S g\cos\alpha + h\frac{2C_{red}}{R}}{e+l}$ Application numérique : $Z_M = 1324N$

D'après la loi de Coulomb, on n'a pas glissement en M si : $|X_M| < f|Z_M|$

Le coefficient de frottement f des roues sur une rampe de béton mouillé de pente 12% est $f = 0{,}45$

On a bien : $350 < 0{,}45 \times 1324$.

<u>Le fauteuil ne glisse pas sur une rampe de béton mouillé dont la pente est 12%.</u>.

Ce cas de figure étant le cas le plus défavorable, les moteurs mis en place sur le fauteuil permettent de respecter les normes d'accès aux bâtiments.

<u>Remarque générale :</u> les questions nécessite une parfaite modélisation (Q1) puis une application dans un premier temps du PFD sur l'ensemble du véhicule (Q2) puis sur les roues arrières (Q4). Les 3 équations obtenues à la Q2 sont indispensables pour la suite du Pb…