DS N°1

Aucun document autorisé

Calculatrices autorisées

Le devoir comporte 3 problèmes extraits de sujets de concours à traiter dans l'ordre proposé.

Durée 4 heures

Problème N°1 : Quille Pendulaire (extrait de Mines ponts MP 2014)

1 Mise en situation

1.1 Contexte

La conception des voiliers de course, dans un contexte de forte compétitivité sportive et technique, utilise toutes les évolutions récentes afin d'améliorer performances et sécurité. Dès les premiers stades de la conception du navire, l'architecte naval intègre les exigences des différents spécialistes qui collaborent au projet. À ce titre, la conception d'un voilier de course océanique est analogue à la conduite d'un projet industriel classique où les intervenants s'inscrivent dans une démarche collaborative pilotée par un coordonnateur de projet.

1.2 Fonction de la quille dans la dynamique des voiliers

Le comportement dynamique d'un voilier est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il entre en contact : l'air et l'eau. Il reçoit de l'énergie sous la forme des actions aérodynamiques dues au mouvement relatif air/voiles. Ces actions mécaniques le font avancer et provoquent son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction $\overrightarrow{z_N}$ sur la figure 1). C'est le phénomène de gite. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contre-poids. Cette quille est généralement constituée d'un voile immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. L'efficacité de la quille dépend de la masse du lest et de la longueur du voile.

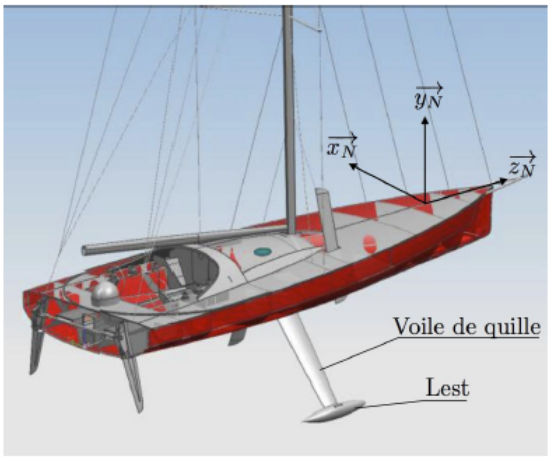


FIGURE 1 – Voilier 60' IMOCA

Ces deux paramètres présentent des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement le voile de quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond !).

2 Mise en évidence de l'intérêt d'une pendulation

2.1 Étude de la stabilité « de formes » d'un voilier doté d'une quille non pendulaire (voir figure 2)

On considère le navire à l'arrêt et en équilibre sur un plan d'eau au repos (figure 2, à gauche). Il est soumis :

- aux effets de pesanteur, représentés par le torseur $\{\mathcal{T}_{pes\to nav}\} = \left\{\begin{matrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$ où G désigne le centre de gravité du navire, M sa masse, g l'accélération de pesanteur et $\vec{y}$ oriente la verticale ascendante du lieu ;
- aux actions de l'eau sur la coque ou « Poussée d'Archimède » représentées par le torseur $\{\mathcal{T}_{eau\to nav}\} = \left\{\begin{matrix} R_D\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$ où C désigne le centre de carène et R_D, exprimée en Newton, l'intensité de la résultante des actions de l'eau sur la coque, que l'on nomme « déplacement » en construction navale. À l'équilibre : $R_D = Mg$.

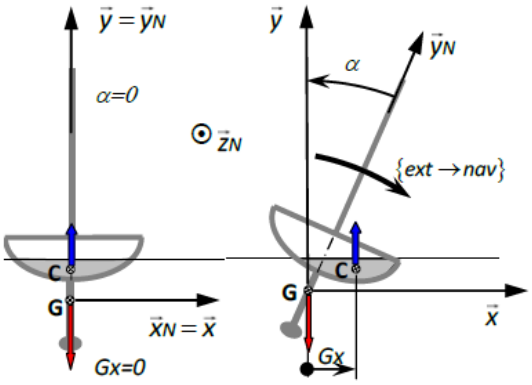


FIGURE 2 – Coque en équilibre (à gauche) et sous gîte (à droite)

Une cause extérieure représentée par le torseur $\{\mathcal{T}_{ext\to nav}\}$, comme l'effet du vent sur les voiles ou des vagues sur la coque, provoque la gîte du navire caractérisée par l'angle de gîte α (figure 2, à droite). Un nouvel équilibre est alors obtenu sous l'effet des deux actions mécaniques précédentes, le poids et la poussée d'Archimède, ainsi que l'action mécanique extérieure cause de gîte. L'équation de moment en G selon $\vec{z}$ se traduit par : $\overrightarrow{M}_{G,ext\to nav}.\vec{z} + R_D.G_x = 0$ où G_x désigne la longueur mesurée algébriquement selon $\vec{x}$ entre le centre de gravité et le centre de carène. La quantité $R_D.Gx$ est appelée :

— *moment de redressement* si $R_D.Gx > 0$ et $\alpha > 0$ ou $R_D.Gx < 0$ et $\alpha < 0$;

— *moment de chavirage* si $R_D.Gx < 0$ et $\alpha > 0$ ou $R_D.Gx > 0$ et $\alpha < 0$.



FIGURE 3 – Modèle numérique d'une coque de 60' IMOCA

Dans son avant-projet, l'architecte naval étudie cette stabilité du navire à l'aide d'outils de simulation numérique. À partir du modèle numérique des formes de la coque (exemple figure 3) et d'une répartition des masses aussi proche que possible de la répartition finale, les différentes positions d'équilibre du navire sont recherchées en fonction de l'angle de gîte. Cette étude fournit une courbe de stabilité théorique où apparaît en abscisse l'angle de gîte α et en ordonnée le paramètre G_x (voir courbe de la figure R1 sur le document réponses ou la figure 4).

Q1. La figure R1 du document réponses donne la courbe de stabilité théorique d'un voilier à quille non pendulaire (quille fixe par rapport à la coque).

a - Expliquer pourquoi G_x suffit à caractériser le moment de redressement ou de chavirage.

b - Pour chacune des six positions (numérotées de 1 à 6) de la figure R2 du document réponses, associer le point d'équilibre A, B, C, D, E ou F repéré sur la courbe de la figure R1. Par exemple, le point A correspond à la position 4 ; on a donc inscrit la lettre A dans la case 4.

La figure 4 représente l'évolution, pour un navire 60' IMOCA à quille fixe, de G_x en fonction de l'angle de gîte α, pour α variant de 0 à 180°. Sur cette courbe, les quantités $S_{01} = \int_0^{\alpha_1} G_x(\alpha)d\alpha$ et $S_{12} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} G_x(\alpha)d\alpha$ sont représentées par les « aires » comprises entre la courbe et l'axe des abscisses. On montre que $S_{ij} = \int_{\alpha_i}^{\alpha_j} G_x(\alpha)d\alpha$, lorsque l'angle de gîte passe de la valeur α_i à la valeur α_j, est proportionnel au travail des actions de pesanteur développées par le mouvement du navire.

La réglementation impose à l'architecte naval de créer des formes de coque pour lesquelles :

— l'angle de gîte provoquant la mise en situation de chavirage du voilier (changement de signe de G_x) soit au minimum de 120° (point D de la figure R1) ;

— le rapport des « aires » soit tel que $\frac{S_{01}}{S_{12}} = 5$. Le travail du poids est ainsi cinq fois plus grand dans la zone de redressement que dans la zone de chavirage : le bateau est cinq fois plus difficile à faire chavirer qu'à redresser.

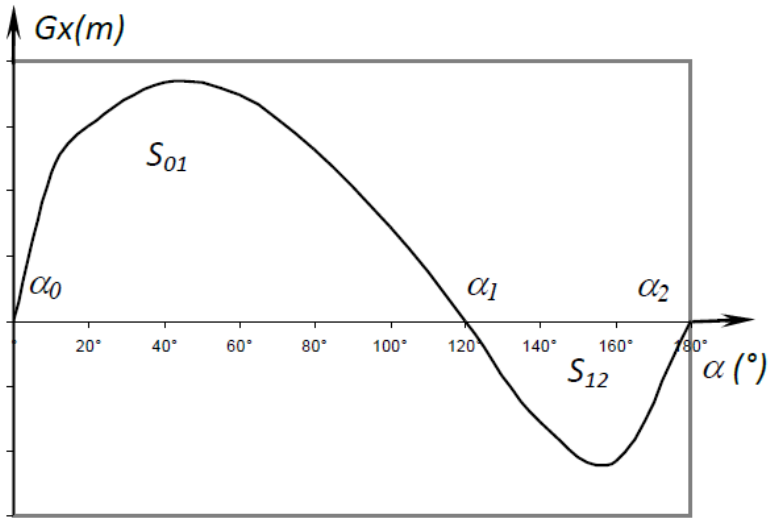


FIGURE 4 – Courbe de stabilité théorique : définition des « aires » S_{01} et S_{12}

2.2 Présentation du système

Une évolution récente des voiliers de course océanique a été de les doter d'une quille pendulaire (figures 5 et 6). Cette quille est en liaison pivot d'axe $(O, \overrightarrow{z_N})$ avec la coque du navire et peut être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par le blocage en rotation de celle-ci. La mise en mouvement et le blocage en position de la quille sont réalisés par une chaine d'énergie étudiée dans la suite du sujet.



FIGURE 5 – Voilier avec sa quille pendulaire écartée au maximum sur « bâbord »

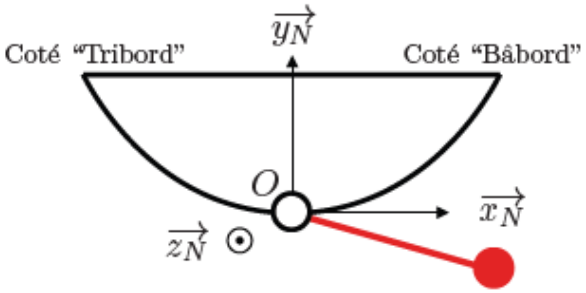


FIGURE 6 – Modèle cinématique élémentaire de la quille pendulaire

Q2. La figure R3 du document réponses donne les courbes de stabilité théorique d'un voilier dont la quille pendulaire est inclinée :

— au maximum sur « tribord » (à droite dans le sens de la marche) (courbe 1) ;

— d'un angle nul (courbe 2).

a - Au vu de ces courbes, quels avantages procure la quille pendulaire au comportement du navire lorsqu'il gîte avec un angle α positif ?

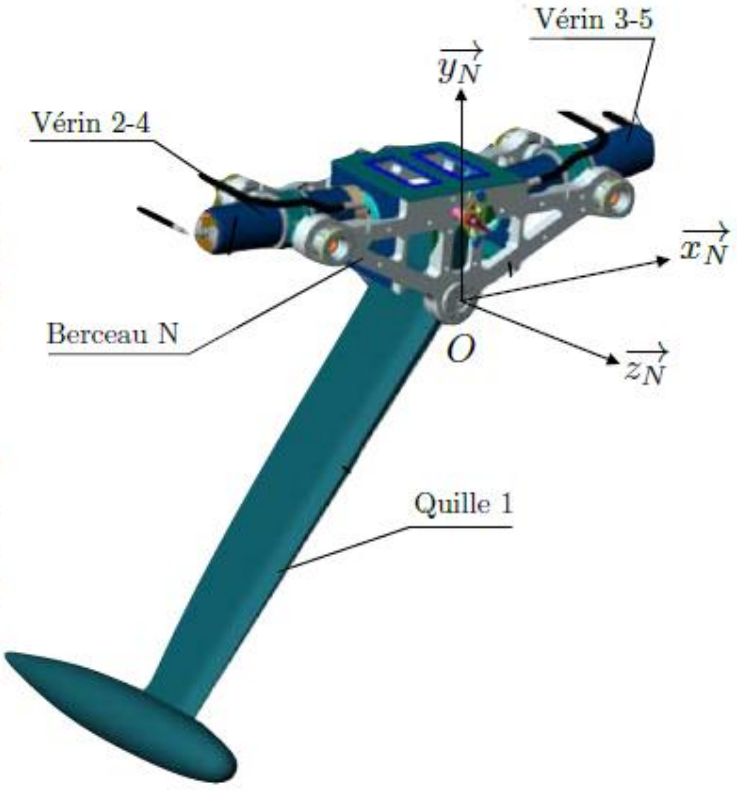
b - Pour un angle de gîte α négatif, quel est l'apport de la quille pendulaire ?

c - Dans la situation de navigation où le vent vient de tribord et où la gîte ne doit pas être trop importante malgré la grande surface de voile déployée, quelle doit être la configuration de navigation à adopter ? Répondre par un dessin reproduisant la figure 6 et justifier le choix.

3 Éléments et fonctionnement

La quille pendulaire constitue un système dont l'exigence principale est « Orienter la quille ». Pour cela, elle utilise des vérins hydrauliques mettant en mouvement la quille via une chaîne de solides présentée figure ci-contre.

L'énergie hydraulique alimentant les vérins est créée par une centrale hydraulique et distribuée par des servo-valves. Des bloqueurs hydrauliques à pilotage électrique permettent de maintenir la position des vérins et donc de la quille.



4 Modélisation de l'action de la pesanteur sur la quille

Objectif

Modéliser l'action mécanique exercée par la pesanteur sur la quille afin de valider le modèle proposé dans la partie 5.1.

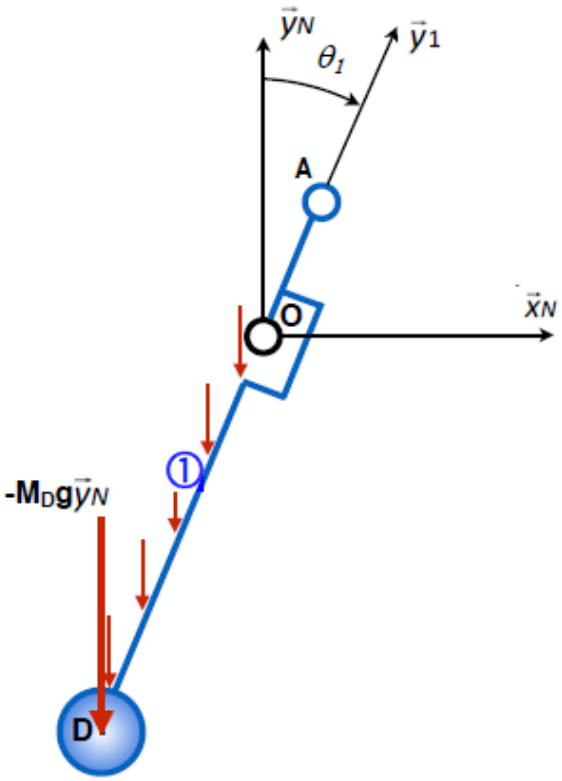


FIGURE 7 – Répartition du poids sur la quille ($\theta_1 < 0$ ici)

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à la quille modélisable dans le plan $(\vec{x}_N, \vec{y}_N)$ par le schéma de la figure 7. On note $g = 9,81 m \cdot s^{-2}$ l'accélération de la pesanteur.

Hypothèses :

- L'action de la gravité sur la quille est modélisée par :
  - un glisseur en D, modélisant le poids exercé sur le lest de masse M_D ;
  - une densité linéique d'effort $\rho_l \cdot g$ (en N/m) s'exerçant sur le segment $[OD]$ de longueur ℓ_q, modélisant l'action de la pesanteur sur le voile de la quille. Entre les points O et A, la masse est négligeable.
- Le référentiel $\mathcal{R}_N = (O, \mathcal{B}_N)$ est supposé galiléen pour l'étude.
- La quille est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}_N$.

Q3. Exprimer le torseur d'action mécanique en D de l'action du poids sur le lest noté $\{\mathcal{T}_{pes \to lest}\}$. Le transposer en O.

Q4. Soit M un point appartenant au segment $[OD]$ tel que $\overrightarrow{OM} = y\vec{y}_1$ (avec $y < 0$). Exprimer la résultante élémentaire, notée $\overrightarrow{dR}_{pes \to voile}(M)$, de l'action de la pesanteur sur un élément dy du segment $[OD]$ centré sur M. En déduire l'expression du moment élémentaire calculé en O, noté $\overrightarrow{dM}_{O,pes \to voile}(M)$, de l'action de la pesanteur sur un élément dy du segment $[OD]$ centré sur M.

Q5. Exprimer alors le torseur d'action mécanique en O de l'action de la pesanteur sur le segment $[OD]$ de la quille, noté $\{\mathcal{T}_{pes \to voile}\}$.

Q6. En déduire le torseur modélisation l'action mécanique de la pesanteur sur l'ensemble de la quille (voile et lest), noté $\{\mathcal{T}_{pes \to quille}\}$, exprimé en O.

Q7. Montrer que le torseur $\{\mathcal{T}_{pes \to quille}\}$ peut se mettre sous la forme d'un torseur glisseur au centre de poussée P de l'action de la pesanteur sur la quille tel que $\overrightarrow{OP} = y_p\vec{y}_1$. On précisera l'expression de y_p.

5 Validation des vérins

Objectif

Valider le choix des vérins retenus par le constructeur pour la quille pendulaire : course c de 2 m, diamètre D du piston de 182 mm.

La chaîne d'énergie permettant la mise en position de la quille est représentée et modélisée sur la figure 8. Cette chaîne est composée :

- du berceau **N** encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est $\mathcal{R}_N : (O; \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$;
- de la quille **1** constituée du voile et du lest d'extrémité et dont le repère associé est $\mathcal{R}_1 : (O; \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_N)$ tel que $\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1) = (\vec{y}_N, \vec{y}_1)$;
- du vérin **2-4** constitué du piston **2** et du cylindre **4** et dont les repères associés sont respectivement $\mathcal{R}_2 : (A_2; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)$ et $\mathcal{R}_4 : (C; \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_N)$ (la rotation relative **2-4** ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de $\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_4$ seront confondues) avec $\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2) = (\vec{y}_N, \vec{y}_2)$;
- du vérin **3-5** constitué du piston **3** et du cylindre **5** et dont les repères associés sont respectivement $\mathcal{R}_3 : (A_3; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)$ et $\mathcal{R}_5 : (B; \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_N)$ (la rotation relative **3-5** ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_5$ seront confondues) avec $\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3) = (\vec{y}_N, \vec{y}_3)$.

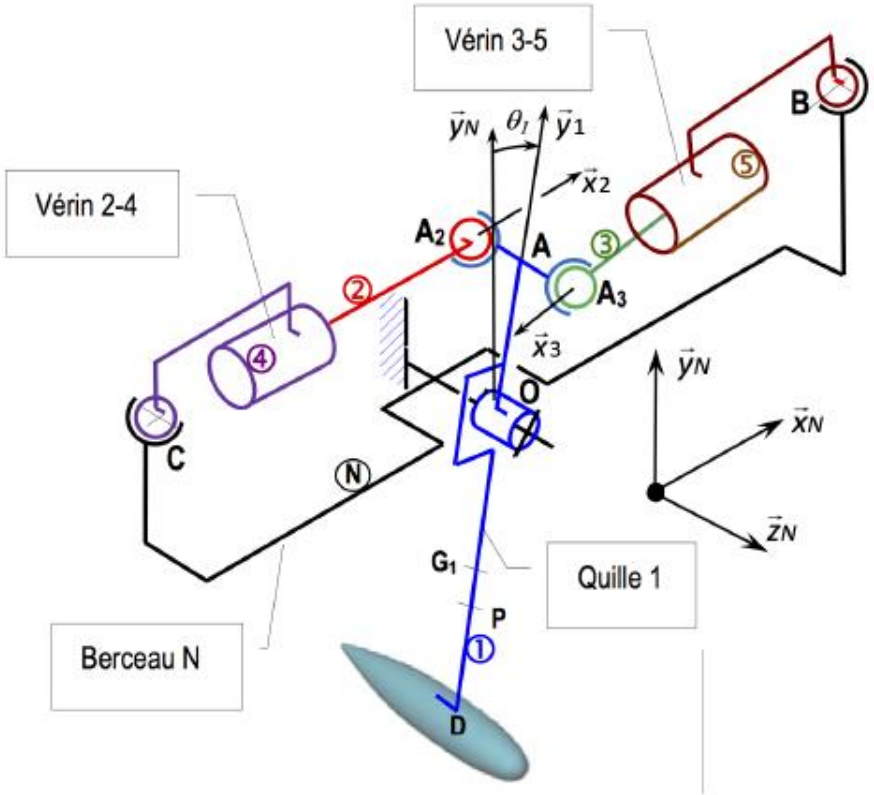


FIGURE 8 – Schéma cinématique du système d'orientation de la quille

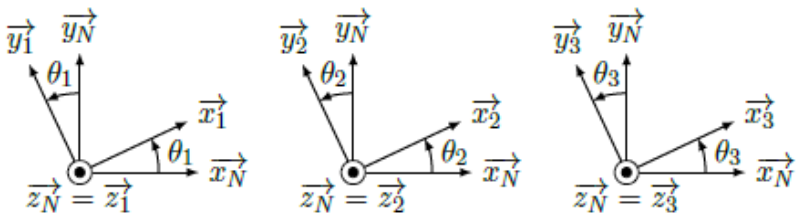


FIGURE 9 – Figures de projection

On pose le paramétrage suivant :

$\overrightarrow{OA} = r\vec{y}_1$; $\overrightarrow{AA_2} = -d\vec{z}_N$; $\overrightarrow{AA_3} = d\vec{z}_N$; $\overrightarrow{OC} = -a\vec{x}_N + b\vec{y}_N - d\vec{z}_N$; $\overrightarrow{DO} = L_{t1}\vec{y}_1$;
$\overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1$; $\overrightarrow{CA_2} = x_{24}\vec{x}_2$; $\overrightarrow{BA_3} = x_{35}\vec{x}_3$; avec $r = 1,1$ m, $a = 2,3$ m, $b = 1,4$ m, $d = 0,2$ m, L_1 et L_{t1} positifs.

5.1 Maintien d'une position de la quille

Objectif

Valider le diamètre D du vérin vis-à-vis d'une pression p_h disponible pour assurer le maintien d'une position angulaire de la quille.

Hypothèses

- Le référentiel $\mathcal{R}_N = (O, \mathcal{B}_N)$ est supposé galiléen pour l'étude.
- On suppose le problème plan $(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$ pour cette partie de l'étude.
- Les liaisons sont toutes parfaites.
- Les vérins **2-4** et **3-5** sont moteurs et produisent une action combinée, de sorte que l'action mécanique motrice de la pression hydraulique est donnée par

$$\{\mathcal{T}_{ph\to 2}\} = \left\{\begin{matrix} F_h.\vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C \quad \text{et} \quad \{\mathcal{T}_{ph\to 3}\} = \left\{\begin{matrix} -F_h.\vec{x}_3 \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$$

  avec F_h une constante positive. On suppose ainsi que chaque vérin développe une force identique.
- On suppose que l'action de la pesanteur sur la quille peut se mettre sous la forme d'un glisseur en un point P tel que $\overrightarrow{OP} = y_p\vec{y}_1$ et l'on note cette action mécanique : $\{\mathcal{T}_{pes\to quille}\} = \left\{\begin{matrix} -M_q g\vec{y}_N \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_P$ avec y_p=-2 m et M_q= 4100 kg. On gardera la notation y_p pour la suite du sujet sans la remplacer par l'expression trouvée à la question **Q7**.
- Les poids des éléments constitutifs des deux vérins sont négligés.
- Les actions hydrodynamiques sur le voile et le lest de quille sont également négligées.
- Les conditions de déplacement rendent négligeables les effets dynamiques. Les théorèmes de la statique seront donc utilisés dans la suite.

On résume alors les actions mécaniques considérées dans cette partie à l'aide de la figure suivante.

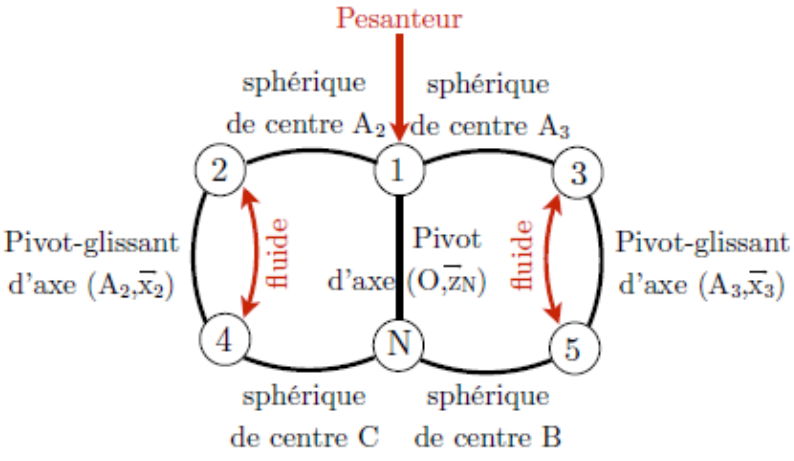


FIGURE 10 – Graphe de structure et actions mécaniques considérées

Notation

On notera le torseur d'une action mécanique transmise par la liaison $\mathcal{L}_{i/j}$ entre deux solides, exprimé en un point K dans la base $\mathcal{B}_\ell$:

$$\{\mathcal{T}_{i\to j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}_{K,\mathcal{B}_\ell}$$

Q8. En choisissant judicieusement les points de réduction, donner la forme des torseurs d'actions mécaniques transmises par les liaisons :

a - $\mathcal{L}_{N/4}, \mathcal{L}_{4/2}$ et $\mathcal{L}_{2/1}$ dans la base $\mathcal{B}_2$;

b - $\mathcal{L}_{N/1}$ dans la base $\mathcal{B}_N$;

c - $\mathcal{L}_{N/5}, \mathcal{L}_{5/3}$ et $\mathcal{L}_{3/1}$ dans la base $\mathcal{B}_3$.

Q9. Quels ensembles de solides sont soumis à exactement deux actions mécaniques extérieures modélisées par des glisseurs ? En isolant l'un d'eux, montrer que la résultante de l'action de **2** sur **1**, transmissible via la liaison $\mathcal{L}_{2/1}$, peut s'écrire $F_{21}.\vec{x}_2$.

Q10. Isoler le solide **2**. Faire le bilan des actions mécaniques extérieures. Puis, en précisant le théorème utilisé, l'éventuel point d'application et la direction de projection, en déduire l'expression de F_{21}.

Q11. Par analogie, écrire le torseur modélisant l'action mécanique de **3** sur **1** en A_3, noté $\{\mathcal{T}_{3\to 1}\}$, en fonction de F_h.

Q12. En isolant un solide pertinent et en considérant son équilibre, déterminer l'expression de F_h en fonction de M_q, y_p, g et des différents paramètres géométriques du problème. On précisera le théorème utilisé, l'éventuel point d'application et la direction de projection.

Q13. Après avoir exprimé la surface S du piston en fonction de son diamètre D, écrire l'expression de la pression hydraulique p_h en fonction de M_q, y_p, g et des différents paramètres géométriques du problème.

On suppose que l'orientation limite de la quille, qui représente le cas le plus défavorable du point de vue de l'effort à fournir par les vérins pour maintenir la quille, est tel que :

$$\theta_1 = -70° \text{ alors } \theta_2 = -20° \text{ et } \theta_3 = 200°$$

Q14. Vérifier que la pression hydraulique est suffisante pour satisfaire l'exigence de manœuvrabilité de la quille dans le cas le plus défavorable décrit ci-dessus, c'est-à-dire qu'elle reste inférieure à la pression hydraulique maximale disponible : $p_{h\ max} = 6$ MPa.

5.2 Réalisation d'une position de la quille

Objectif

Valider la course c du vérin retenu vis-à-vis de l'atteinte d'une position extrême de la quille.

Dans cette partie du sujet, on restreint l'étude à la partie du mécanisme pendulaire constituée des pièces **N**, **1**, **2** et **4**. Pour simplifier l'étude, on adoptera le schéma cinématique suivant.

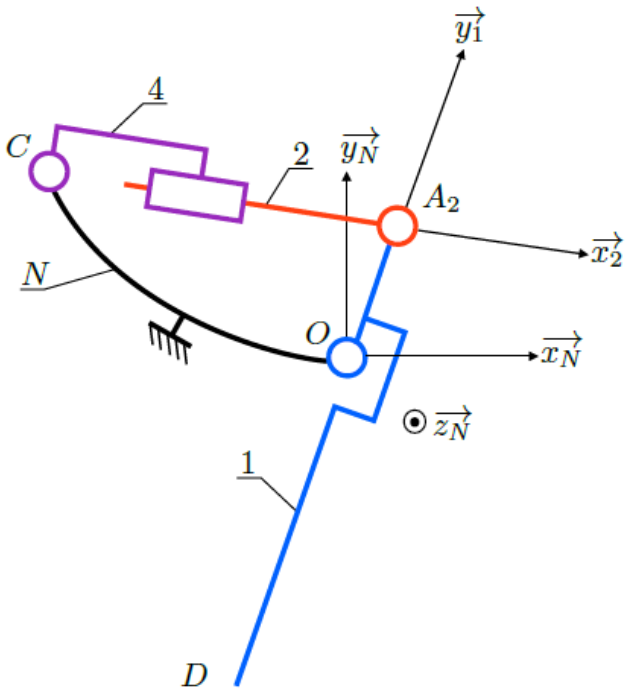


FIGURE 11 – Schéma cinématique simplifié du demi-mécanisme pendulaire

Q15. Quelle hypothèse de modélisation a été faite pour obtenir le schéma cinématique de la figure 11 ? En quoi est-elle justifiée ?

Q16. Réaliser le graphe de liaisons associé aux pièces **N**, **1**, **2** et **4** correspondant au schéma cinématique proposé.

Q17. Par une méthode graphique (utilisant la figure R4 du document réponses) ou une méthode analytique (utilisant le paramétrage posé en début de partie 5), déterminer la course du vérin, c'est-à-dire la variation de la longueur entre les points C et A_2 entre les positions extrêmes de la quille : $\theta_1 = -70\ °$ et $\theta_1 = +70\ °$. Valider le choix du vérin.

6 Gestion de la limitation de la vitesse angulaire de la quille

Objectif

Limiter la vitesse de rotation de la quille à $\dot{\theta}_{1\ max} = 8\ °\cdot s^{-1}$ au maximum.

Q18. Expliquer qualitativement la nécessité de limiter la vitesse de rotation de la quille.

Sur un navire, l'énergie embarquée est limitée. La conception du système de pendulation de la quille doit donc prendre en compte cette contrainte importante. Pour actionner les vérins, la puissance motrice est fournie par une centrale hydraulique délivrant la pression p_h. La puissance mécanique fournie par le vérin va donc limiter le produit $p_h \cdot V$ où V est la vitesse de translation du vérin. La translation du vérin **2-4** génère le mouvement de rotation de la quille. On considère toujours le modèle simplifié de la figure 11.

Q19. Par une étude appropriée, déterminer la valeur maximale de la composante selon $\vec{x}_2$ du vecteur vitesse du point A dans le mouvement du solide **2** par rapport au solide **4**, $\max(\overrightarrow{V}_{A_2 \in 2/4} \cdot \vec{x}_2)$, permettant de respecter la limite de vitesse angulaire de $8\ °\cdot s^{-1}$.

Cette limitation de vitesse de translation nécessite de programmer une saturation (cf. figure 13) dans l'algorithme de commande de la structure asservie de positionnement de la quille. Il est donc nécessaire de connaître la valeur maximale du débit d'huile fournie au vérin par l'intermédiaire de la servovalve.

Q20. En adoptant l'hypothèse d'incompressibilité de l'huile utilisée dans le vérin hydraulique, déterminer la valeur maximale du débit, notée q_{max}, en L/min.

On considère cette valeur affectée à une variable `q_max` définie dans l'en-tête d'un programme en langage Python. De même, la variable globale `v_max` est considérée définie.

Q21. Écrire une fonction `saturation` prenant comme argument une valeur de la tension `v` et renvoyant la valeur du débit `q` selon le comportement décrit par la figure 13. On utilisera le langage Python.

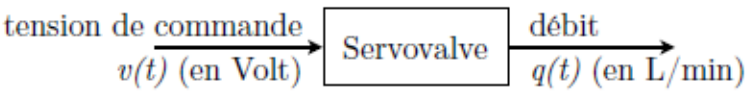


FIGURE 12 – Bloc de la servovalve

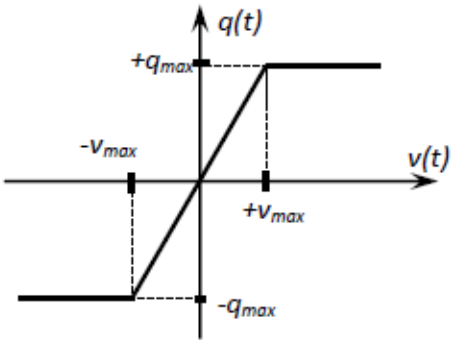


FIGURE 13 – Comportement souhaité de la servovalve selon la tension v imposée

Q22. Justifier la non-linéarité du système « servovalve ».

Problème N°2: Contrôle d'une machine de forage (extrait CCinp MP 2023)

Dans le domaine du génie civil, toute structure architecturale a besoin d'une fondation faisant office de liaison entre celle-ci et le sol. Elle permet d'assurer la transmission des charges et leur répartition dans le sol. Lorsque le sol résistant se trouve à une très grande profondeur, ou dans le cas d'une structure très importante, il est nécessaire de créer une fondation profonde composée de pieux en béton armé. L'excavation des terres se réalise alors grâce à un engin appelé foreuse (ou machine de forage).

Comme l'illustre la **figure 1**, ces pieux de fondation profonde sont réalisés en plusieurs étapes :

- étape 1 : positionnement de la foreuse et de l'outil au-dessus du point d'implantation du pieu ;
- étape 2 : forage profond jusqu'au sol résistant ;
- étape 3 : mise en place de l'armature (treillis de fer) du pieu ;
- étape 4 : coulée du béton ;
- étape 5 : retrait de la machine et séchage du pieu.

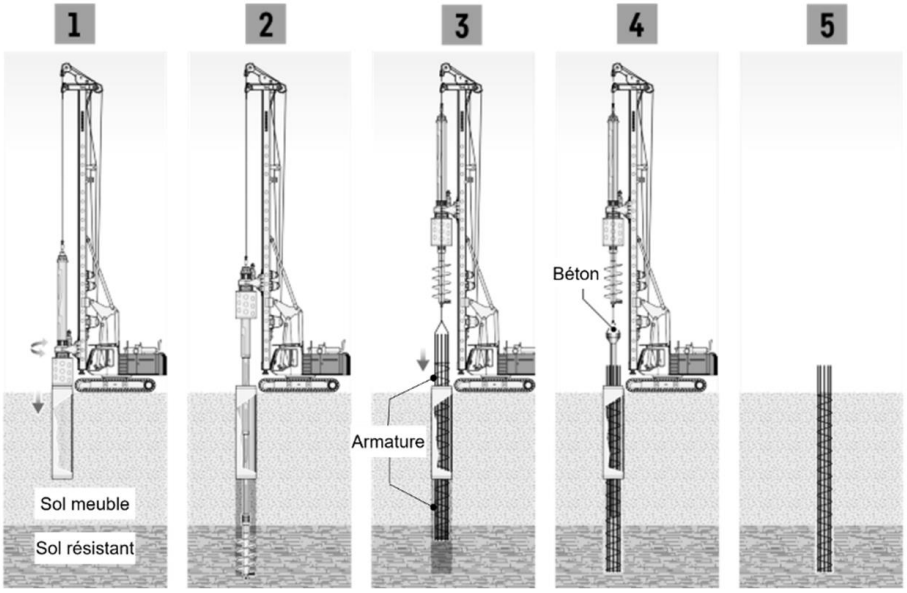


Figure 1 : Réalisation d'un pieu de forage profond

Une machine de forage est un système riche en sous-systèmes. Une description fonctionnelle partielle est donnée **figure 2** et une description structurelle, simplifiée, se situe en **figure 3**.

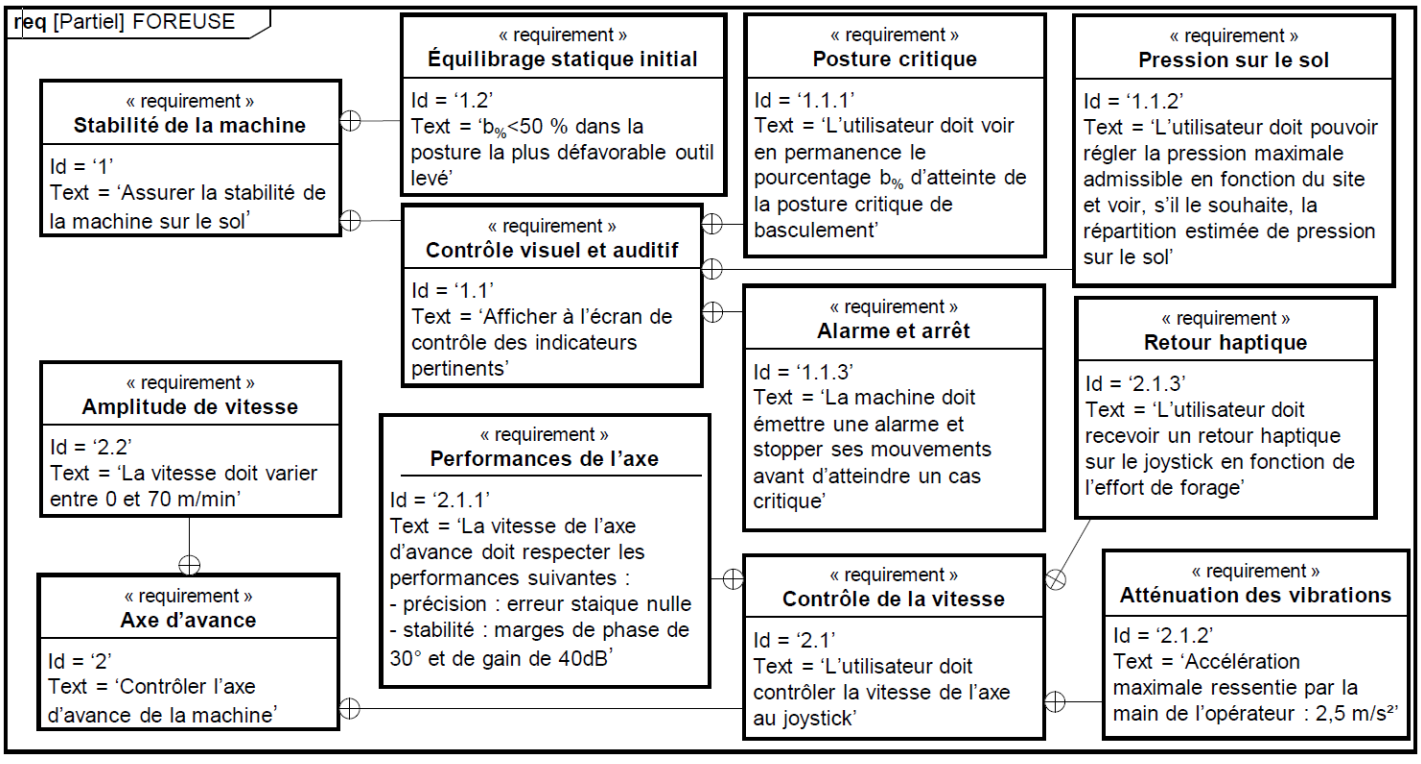


Figure 2 : Diagramme des exigences partiel

Une tourelle, comportant la cabine de pilotage, les différents moteurs de la foreuse et des contrepoids à l'arrière, est montée sur un châssis équipé de chenilles. La tourelle est orientable autour d'un axe vertical à 360° par rapport au châssis et porte un mât de levage. Ce mât, dont la portée et la verticalité par rapport à la tourelle sont réglables à l'aide de vérins, guide une table de forage en translation grâce à un câble d'avance lui-même actionné par un treuil d'avance. En phase de forage, pendant que la table de forage descend, celle-ci actionne en rotation la tige Kelly au bout de laquelle est montée l'outil, généralement une tarière (vis sans fin). Le mouvement d'avance combiné au mouvement de rotation de l'outil permet le forage. De plus, on note que la table de forage est équipée d'un système de suspension permettant d'amortir, pour le reste de la machine, les vibrations dues aux efforts de forage.

Dans ce sujet, il ne sera étudié que la stabilité globale de la machine (**Partie I**) et l'axe d'avance (**Partie II**). Le contrôle de ces fonctionnalités est soumis aux exigences présentes dans le diagramme des exigences partiel de la **figure 2**.

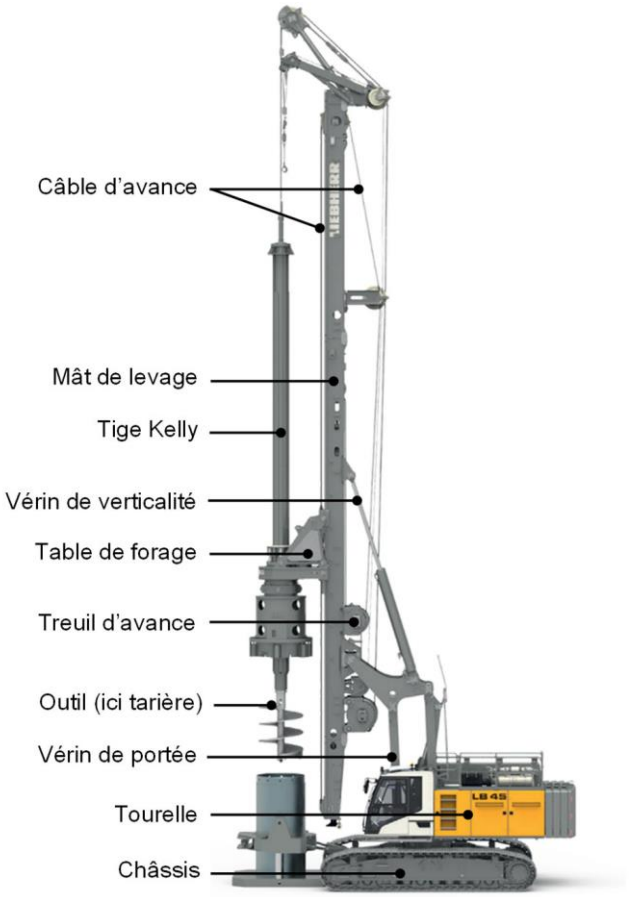


Figure 3 : Principaux constituants d'une foreuse

Partie I - Contrôle de la stabilité de la machine de forage

Les objectifs de cette partie sont de valider l'exigence 1.2 et d'étudier ce que propose le constructeur face à l'exigence 1.1.

I.1 - Condition de basculement statique

En fonction de l'orientation de la tourelle par rapport au châssis et des efforts mis en jeu, il est possible que la machine de forage bascule (voir annexe1 pour appréhender l'origine du basculement). Ceci doit légitimement être évité. Pour cela, la connaissance de la position estimée du centre de gravité de la machine permet à l'ordinateur de bord d'afficher à tout instant sur l'écran de contrôle la marge de manœuvre possible avant basculement de la machine. La **figure 4** ci-contre illustre ce que l'opérateur peut observer dans un coin de son écran : le pourcentage *b%* d'atteinte de la posture critique de basculement pour une orientation de tourelle donnée.

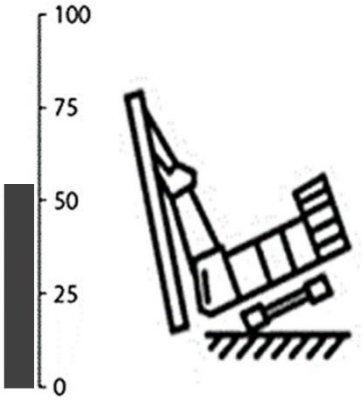


Figure 4 : Aperçu du contrôle de *b%*

I.2 - Contrôle de la pression du sol

I.2.1 - Modélisation des actions mécaniques

Le basculement de la machine n'est pas toujours dû à un déport trop important du centre de gravité de la machine, comme présenté dans la partie précédente, ou à un effort du sol trop important. En effet, une fondation profonde a particulièrement du sens si le sol de surface n'est pas très résistant. Ainsi, si la foreuse exerce trop de pression sur ce sol, celui-ci peut s'affaisser, ce qui peut déstabiliser de manière critique la machine. La foreuse doit donc contrôler à tout instant, par estimation, la pression qu'elle exerce sur le sol (et donc que le sol exerce sur elle).

Le **tableau 1** récapitule les niveaux de pression que les sols peuvent supporter avant de risquer de s'affaisser.

Type de sol	Rocher	Schiste argileux	Gravier compact	Asphalte	Sable compacté	Sable en vrac	Argile humide
Pression maximale admissible (kPa)	2 000	800	400	200	200	100	<100

Tableau 1: Pressions admissibles par le sol selon le type de sol

Les normes européennes précisent que la répartition de pression du sol sur chaque chenille doit être modélisée comme trapézoïdale sur sa longueur et constante sur sa largeur. Un exemple de représentations 3D, 2D et " aplatie " (comme vue sur l'écran de contrôle dans la cabine) de telles répartitions est donné sur la **figure 5**. Sur la vue " aplatie ", la machine est vue de dessus et la visualisation de l'allure des pressions sous les chenilles est ramenée dans le plan de l'écran.

Un des rôles de l'ordinateur de bord est d'estimer ces répartitions de pression afin de vérifier que la pression maximale supportée par le sol (rentrée par l'utilisateur en fonction du site) n'est pas atteinte à un coefficient de sécurité près. Si c'est le cas, l'ordinateur bloque tous les mouvements de la foreuse qui risqueraient d'empirer et renvoie une alarme.

La **figure 6** permet de remarquer que B (respectivement D), toujours positive, est la pression moyenne de la répartition trapézoïdale gauche (respectivement droite) et que A (respectivement C), positive ou négative, en est l'écart entre sa pression avant et arrière. Ainsi, la pression maximale du sol sur la chenille gauche vaut toujours $B + \left|\frac{A}{2}\right|$ (respectivement $D + \left|\frac{C}{2}\right|$ à droite).

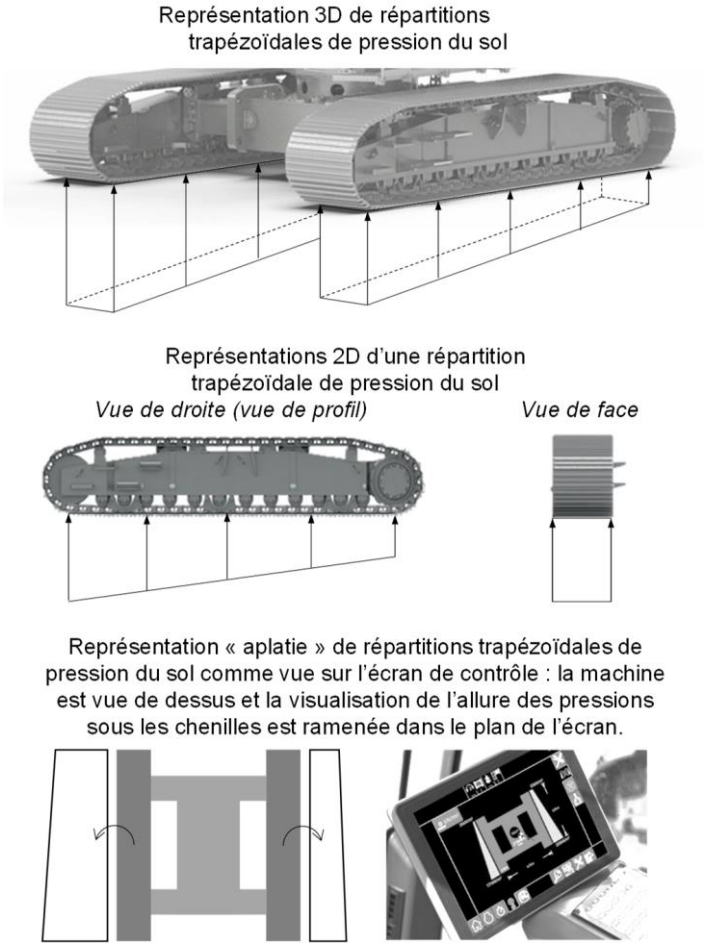


Figure 5 : Modèles de répartitions trapézoïdales de pression du sol sur les chenilles

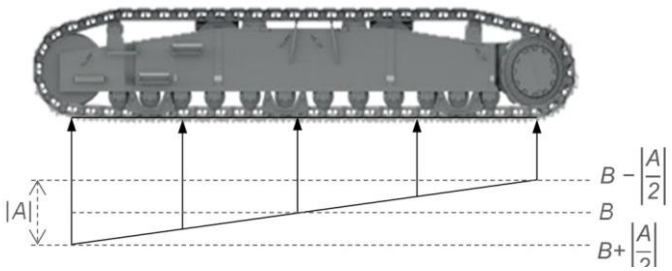


Figure 6 : Aperçu des expressions des pressions minimale, maximale et moyenne

L'ordinateur de bord détermine les valeurs des pressions A, B, C et D grâce aux équations issues du PFS (partie non étudiée ici) et des données renvoyées à tout instant par les capteurs présents sur les différents axes de la foreuse. Il en déduit la pression maximale en prenant comme hypothèse assez réaliste où $C = A$.

$$p_{max} = \frac{-F_{eq}}{2.L.l}\left(1 + \frac{e.|cos\theta|}{a} + \frac{6.e.|sin\theta|}{L}\right)$$

Où F_{eq} est la force équivalente à la somme du poids de la foreuse (en G) et de l'effort du sol (en F).

Toutefois, il est important de nuancer que la pression du sol sur la foreuse ne peut physiquement pas être négative. C'est pourquoi, lorsque la pression minimale calculée d'une répartition trapézoïdale devient négative ($B - \left|\frac{A}{2}\right|$ pour la chenille gauche ou $D - \left|\frac{C}{2}\right|$ pour la droite), l'ordinateur de bord se doit de changer son modèle de répartition de pression trapézoïdale pour une répartition triangulaire où la pression minimale est imposée à 0 Pa. Dans ces moments-là, l'hypothèse où $C = A$ est rompue pour continuer à respecter le système d'équations issues de la statique. On peut alors montrer dans ce cas que la pression maximale s'exprime de la façon suivante :

$$p_{max} = \frac{-e.F_{eq}}{L.l}\left(\frac{|cos\theta|}{a} + \frac{6|sin\theta|}{L}\right)$$

Après avoir estimé les pressions réparties sur chaque chenille, l'ordinateur de bord renvoie à l'écran la visualisation " aplatie " des distributions de pression et sonne l'alarme en cas d'approche de la pression maximale autorisée rentrée par l'utilisateur.

I.2.2 - Étude séquentielle

En résumé, pour évaluer la pression du sol sous la foreuse, l'ordinateur de bord réalise en permanence (les variables sont calculées continument), les étapes suivantes présentées sous la forme d'un diagramme d'états.

- Evaluation de la position de G (centre de gravité de la foreuse), de F (où s'exerce l'effort de forage) et mesure de l'effort Fw (effort du câble d'avance). Voir annexe1.
- Evaluation du pourcentage *b*% d'atteinte de la posture critique de basculement
- Evaluation de la pression minimale p_{min} dans le cas de répartitions trapézoïdales de pression :

$$p_{min} = \frac{-F_{eq}}{2.L.l}\left(1 - \frac{e|cos\theta|}{a} - \frac{6e|sin\theta|}{L}\right)$$

- Dans le cas d'une pression minimale positive, calcul de la pression maximale p_{max} :

$$p_{max} = \frac{-F_{eq}}{2.L.l}\left(1 + \frac{e.|cos\theta|}{a} + \frac{6.e.|sin\theta|}{L}\right)$$

- Dans le cas d'une pression minimale négative, calcul de la pression maximale p_{max} :

$$p_{max} = \frac{-e.F_{eq}}{L.l}\left(\frac{|cos\theta|}{a} + \frac{6|sin\theta|}{L}\right)$$

- Comparaison de p_{max} avec la valeur p_{sol} maximale autorisée
- Dans le cas où la valeur de p_{max} dépasse la valeur de p_{sol}, ou si *b*% dépasse 90 %, sonnerie de l'alarme et blocage des mouvements en cours de la foreuse jusqu'à ce que l'opérateur appuie sur l'arrêt d'urgence donnant accès à un mode de dégagement non-détaillé ici. La variable booléenne traduisant l'arrêt d'urgence est notée **ARU** et vaut 1 si l'arrêt est enclenché, 0 sinon.
- Redémarrage du travail normal de la foreuse et du contrôle de sa stabilité une fois le dégagement terminé et l'arrêt d'urgence désenclenché. La variable booléenne de la fin de dégagement est notée **FinDeg** et vaut 1 si la demande de fin est enclenchée, 0 sinon.

Q1. *À l'aide de la description du fonctionnement séquentiel précédente, compléter les six transitions manquantes du diagramme d'états fourni dans le* ***document réponse****.*

On propose une chronologie d'événements sur le **document réponse** : déploiement, orientation puis positionnement de la tourelle. L'évolution théorique des pressions estimées par l'ordinateur et du pourcentage d'atteinte de la posture critique de basculement qui découle de ces événements est aussi donnée.

Q2. *Grâce au diagramme d'états, surligner sur le* ***document réponse*** *l'évolution de p_{max} retenue par l'ordinateur de bord au cours du temps. Indiquer sur le* ***document réponse*** *l'instant où l'alarme se déclenchera sachant que ces opérations se déroulent sur du gravier compact (voir* ***tableau 1****) et que l'opérateur a réglé p_{sol} à la limite maximale de ce matériau sans coefficient de sécurité.*

Partie II - Contrôle de la vitesse de la table de forage

La qualité d'un forage dépend énormément de la vitesse de rotation de l'outil ainsi que de sa vitesse d'avance. On souhaite maîtriser cette dernière par un asservissement en vitesse de la table de forage le long du mât de levage.

L'objectif sera, dans cette partie, de valider les exigences de performances de l'axe (id. 2.1.1).

Le schéma-bloc de l'**annexe 2** modélise toutes les parties du système à étudier pour obtenir un modèle de connaissance de cet asservissement.

II.1 - Sous ensemble " Mécanisme " : étude cinématique de la table de forage

On s'intéresse ici à la partie " Mécanisme " du schéma-bloc. Pour cela, il est nécessaire d'établir tout d'abord le lien entre la vitesse de rotation ω_w du treuil d'avance ("crowd winch") et la vitesse V de déplacement de la table de forage. Ainsi, on travaillera désormais sur la modélisation proposée **figure 7**. Le schéma de gauche modélise notamment le système complet en trois dimensions.

Le système est constitué :

- d'un moteur hydraulique, suivi d'un réducteur à engrenages non représenté mettant en rotation le winch **1**. Ce dernier est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$ avec le châssis **0** (immobile par rapport au sol). Le tambour de ce winch permet de tracter un câble qui s'enroule autour de celui-ci. Le rayon d'enroulement, noté R_1, est supposé constant. La vitesse de rotation du tambour du winch autour de son axe est notée $\omega_w = \omega_1 = \omega_{1/0}$;
- de trois poulies **2**, **2'** et **2''** chacune en liaison pivot avec le châssis d'axes respectifs $(B, \vec{x})$, $(B', \vec{x})$, $(B'', \vec{x})$. Elles ont toutes trois un rayon R_2 ;
- de deux poulies mobiles **3** et **3'** en liaison pivot avec la table de forage **4**, d'axes respectifs $(C, \vec{y})$ et $(C', \vec{y})$.Elles sont de même rayon R_3 et on note $\omega_3 = \omega_{3/4}$ leur vitesse de rotation autour de leur axe ;
- de la table de forage **4**, mise en mouvement grâce au câble et par l'intermédiaire des poulies **3** et **3'**, qui est en liaison glissière de direction $\vec{z}$ avec le châssis **0**. On note V la vitesse d'avance de la table de forage telle que $\overrightarrow{V(D, 4/0)} = V\vec{z}$;
- du câble, supposé inextensible, qui est attaché à ses extrémités au châssis au niveau des points O et O'. On suppose de plus que le câble s'enroule sans glisser autour de toutes les poulies et du tambour du winch d'avance.

Remarque : l'ensemble noté **5** avec le système d'amortisseur sera étudié ultérieurement.

Le schéma de droite de la **figure 7** (schéma cinématique dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$) représente uniquement la partie du système constitué du châssis **0**, de la table de forage **4** et des deux poulies **3** et **3'**. On introduit deux points mobiles I et J, marquant le début et la fin de l'enroulement du câble autour de la poulie **3**. Par analogie, on a les points I' et J' pour la poulie **3'**.

On a alors : $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{C'I'} = \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{J'C'} = R_3\vec{x}$

La condition de roulement sans glissement du câble sur la poulie **3** et sur le tambour **1**, associée à la composition du mouvement au point I, permettent de trouver l'équation suivante :

$$\overrightarrow{V(J, 4/0)}.\vec{z} = \left(\overrightarrow{V(J, 4/3)} + \overrightarrow{V(J, 3/câble)} + \overrightarrow{V(J, câble/0)}\right).\vec{z} = V = -R_3\omega_3 + R_1\omega_1$$

Q3. *De la même manière, en utilisant la composition des vitesses au point I et en exprimant une condition de roulement sans glissement, montrer que :* $\overrightarrow{V(I, 4/0)}.\vec{z} = V = R_3\omega_3$

Q4. *Déduire de la question précédente l'expression du rayon équivalent, noté R_{eq}, dans le sous-système " Mécanisme " du schéma-bloc fourni en **annexe 2**, en fonction de R_1 seulement.*

Un réducteur à engrenages de rapport de réduction k_r permet d'adapter la vitesse de rotation du moteur hydraulique $\omega_m(t)$, tel que : $\omega_w(t) = k_r.\omega_m(t)$

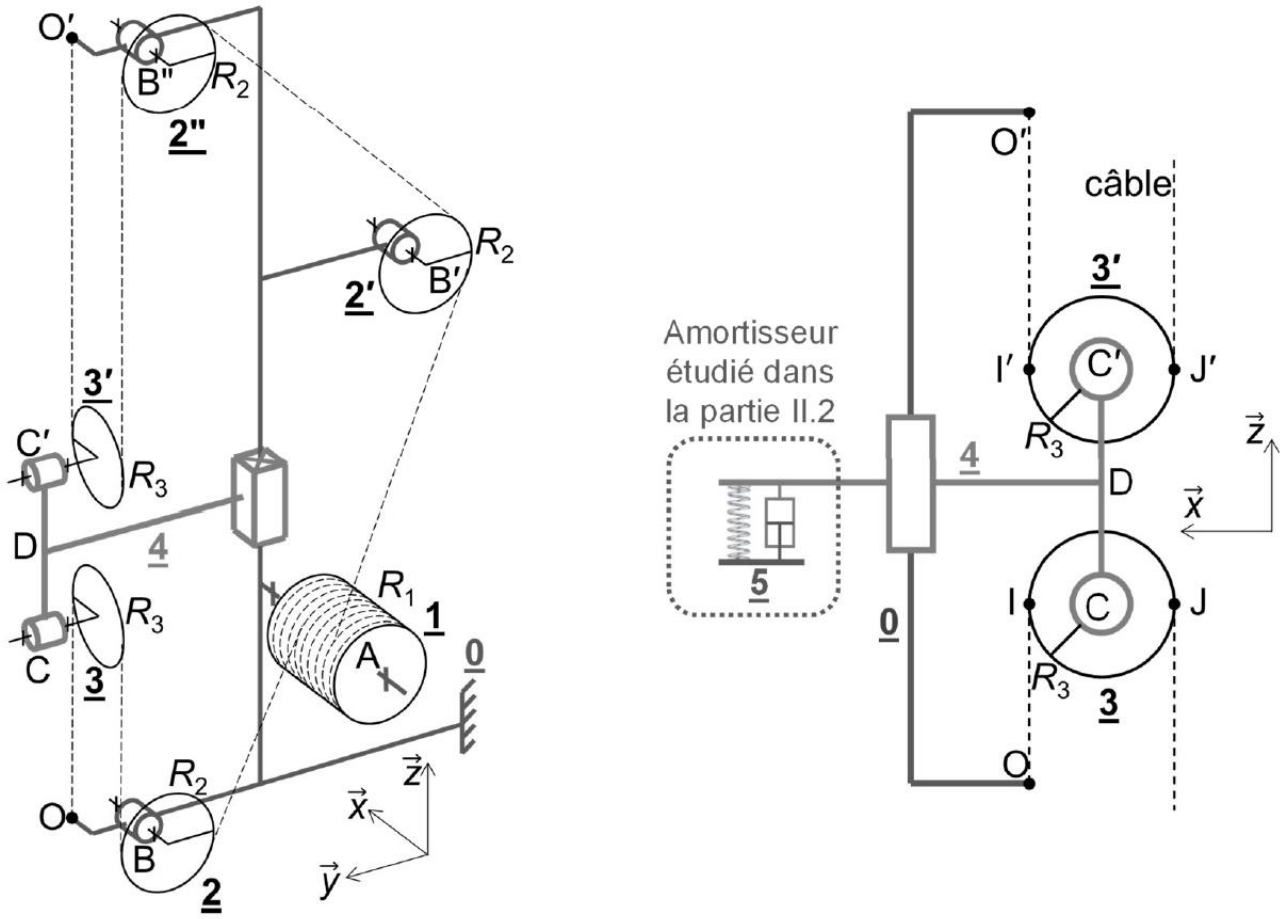


Figure 7 : Schéma cinématique 3D du système d'entraînement de la table de forage (à gauche) ; vue 2D simplifiée (à droite)

II.2 - Partie " Amortisseur " : étude dynamique de la table de forage

Afin de modéliser l'asservissement en vitesse de la table de forage, il est possible de prendre en compte que, lors de l'étape de forage, un système d'" amortisseurs Kelly " (suspensions) permet d'amortir les chocs et vibrations. Chaque suspension est composée d'un ressort de raideur k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux λ. Il y a n suspensions équiréparties autour de l'axe de la tige Kelly (soient n ressorts et n amortisseurs) disposées en parallèle, comme l'indique le schéma de la **figure 8**. On précise que le guidage entre la table **4** et l'ensemble **5** est réalisé par une liaison glissière parfaite, non représentée.

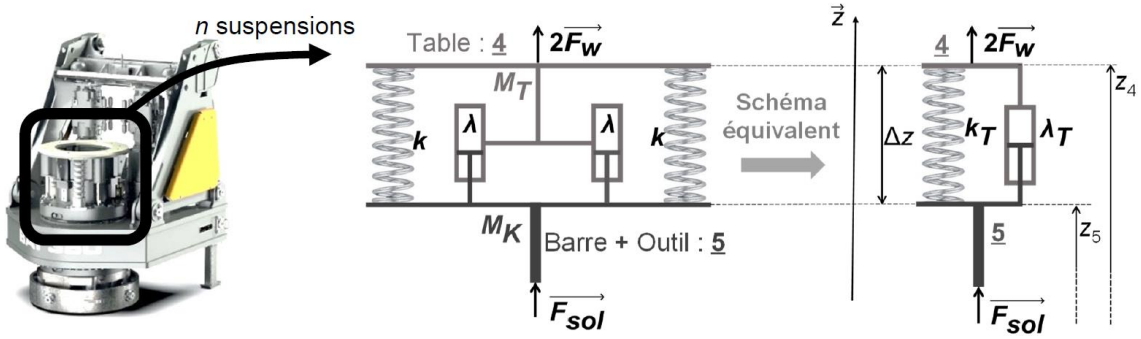


Figure 8 : Modélisation de liaison entre la table et la barre Kelly lors du forage

On note z_4 la position verticale de la table **4** de masse M_T et z_5 la position verticale de l'ensemble **5** {barre + outil} de masse M_K. Elles sont toutes deux établies par rapport à une référence fixe, liée au châssis de la foreuse. L'allongement instantané du ressort est noté $\Delta z = z_4 - z_5$. De plus, on note :

- Δz_0 : la valeur de l'allongement du ressort à vide ;
- Δz_e : la valeur de l'allongement du ressort à l'équilibre (**5** suspendu sans action du sol sur lui).

Bilan des actions mécaniques :

- action de traction du câble sur la table **4**, modélisée par une force verticale $2F_w\ \vec{z}$. Cette force de traction s'écrit $2F_w$, sachant que : $2F_w = 2F_{we} + \delta F_w$ où :
  - F_{we} est la force de maintien à l'équilibre de l'ensemble {**4**+**5**} (sans autre action supplémentaire),
  - δF_w est la variation de cette force autour de la force F_{we} de maintien à l'équilibre ;
- action du sol sur l'ensemble **5**, modélisée par une force verticale $F_{sol}\ \vec{z}$;
- action de la pesanteur : l'accélération de la pesanteur sera notée $\vec{g} = -g\ \vec{z}$;
- action d'un ressort de raideur k sur la table **4** : $\overrightarrow{F_r} = k(\Delta z_0 - \Delta z)\ \vec{z}$;
- action d'un amortisseur sur la table **4** : $\overrightarrow{F_a} = -\lambda\ (\dot{z}_4 - \dot{z}_5)\ \vec{z} = -\lambda\ (\Delta\dot{z})\ \vec{z}$

On souhaite simplifier la modélisation en retenant le schéma équivalent de droite sur la **figure 8**. Dans ce cas, l'action de l'ensemble des n ressorts et des n amortisseurs s'exprime par :

- $\overrightarrow{F_{nr}} = k_T(\Delta z_0 - \Delta z)\ \vec{z}$
- $\overrightarrow{F_{na}} = -\lambda_T\ (\Delta\dot{z})\ \vec{z} = -\lambda_T\ \frac{d\Delta z}{dt}\ \vec{z}$

Toutes les suspensions (ressorts et amortisseurs) ont une masse négligeable devant les autres actions mécaniques mises en jeu.

Q5. *Exprimer k_T et λ_T en fonction de n, k et de λ*

Q6. *À l'équilibre, système suspendu, proposer et mettre en œuvre une stratégie de résolution afin d'établir une première équation, liant k_T, Δz_e, Δz_0, M_K et g et une deuxième, liant Fw_e, M_K, M_T et g.*

Q7. *En fonctionnement, isoler la table **4** et déterminer son équation du mouvement vertical $\ddot{z}_4(t)$ en fonction des paramètres du problème en utilisant une équation issue du principe fondamental de la dynamique.*

Par analogie, l'équation du mouvement vertical de l'ensemble **5** {barre + outil} s'écrit :

$$M_K\ddot{z}_5(t) = F_{sol} - k_T\big(\Delta z_0 - \Delta z(t)\big) + \lambda_T\ \Delta\dot{z} - M_K\ g$$

On pose le changement de variables suivant : $z_5(t) = \hat{z}_5(t) - \frac{\Delta z_e}{2}$ et $z_4(t) = \hat{z}_4(t) + \frac{\Delta z_e}{2}$, permettant de s'affranchir des actions de la pesanteur. On rappelle que Δz_e est constant.

Q8. *En utilisant les résultats précédents et le changement de variables précédent, montrer que l'on obtient le système d'équations suivant :*

$$M_T\frac{d^2\hat{z}_4(t)}{dt^2} + \lambda_T\frac{d\hat{z}_4(t)}{dt} + k_T\,\hat{z}_4(t) = \lambda_T\frac{d\hat{z}_5(t)}{dt} + k_T\,\hat{z}_5(t) + \delta F_w$$

$$M_K\frac{d^2\hat{z}_5(t)}{dt^2} + \lambda_T\frac{d\hat{z}_5(t)}{dt} + k_T\,\hat{z}_5(t) = \lambda_T\frac{d\hat{z}_4(t)}{dt} + k_T\,\hat{z}_4(t) + F_{sol}$$

Pour une fonction temporelle $f(t)$ ou $F(t)$, on note sa transformée de Laplace $F(p) = L[f(t)]$. Les conditions initiales sont considérées être toutes nulles dans tout le sujet.

Q9. *Traduire le système de deux équations différentielles précédent dans le domaine de Laplace, puis en déduire les expressions des trois fonctions de transfert $H_6(p)$, $H_7(p)$ et $H_8(p)$ présentes sur l'**annexe 2** (zone encadrée notée " Amortisseur " en précisant que $L[\dot{z}_4(t)] = V(p)$)*

II.3 - Sous-systèmes Servo-pompe, Circuit hydraulique et Moteur hydraulique

Ces sous-systèmes sont représentés sur le schéma-bloc de l'**annexe 2**.

Le dispositif de positionnement de la table de forage et de son outil utilisent de l'énergie hydraulique. Les modèles de connaissance pour ces systèmes hydrauliques sont donnés ci-dessous :

- Le dispositif est contrôlé par une électrovanne proportionnelle de gain Ks. Le débit disponible est noté q_p, la tension délivrée par la partie commande est notée U_s et on a :

$$q_p(t) = K_s \cdot U_s(t) \textbf{ (i)}$$

- Les équations de mécanique des fluides dans un circuit fermé permettent d'écrire :

$$\frac{V_0}{B} \frac{d\Delta p(t)}{dt} = q_p(t) - q_m(t) \textbf{(ii)}$$

V_0 désigne le volume dans le circuit et B est le coefficient de compressibilité du fluide. Δp désigne une différence de pression dans le circuit et q_m un débit retour.

- Les lois de comportement hydromécanique permettent d'introduire le lien entre la vitesse de rotation du moteur hydraulique ω_m et le débit q_m d'une part et entre le couple moteur et le différentiel de pression Δp d'autre part. On note C_Y la cylindrée du moteur et on a :

$$q_m(t) = C_Y\, \omega_m(t) \textbf{ (iii)} \qquad \text{et} \qquad C_m(t) = C_Y\, \Delta p(t) \textbf{ (iv)}$$

- L'équation du mouvement du mécanisme s'écrit :

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + a\omega_m(t) = C_m(t) - C_r(t) \textbf{ (v)}$$

où J_{eq} est l'inertie équivalente des solides en mouvement ramenée sur l'axe de rotation du moteur, a un coefficient de frottement visqueux équivalent et C_r modélisant les couples résistants autres que ceux dus au frottement visqueux.

Q10. *Traduire les cinq équations **(i)**, **(ii)**, **(iii)**, **(iv)** et **(v)** dans le domaine de Laplace et expliciter les cinq fonctions de transfert $H_1(p)$, $H_2(p)$, $H_3(p)$, $H_4(p)$ et $H_5(p)$ à partir des résultats de la question précédente.*

Q11. *Préciser le rôle du gain K_{ihm} de la partie " Chaîne d'information " de l'**annexe 2** et donner son expression en fonction des transmittances figurant dans le schéma-bloc pour que le système soit correctement asservi.*

ANNEXE 1 - Paramétrage mécanique

Paramètres généraux :

Soient :

- **0** le sol, **S1** le châssis de la foreuse, **S2** sa tourelle et son mât et **S3** l'ensemble {table de forage + outil} ;
- $\Re_0 = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère attaché aux solides **S0** et **S1** ;
- $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z})$ la base attachée aux solides **S2** et **S3** telle que $(\vec{x}, \vec{x}_2) = \theta$ où θ est connu ;
- **Σ** = {**S1**, **S2**, **S3**} l'ensemble de la foreuse, de centre de gravité *G* tel que $\overrightarrow{OG} = r\,\vec{x}_2 + z_G\,\vec{z}$;
- M = 186,5 *tonnes* la masse de l'ensemble **Σ** et m =18 *tonnes* la masse de **S3** seul ;
- $2F_w\,\vec{z}$, connu, l'effort du câble d'avance sur **S3**. La masse du câble est négligée dans la suite ;
- $F_{sol}\,\vec{z}$, inconnu, l'effort de forage du sol **0** sur l'outil de forage **S3** au point F, connu, défini par $\overrightarrow{OF} = R\,\vec{x}_2$;
- $-g\,\vec{z}$ où g = 9,8 $m.s^{-2}$, l'accélération de la pesanteur terrestre.



Système réel

Modèle

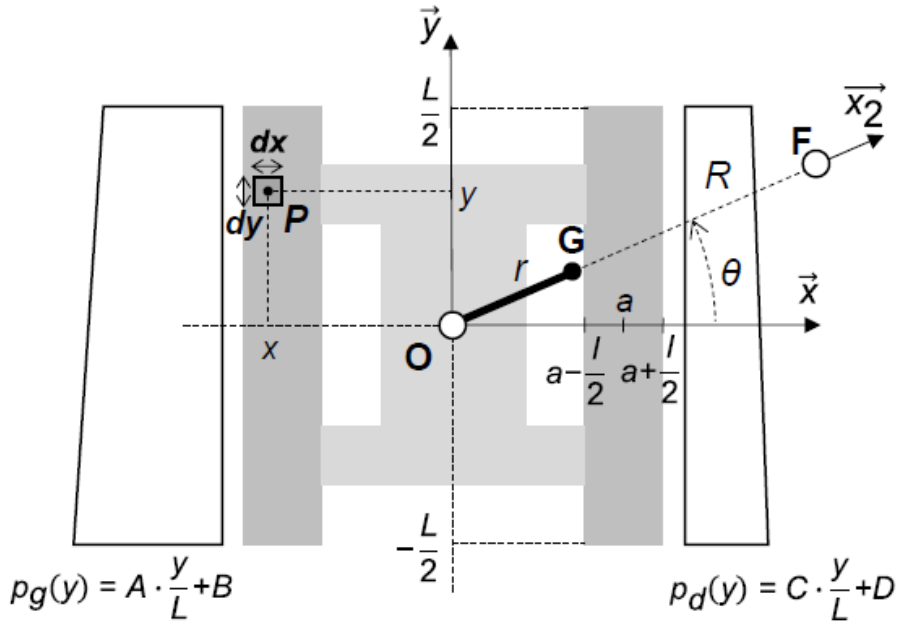
Paramétrage n° 1 : modèle avec efforts ponctuels entre le sol et la foreuse

- $F_g\,\vec{z}$, inconnu, l'effort du sol **0** sur **S1**, supposé ponctuel au centre I de la surface de contact entre la chenille gauche *cg* et le sol tel que $\left\|\overrightarrow{OI}\right\| = a = 2{,}1\,m$;
- $F_d\,\vec{z}$, inconnu, l'effort du sol **0** sur **S1**, supposé ponctuel au centre J de la surface de contact entre la chenille droite *cd* et le sol tel que $\left\|\overrightarrow{OJ}\right\| = a = 2{,}1\,m$.

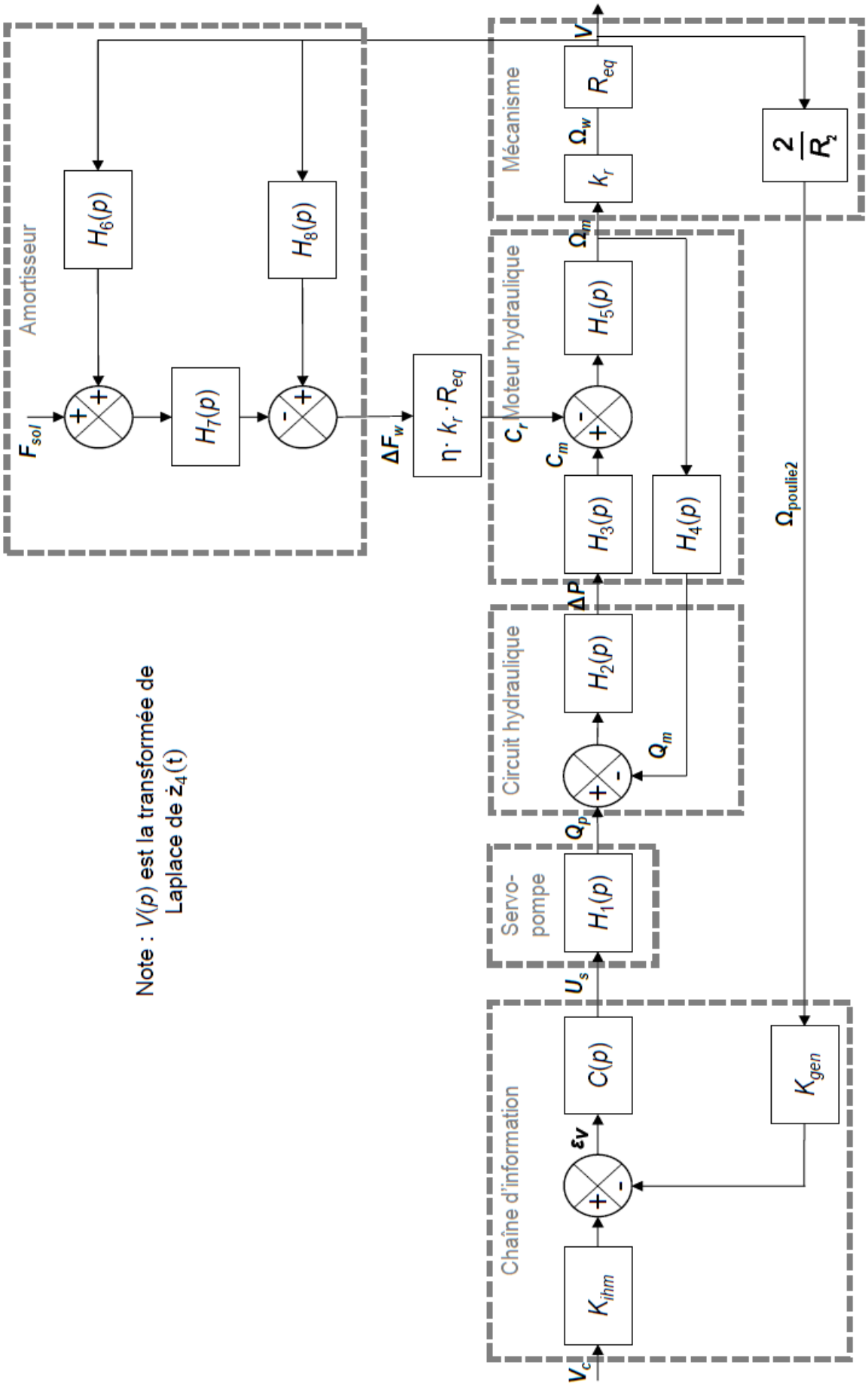
Paramétrage n° 2 : modèle avec répartition de pression entre le sol et la foreuse

On note :

- P(x,y,0), un point courant de contact entre le sol et les chenilles. Attention, x est négatif sur la figure ci-dessous. Les grandeurs dx et dy sont les dimensions du domaine surfacique élémentaire autour du point P entre le sol et les chenilles ;
- $p_g(y) = A \cdot \frac{y}{L} + B$, la pression du sol 0 sur la chenille gauche cg au point P(x,y,0) où A et B, homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- $p_d(y) = C \cdot \frac{y}{L} + D$, la pression du sol 0 sur la chenille droite cd au point P(x,y,0) où C et D, homogènes à des pressions, sont inconnues et à déterminer ;
- L = 5,4 m, la longueur et l = 1 m la largeur de chaque chenille ;
- a = 2,1 m, la distance moyenne sur l'axe $\vec{x}$ d'une chenille au centre O de la machine.



ANNEXE 2 - Schéma-bloc : modélisation de l'asservissement



Problème N°3 : Roue autonome ezwheel (extrait CCinp MP 2013)

I.présentation

I.1. La roue autonome

Ez-Wheel SAS est une entreprise française de technologie innovante fondée en 2009. Elle propose une gamme de roues électriques "clé en main", 100% intégrées. La roue autonome ez-Wheel (prononcer "easy- wheel") propose une solution simple pour tracter des équipements de manutention et de transport de charges, des véhicules légers et matériels médicaux. L'avantage de la solution ez-Wheel est d'être adaptable à la majorité des produits roulants qui existent sur le marché. Les dimensions et l'interface mécanique standardisées permettent une installation simple et immédiate. Le stator de la roue ez-Wheel est fixé sur le châssis de l'engin à déplacer et son rotor est assemblé directement sur sa roue.

La solution intègre, au sein d'une roue, tous les composants nécessaires à la traction : la motorisation électrique, des batteries haute énergie de très longue durée de vie, un contrôleur de puissance assurant un pilotage optimal et la gestion de la batterie ainsi qu'une interface de commande sans fil. La transmission de l'énergie est réalisée par un variateur (incorporé à la carte de commande), un moteur brushless, puis un réducteur (figure2).

I.2.Mise en situation

Nous nous proposons, dans ce sujet, d'étudier l'implantation de la roue autonome sur un fauteuil roulant (figure2). Pour ce genre d'application, où il est nécessaire de mettre en place deux roues autonomes sur le fauteuil, la commande des roues n'est pas aussi simple que pour des applications à une seule roue. En effet, en plus de gérer le mouvement d'avance du fauteuil, il faut également gérer ses changements de direction. Les deux ez-Wheel étant implantées sur chacune des deux roues arrière, le pilotage des deux roues est lié afin de maîtriser la direction du fauteuil. Chacune des deux roues est alors asservie par l'intermédiaire de capteurs mesurant la vitesse de rotation de l'arbre du moteur brushless.

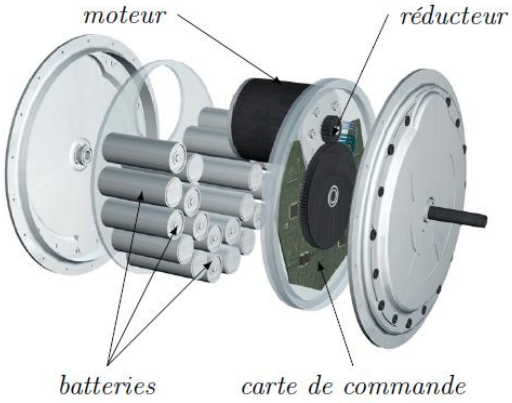


Figure 1 : Principaux éléments d'une roue ez-Wheel



Figure 2 : Prototype de fauteuil roulant équipé de deux ez-Wheel

II. présentation fonctionnelle et technique

Le tableau 1 ci-dessous est un extrait du cahier des charges dans la phase de vie d'utilisation du produit. Il donne la caractérisation des exigences fonctionnelles principales attendues de la roue ez-wheel.

Repère	Expression	Critères	Valeurs
Ex1	Permettre à l'utilisateur de se déplacer par rapport au sol	Vitesse en ligne droite ($km \cdot h^{-1}$)	≤ 6
		Rayon de courbure (m)	$0 \leq \rho \leq \infty$
		Stabilité (pour une ez-Wheel)	
		• marge de phase (°)	≥ 45
		• marge de gain (dB)	≥ 15
		Précision	
		• erreur statique pour une vitesse de consigne V_{cons} (%) en ligne droite	± 10
		• erreur statique pour un rayon de consigne ρ_{cons} (%)	± 3
		Dépassement sur la vitesse	Aucun
		Rapidité : temps de réponse à 5 % du fauteuil pour chaque consigne (s)	$\leq 0,3$
Ex2	Recevoir les commandes de l'utilisateur	(Non étudié dans le sujet)	
Ex3	S'adapter au sol	Coefficient de frottement béton sec/pneu	$0,75 \leq f \leq 0,85$
		Coefficient de frottement béton mouillé/pneu	$f = 0,45$
		Inclinaison du sol (%)	≤ 12
Ex4	Franchir les obstacles	Hauteur d'une bordure (cm)	≤ 14
Ex5	Respecter les normes	ISO 7176-2:2001	
Ex6	Etre autonome en énergie électrique	Autonomie (heures)	≥ 24
Ex7	Se recharger en énergie électrique	Raccord au secteur EDF	
Ex8	Respecter l'environnement	(Non étudié dans le sujet)	
Ex9	Résister à l'environnement	Etanchéité	

Tableau 1 : extrait du cahier des charges

III. Etude de l'exigence 3 : « s'adapter au sol »

Les différentes normes relatives à l'accessibilité des espaces publics aux personnes à mobilité réduite imposent certaines réalisations au niveau des accès des bâtiments. Les escaliers, infranchissables pour une personne en fauteuil roulant, doivent être remplacés ou complétés par des rampes d'accès. Comme l'indique la figure 3, extraite des textes normatifs, ces rampes peuvent avoir une pente maximale de 12% (soit environ 6,8°).

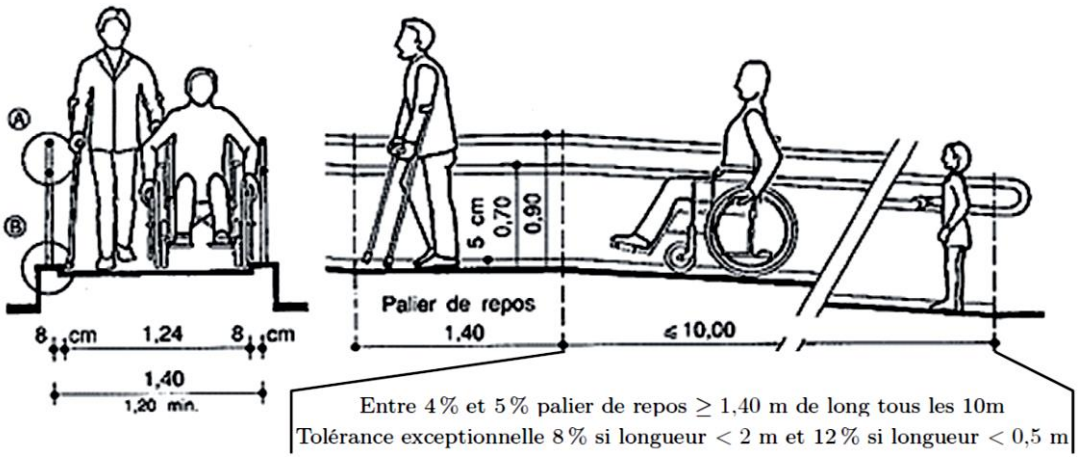


Figure 3 : Illustration des normes relatives aux accès des bâtiments pour les personnes à mobilité réduite

La figure 4, donne les dimensions du fauteuil motorisé et la figure 5, le paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente.

Les hypothèses d'étude de cette partie sont :

- le référentiel R_0 $(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$, lié au sol, est supposé galiléen ;
- le fauteuil se déplace en ligne droite dans une phase de montée. Le problème est considéré comme un problème plan ;
- le référentiel R_f $(O_f, \overrightarrow{x_f}, \overrightarrow{y_f}, \overrightarrow{z_f})$ est lié au fauteuil avec $\overrightarrow{y_0} = \overrightarrow{y_f}$;
- $\vec{g} = -g\,\overrightarrow{z_0}$ est l'action de la pesanteur avec g = 9,81 m·s^{-2} ;
- le vecteur position du fauteuil est $\overrightarrow{OO_f} = x(t)\,\overrightarrow{x_f} + R\,\overrightarrow{z_f}$;
- chaque motoréducteur fournit le même couple, noté C_{red} (chacun peut fournir 70 Nm au maximum);
- on supposera que le problème est équivalent à un seul moteur qui fournit un couple $2\,C_{red}$ sur une seule roue arrière ;
- l'ensemble S = {fauteuil + roues motorisées + utilisateur} a une masse M_S = 150 kg, son centre d'inertie est G ; le contact roues arrière/sol modélisé par une liaison ponctuelle se fait avec frottement, on note f le coefficient de frottement ;
- le contact roues avant/sol est modélisé par une liaison ponctuelle ;
- l'inertie des roues et celle du motoréducteur sont négligées ;
- l'inertie des roues étant faible devant les autres inerties, l'effort tangentiel (suivant $\overrightarrow{x_f}$) du sol sur les roues avant sera négligé (se démontre par l'application du TMD au centre des roues avant) ;
- les roues arrière sont en liaison pivot d'axe ($O_f, \overrightarrow{y_f}$) par rapport au châssis du fauteuil ;
- les roues avant sont en liaison pivot d'axe $(A, \overrightarrow{y_f})$ par rapport au châssis du fauteuil ;
- les liaisons autres que les liaisons roue/sol sont considérées comme parfaites.

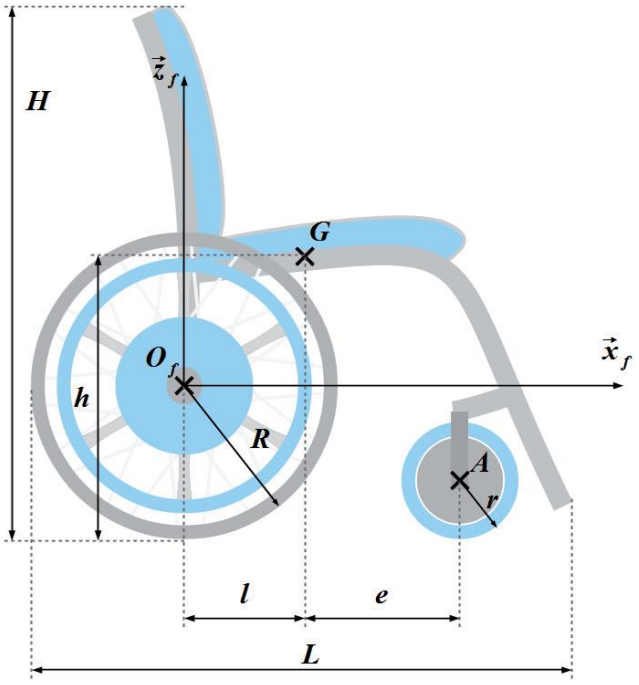


Figure 4 : Dimensions d'un fauteuil équipé de deux roues ez-Wheel

Attention au paramétrage : **α est constant et négatif** sur la figure 7

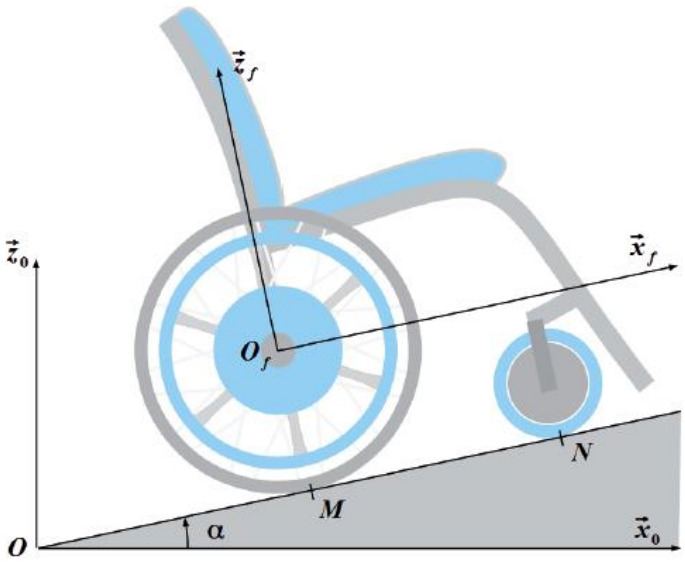


Figure 5 : Paramétrage de l'étude en phase de montée d'une pente **constante**

Les dimensions du fauteuil sont celles d'un fauteuil classique : e = *400 mm* *h = 600 mm* *H = 1000 mm*
l = 200 mm *L = 1300 mm* *r = 150 mm* *R = 400 mm*

Le torseur des actions mécaniques transmissibles par le solide i sur le solide j, réduit au point A et exprimé dans le repère R, sera noté :

$$\{T_{i\to j}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{(i\to j)}} \\ \overrightarrow{M_{(A,i\to j)}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_{A,R}$$

Q1. *Donner les expressions des torseurs des actions mécaniques transmissibles en faisant apparaître les composantes nulles et le repère choisi :*

a) du sol sur le fauteuil au niveau des roues avant $\{T_{sol\to roue\ avant}\}$ au point N. Justifier que la composante tangentielle de la résultante est nulle.

b) du sol sur le fauteuil au niveau des roues arrière $\{T_{sol\to roue\ arrière}\}$ au point M,

c) du poids sur le fauteuil $\{T_{poids\to fauteuil}\}$ au point G.

Q2. *Justifier soigneusement que le moment dynamique de l'ensemble S par rapport au référentiel R_0 au point G noté $\vec{\delta}(G,S/R_0)$ est nul. Vous serez amené à introduire les masses des roues (notées m_R et m_r pour les roues respectivement arrière et avant) ainsi que le centre de gravité du fauteuil avec l'utilisateur sans les roues qu'on supposera confondu avec G.*

Q3. *Ecrire les trois équations scalaires issues du principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble S en projection dans R_f au point G.*

Pour les questions **Q4** à **Q7**, on suppose que le contact roue arrière/sol se fait à la limite du glissement.

Q4. *En déduire l'accélération maximale du fauteuil $\ddot{x}(t)$ pour être à la limite du glissement. Faire l'application numérique pour une pente de béton mouillé de 12 % (f = 0,45).*

Q5. *En appliquant le théorème du moment dynamique à la roue arrière, déterminer l'expression du couple moteur C_{red} en fonction de l'accélération $\ddot{x}(t)$. Faire l'application numérique dans les conditions de limite de glissement.*

Q6. *Comparer avec la valeur du couple motoréducteur du constructeur et justifier ce choix. Déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de l'action mécanique du sol sur la roue avant. Conclure.*

On suppose, pour la question suivante, que le contact entre les roues arrière et le sol se fait toujours avec frottement mais qu'il n'est plus à la limite de glissement. On suppose, de plus, que le couple motoréducteur est de 70Nm sur chacune des roues.

Q7. *Calculer l'accélération du fauteuil. Les motoréducteurs, mis en place sur le fauteuil, permettent –ils de respecter les normes d'accès au bâtiment ? Le fauteuil risque-t-il de basculer ? Conclure sur l'étude menée.*